

61:03-1/188-9

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Малышкин Павел Александрович

**КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНОГО
РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА
НЕЗАМКНУТЫХ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩИХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

01.04.03 – Радиофизика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Шатров А. Д.

МОСКВА – 2002

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Резонансное рассеяние электромагнитных волн на узкой анизотропно проводящей ленте.....	15
1.1. Постановка задачи	15
1.2. Интегродифференциальное уравнение для плотности поверхностного тока.....	16
1.3. Поле в дальней зоне.....	18
1.4. Полное сечение рассеяния	19
1.5. Аналитическое решение для узкой ленты.....	22
1.6. Резонансы	27
1.7. Сечение обратного рассеяния ленты.....	34
<i>Выводы</i>	39
Глава 2. Низкочастотный киральный резонанс анизотропно проводящего цилиндра с узкой продольной щелью.	45
2.1. Постановка задачи.....	45
2.2. Поле поверхностных винтовых токов.....	45
2.3. Интегродифференциальное уравнение для плотности поверхностного тока.....	51
2.4. Предельный вид токов при $ka \rightarrow 0$	53
2.5. Низкочастотный резонанс	57
2.6. Квазистатическое решение задачи дифракции	58
2.7. Сечение обратного рассеяния цилиндра.....	69
<i>Выводы</i>	71
Глава 3. Волны, направляемые анизотропно проводящим цилиндром с продольной щелью.....	79
3.1. Постановка задачи.....	79
3.2. Интегродифференциальное уравнение для собственного тока... ..	80
3.3. Аналитическое решение в случае малых углов подъема и узкой щели	84
<i>Выводы</i>	89
Приложение 1. Оптическая теорема	91
Приложение 2. Некоторые тождества для функций Лежандра.....	94
Список литературы	98

Введение

Предмет исследований.

В настоящей работе исследуются двумерные незамкнутые рассеиватели резонансного типа, поперечные размеры которых малы по сравнению с длиной волны. Такими рассеивателям являются лента с анизотропной проводимостью и круговой цилиндр с узкой продольной щелью с анизотропной проводимостью вдоль винтовых линий.

Интерес к подобным рассеивателям возникает в связи с тем, что они могут применяться для создания электромагнитных структур (например, периодических решеток, каскадов решеток) с новыми электродинамическими свойствами, которые не наблюдаются при использовании металлических рассеивателей.

Так, решетка из анизотропно проводящих лент, период которой много меньше длины волны, обладает сильной частотной селективностью: в такой решетке имеют место эффекты полного внутреннего отражения и прохождения. Решетки из обыкновенных металлических лент таким свойством не обладают. В тонком металлическом цилиндре с узкой продольной щелью существует низкочастотный резонанс. В таком же цилиндре с анизотропной проводимостью вдоль винтовых линий этот резонанс приобретает свойство киральности, в связи с чем решетки из таких рассеивателей обладают селективностью по отношению к знаку вращения круговой поляризации.

Кроме того, известно, что если цилиндрический рассеиватель проявляет резонансные свойства, то эти резонансы связаны с вытекающими волнами, что дает возможность использовать такие объекты в антенных приложениях.

Математический аппарат решения рассматриваемых задач дифракции.

Методология решения задач дифракции на объектах с анизотропной проводимостью поверхности состоит в использовании приближенных граничных условий, метода интегральных уравнений и вариационного аппарата.

Приближенные граничные условия не учитывают локальную структуру поля на границе раздела двух сред. Возможность использования таких усредненных условий возникает тогда, когда размеры области, в которой происходят значительные изменения электромагнитного поля, много меньше всех линейных размеров, участвующих в задаче, а именно длины волны, радиуса кривизны поверхности, радиуса кривизны фронта падающей волны, расстояния, на котором свойства среды заметно меняются, и т.д.

Примером усредненных граничных условий являются условия Леонтовича в теории скин-эффекта [1] для случая падения волны на металлическую поверхность. Амплитуда волны в металле спадает экспоненциально. Величина, которая характеризует скорость убывания амплитуды, называется толщиной скин-слоя. Внутри скин-слоя существует соотношение между тангенциальными компонентами полей \vec{E} и \vec{H} :

$$E_x = wH_y, E_y = -wH_x \quad (1)$$

где $w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ - волновое сопротивление металла, ось z направлена в металл. Это соотношение справедливо и на самой границе раздела, а так же на внешней границе раздела, поскольку компоненты поля в (1) непрерывны при переходе через эту границу. В случае идеальной проводимости металла ε является бесконечно большой мнимой величиной, в результате чего $w=0$, и электрическое поле на поверхности равно нулю.

Формула (1) является примером *импедансных граничных условий* [2], связывающих компоненты электромагнитного поля на границе раздела двух сред. Аналогичные условия можно записать и для тонкого диэлектрического слоя на поверхности металла.

Поверхностный импеданс скин-слоя и диэлектрического слоя на поверхности металла является изотропным: для двух возможных направлений поляризации он отличается только знаком. Существует также класс поверхностей, для которых импедансные граничные условия различны в разных тангенциальных направлениях. Примером такой поверхности является периодическая металлическая гребенчатая структура (гофра), канавки которой заполнены материалом с большой диэлектрической проницаемостью. Если период структуры много меньше длины волны, то можно пользоваться усредненными значениями для компонент электромагнитного поля, при этом

$$E_y = 0, E_x = wH_y \quad (2)$$

где ось y направлена вдоль гофры. Если канавки имеют четвертьволновую глубину [3], то

$$E_y = H_y = 0. \quad (3)$$

Граничные условия, в которых проводимость в различных направлениях характеризуется разными значениями w , называются *анизотропными импедансными условиями*. Так, например, условия (2) означают, что в направлении y поверхность имеет идеальную, а в направлении x - конечную электрическую проводимость. Выражение (3) является так же условием идеальной магнитной проводимости в заданном направлении. Оно называется условием *смешанной анизотропной проводимости* (электрической и магнитной). Условия (1), (2) и (3) являются односторонними и позволяют независимо рассматривать поле по обе стороны границы раздела.

Усредненные граничные условия для частопериодической решетки идеально проводящих проводов, впервые предложенные Владимирским, можно записать в виде

$$E_y^+ = 0, E_y^- = 0, E_x^+ = E_x^-, H_x^+ = H_x^-, \quad (4)$$

где ось y направлена вдоль проводов решетки. Индексы "+" и "-" относятся к разным сторонам решетки. Условия (4) означают, что в плоскости решетки токи в направлении x не текут. Такие условия принято называть *условиями анизотропной проводимости*. Первые два уравнения в (4) имеют вид импедансных граничных условий, аналогичных (1) для случая идеальной проводимости металла, а третье и четвертое условия связывают между собой

тангенциальные компоненты полей по разные стороны решетки. Таким образом, граничные условия Владимирского требуют совместно рассматривать поле по разные стороны границы раздела.

В настоящей работе исследуются цилиндрические объекты, поверхность которых представляет собой частопериодическую решетку металлических лент с коэффициентом заполнения, близким к $1/2$. Для описания поля на таких поверхностях используются граничные условия Владимирского (4). Эти условия означают, что рассеянное поле создается только электрическими токами, и, следовательно, его компоненты можно выразить, пользуясь только электрическим вектором Герца:

$$\vec{E}^S = \vec{\Pi}^e + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \vec{\Pi}^e, \quad \vec{H}^S = \frac{i}{k} \text{rot } \vec{\Pi}^e, \quad (5)$$

Задачи являются двумерными, то есть зависимость полей от координаты z задана множителем $\exp(-ihz)$, и электрический вектор Герца удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \vec{\Pi}^{(e)} + \kappa^2 \vec{\Pi}^{(e)} = ik\vec{j}^{(e)}, \quad \kappa = \sqrt{k^2 - h^2}. \quad (6)$$

Компоненты вектора Герца можно выразить через интегралы от поверхностных токов, после чего граничное условие (4) позволяет получить интегродифференциальное уравнение с ядром в виде двумерной функции Грина свободного пространства:

$$G(r, \varphi, r', \varphi') = \frac{i}{4} H_0^{(2)} \left[\kappa \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')} \right] \quad (7)$$

Поскольку поверхности рассматриваемых объектов являются незамкнутыми, полученное уравнение следует дополнить условием обращения в нуль токов на краях этих поверхностей.

Интегродифференциальное уравнение можно решать, используя квазистатическое приближение для функции Грина (7). Однако в некоторых резонансных точках такой метод не позволяет правильно определить амплитуды поверхностных токов, поскольку в квазистатическом приближении мнимая часть функции Грина, посредством которой учитывается мощность, излучаемая поверхностными токами, представляет собой константу. Для того, чтобы правильно учесть рассеянную мощность, следует использовать более точное приближение для функции Грина (7), которое учитывает следующий член разложения ее мнимой части в ряд по степеням малого параметра. Влияние этой малой добавки на решение уравнения можно учесть при помощи вариационного аппарата. Метод состоит в нахождении функционалов от поверхностного тока, стационарных на решениях исходного уравнения, то есть таких функционалов, значения которых не зависят в первом приближении от отклонений поверхностного тока от точных решений интегродифференциального уравнения. Для оценки значений функционала используются пробные функции, полученные в квазистатическом приближении, и уточненное выражение для функции Грина, что позволяет получить правильные выражения для амплитуд поверхностных токов и рассеянной мощности в общем случае.

Обзор близких по тематике работ.

Анизотропно проводящие поверхности широко используются на практике для создания антенн, волноводов и замедляющих структур. Так, например, гофрирование стенок волновода в некоторых случаях позволяет снять нежелательное вырождение системы собственных волн, в частности, в круглом волноводе [4]. Замедление волн гофрированной поверхностью применяется в электронике для достижения взаимодействия с электронным потоком. Применяется также гофрирование стенок рупорной антенны [5], [6], [7]. Одним из полезных свойств импедансных покрытий, реализованных на основе гребенчатых структур, является трансформация пространственного поля в поверхностные волны [8].

Широкое применение на практике имеет микрополосковая антенна (см. [9], [10]), граничные условия на поверхности которой описываются условиями (2). Она состоит из набора металлических лент, нанесенных на диэлектрическую плату, которая, в свою очередь, располагается на металлическом экране. Большое значение микрополосковые антенны имеют для создания фазированных антенных решеток, то есть антенн с электронным управлением диаграммой направленности [11]. Существуют варианты многослойных антенн. Микрополосковые структуры используются так же для создания частотно-селективных устройств (фильтров, амплитудных и фазовых корректоров).

Различные виды решеток из металлических лент широко применяются в микроволновой технике и к настоящему времени подробно исследованы (см., например, [12]). Как известно, представление о том, что формулы (4) описывают решетки из проводящих лент, требует уточнений, поскольку эти формулы не учитывают влияния формы проводников и коэффициента заполнения на структуру поля в примыкающей к решетке области, размеры которой малы по сравнению с длиной волны. Учет этих факторов позволяет более точно моделировать поверхности с анизотропной проводимостью. В [13] и [14] приведены значения оптимальных коэффициентов заполнения решетки соответственно для случаев ленточных и круглых проводников. Они обеспечивают одновременно малость отражения волны, электрический вектор которой перпендикулярен к проводам решетки, и прохождения волны, электрический вектор которой им параллелен. Кроме этого, подбором коэффициента заполнения можно совместить эквивалентную плоскость отражения с плоскостью симметрии решетки. Для проводников круглого сечения вычисление такого коэффициента заполнения проведено в [15], [16]. В [17] исследованы решетки из симметричных двойных лент и определены оптимальные параметры для выполнения условий (4). Рассмотрены также задачи дифракции и рассчитаны коэффициенты прохождения плоских волн для решеток из толстых лент [18], наклонных лент [19] и др. Обзор работ, связанных с реализацией импедансных поверхностей и изучением границ применимости условий (2), (3) сделан в [20].

Теоретическое и экспериментальное исследование фазовых характеристик толстых проводящих решеток проведено в [21], исследована зависимость фазы коэффициента отражения от частоты и угла падения. Показано, что в зависимости от сечения проводников можно подобрать периодичность решетки таким образом, что фазы коэффициентов прохождения

и отражения остаются постоянными в широком диапазоне частот. Угловая зависимость коэффициентов прохождения и отражения в этом диапазоне частот так же исчезает.

В [22] рассмотрена задача дифракции волны на полуплоскости с анизотропным импедансом поверхности. Предполагается, что полуплоскость является идеально проводящей в одном направлении и имеет конечную проводимость в перпендикулярном направлении. При нормальном падении анизотропия не влияет на рассеяние и решение не отличается от решения для задачи дифракции на металлической полуплоскости [23], но для случая произвольного угла падения волны возможно изменение поляризации в рассеянном поле. В [24] задача дифракции на анизотропно проводящей полуплоскости обобщена на случай произвольного выбора направлений анизотропной проводимости и наклонного падения плоской волны.

Большое количество работ посвящено задаче дифракции волн на клине, на гранях которого выполняются условия анизотропного поверхностного импеданса (см., например, [25], [26], [27]).

В [28] численно исследованы волноведущие свойства цилиндра, направление анизотропной проводимости которого параллельно его оси. В [29], [30] исследована задача дифракции на цилиндре с гофрированной поверхностью, на которой выполняются условия анизотропного импеданса (2): рассмотрены случаи, когда направление гофры параллельно и перпендикулярно оси цилиндра. В [31] рассмотрена задача возбуждения кругового цилиндра с анизотропным импедансом продольным электрическим диполем.

Широкий круг задач возникает при рассмотрении электродинамических свойств поверхностей, на которых линии проводимости не могут быть совмещены со своими зеркальными отражениями (свойство киральности). При этом соответствующие тела по-разному взаимодействуют с волнами левой и правой круговой поляризации, что дает возможность использовать тела с анизотропной проводимостью поверхности для создания сред с пространственной дисперсией (киральные среды) [32], [33]. Искусственные электромагнитные среды образуются из киральных элементов, размеры которых много меньше длины волны. Такая среда может представлять собой либо упорядоченную структуру в виде пространственной решетки, либо хаотическую смесь киральных элементов с диэлектриком. В оптике с пространственной дисперсией связано явление, которое называется оптической активностью. Оптическая активность в естественных средах не нашла широкого применения из-за малости эффекта, что связано с малостью размеров молекул по сравнению с длиной оптической волны. Размеры молекул органических веществ значительно больше, но полимеры слабо прозрачны для оптических волн. Возможности искусственных киральных сред в сантиметровом и миллиметровом диапазоне волн значительно шире, поскольку искусственные элементы могут обладать сложной структурой и поддерживать низкочастотные резонансы токов. В этом случае киральность уже не является малой поправкой, и свойства киральной среды могут значительно отличаться от свойств некиральной среды не только за счет накопления малого эффекта, как в явлении оптической активности. Поэтому искусственные киральные среды могут быть не только "трехмерными", но и тонкими по сравнению с длиной волны.

Развитие электродинамики киральных объектов и сред проводится очень активно. В настоящее время существуют два основных направления исследований в области электромагнитной киральности: исследования киральных свойств объектов как элементов искусственных структурных сред и решение задач о поведении электромагнитных полей и волн в киральных и более общих (биизотропных, бианизотропных) средах в предположении, что материальные уравнения для них известны. Основные положения и теоремы электродинамики киральных сред, включая уравнения Максвелла, принцип Гюйгенса, теорема взаимности, и т.д., сформулированы как обобщение известных положений теории некиральных сред [34], однако их применение в конкретных задачах при исследовании объектов и технических устройств еще не освоено.

Макроскопическая теория, приводящая к материальным уравнениям киральной среды в оптике, полностью разработана (см., например, [35]). В радиодиапазоне эта задача формулируется несколько иначе, она состоит в вычислении коэффициентов поляризуемости малых тел сложной структуры, то есть в решении задач дифракции [36]. Эти задачи решены лишь для нескольких киральных элементов: для маленьких металлических спиралей [37], [38], разомкнутых колечек с выступающими концами [39] (омега-среды), сфер с винтовой электрической проводимостью [40], [41]. В качестве кирального элемента также упоминается лента Мебиуса [42].

Наиболее интересная особенность омега-сред состоит в том, что в них волновые сопротивления плоских волн могут отличаться при распространении в различных направлениях. На этой основе оказывается возможным подбор параметров слоя такой среды, обеспечивающий согласование границы слоя с окружающим пространством при нормальном падении поля, и, как следствие, создание поглотителей энергии падающей электромагнитной волны [43].

В работе [44] исследована задача возбуждения магнитодиэлектрического шара с электрической проводимостью поверхности вдоль линий спирального типа в случае, когда диполь помещен на оси симметрии и ориентирован вдоль нее. Обнаружены низкочастотные резонансы и определены параметры шара, при котором излучаемое поле имеет круговую поляризацию. В [45], [46] исследованы сферические частицы с идеальной смешанной проводимостью вдоль винтовых линий. Показано, что такие частицы могут использоваться в качестве элементов для создания биизотропной среды.

Решетки, состоящие из длинных тонких киральных цилиндров, описаны в [47]. В обзоре [48], изложены результаты исследований киральных объектов в виде круговых цилиндров с анизотропной проводимостью малого по сравнению с длиной волны радиуса, решеток из них и каскадов таких решеток. Рассматриваются цилиндры, обладающие электрической и магнитной проводимостью вдоль винтовых линий, и цилиндры только с электрической проводимостью вдоль тех же линий. В этих структурах обнаружены сильные поляризационно-селективные явления, обуславливающие их фильтрующие и гиротропные свойства. Показано, что киральные эффекты могут проявляться в таких структурах, даже если их размеры малы по сравнению с длиной волны.

В работе [49] приведены результаты исследования волн, направляемых цилиндром со смешанной проводимостью вдоль винтовых линий, а в [50], [51] исследованы задачи дифракции плоской волны на таком цилиндре. Задача о

нормальном падении плоской волны на решетку из цилиндров со смешанной проводимостью вдоль винтовых линий рассмотрена в [52]. Показано, что такая решетка может являться эффективным поляризационным фильтром, поскольку резонансные явления проявляются только для волны одного из направлений круговой поляризации. Резонанс проявляется как в полном прохождении, так и в полном отражении от решетки. Волна противоположного направления вращения поляризации имеет почти полное прохождение во всем диапазоне частот.

В большей части работ по теории винтовых анизотропно проводящих поверхностей используют формулы (4), поскольку уточненные граничные условия приводят к сложным выкладкам. Модель в виде цилиндра с электрической проводимостью вдоль винтовых линий хорошо описывает диэлектрические стержни с однозаходной либо многозаходной проволочной намоткой (винтовые спирали), если расстояние между осями соседних проводников много меньше длины волны, а величины зазоров лежат в определенном интервале. Проводники предполагаются тонкими по сравнению с радиусом цилиндра. Адекватность модели анизотропной проводимости поверхности реальным проволочным объектам подробно обоснована и подтверждена экспериментально в [53] и следует, в частности, из теоретических результатов работы [54].

Цилиндрические проволочные объекты используются в качестве замедляющих структур [55] и в качестве антенн вытекающих волн [56], [57]. Известны исследования замедления волн на полой винтовой спирали [58] и винтовой спирали с магнитодиэлектрическим заполнением [59]. Обнаружено, что направляемые ими круго-поляризованные волны противоположных знаков вращения поляризации принципиально различны. В отличие от волноводов, заполненных киральной средой, в винтовых спиральных это различие обязано проводимости поверхности. В [60] предложен метод исследования киральных волноводов, который пригоден для исследования винтовых спиралей, проводники которой являются толстыми, а также для круглых металлических волноводов с гофрированными стенками вдоль винтовых линий. Медленные волны в волноводах с винтовой проводимостью поверхности широко используются для осуществления взаимодействия с электронным пучком, например, в лампах бегущей волны [61].

Рассеяние волн одиночным круговым цилиндром, образованным анизотропной поверхностью, идеально проводящей вдоль винтовых линий, впервые было исследовано численно в [62]. В работах [63], [64] эта задача была исследована аналитически. В [65], [66] рассмотрена аналогичная задача для цилиндра с магнитодиэлектрическим заполнением. Определены резонансы такого стержня и изучено влияние диэлектрических потерь и поляризации источника излучения на величины поглощения и рассеяния. Обнаружено, что при низких частотах ($ka \ll 1$) имеют место резонансные явления, которые проявляют себя, в частности, в резком увеличении поперечника рассеяния, о которых докладывалось в [67]. Показано, что эти резонансы связаны с наличием слабо вытекающих волн в винтовой спирали [58]. Особенностью рассматриваемых объектов является то, что эти резонансы возникают только при определенном знаке вращения плоскости поляризации падающей волны. Описанные низкочастотные резонансы отличаются от известного резонанса Гельмгольца (см., например, [68]) необычной структурой поля и высокой

добротностью. В [69] описана антенна, созданная на основе решетки из цилиндров с двузаходной намоткой, с углом подъема винтовых линий равным 4° .

Сложные поляризационные явления могут возникать в решетках из полых цилиндров с анизотропной проводимостью поверхности, в результате чего они могут служить в качестве преобразователей поляризации различных типов. Математический аппарат расчета таких решеток изложен в [70], [71]. Подробно решение задачи о нормальном падении плоской волны на решетку изложено в [72]. При определенных параметрах решетки прошедшее и отраженное поля имеют круговую поляризацию и сохраняют направление вращения падающей волны, при этом подбором параметров можно достичь полного отражения волны одной поляризации и частичного прохождения волны противоположной поляризации [73].

Параметры решетки можно подобрать так, что при падении на решетку линейно поляризованной волны образуется пара круго-поляризованных волн, причем прошедшее и отраженное поля имеют противоположные направления вращения поляризации [74]. Возможно также преобразование круго-поляризованных волн в линейно-поляризованные [75], [76], [77], причем плоскости поляризации в прошедшей и отраженной волне перпендикулярны друг другу. Для таких решеток прошедшее и отраженное поля остаются почти линейно поляризованными в широкой полосе частот. Прошедшая и отраженная мощности для обоих направлений круговой поляризации слабо меняются с частотой и примерно равны друг другу.

В [78] исследовано возбуждение решетки линейно поляризованными волнами, у которых направление плоскости поляризации составляет $\pm 45^\circ$ с осями цилиндров. Определен класс решеток, для которого прошедшее и отраженное поля линейно поляризованы, причем электрический вектор в прошедшей волне оказывается повернутым на 90° , а электрический вектор отраженной волны сохраняет ориентацию падающего поля. При определенных условиях возникают эффекты полного внутреннего отражения и прохождения. Рассмотрено два вида решеток: со смешанной проводимостью вдоль винтовых линий и только с электрической проводимостью.

Каскады решеток также имеют ряд интересных свойств. В [79], [80] решетки находятся в параллельных плоскостях и развернуты друг относительно друга на некоторый угол. Структура обладает идеальными гиротропными свойствами, то есть без энергетических потерь преобразует волну линейной поляризации с любой ориентацией вектора электрического поля в линейно поляризованную волну с повернутым на заданный угол вектором электрического поля. Каскад решеток так же обладает возможностью идеальной фильтрации волн круговой поляризации.

Незамкнутым цилиндрическим объектам с анизотропной проводимостью поверхности, какие рассматриваются в настоящей работе, посвящено относительно мало статей. В [81] были обнаружены эффекты полного прохождения и отражения для решеток из лент, проводимость которых является анизотропной. Направление проводимости каждой ленты составляет некоторый малый угол ψ с ее осью. В интегродифференциальном уравнении для этой задачи используется периодическая функция Грина. В отличие от известных

решеток из металлических лент с изотропной проводимостью, в таких решетках уже в низкочастотной области наблюдаются резонансные эффекты. Это связано с тем, что хотя ширина отдельной ленты много меньше длины падающей волны, при малых значениях угла ψ длина линии проводимости становится сравнимой с длиной волны. В работе [82] рассмотрена задача о произвольном падении плоской волны на решетку из анизотропно проводящих лент.

В [83], [84] анизотропно проводящая лента была предложена и исследована в качестве замедляющей системы. Было получено интегральное уравнение для собственных токов, а в случае узкой ленты получено аналитическое решение. В работе [85] изучены свойства комплексных волн ленты. Обнаружено, что лента может поддерживать прямые и обратные слабо вытекающие волны с малым уровнем радиационных потерь.

Анизотропно проводящий цилиндр с узкой продольной щелью является новым электродинамическим объектом. Известно решение задачи рассеяния на аналогичном металлическом объекте [68], а также исследование его волноведущих свойств [86].

Краткое содержание диссертации

В первой главе рассматривается задача дифракции плоской волны на ленте с анизотропной проводимостью. Лента имеет бесконечную протяженность, направление идеальной проводимости составляет малый угол с осью ленты. Падающая плоская волна распространяется в произвольном направлении. Необходимо определить характеристики рассеянного электромагнитного поля, которое создается поверхностными токами, индуцированными на ленте падающей волной.

В работе используется метод, изложенный в [84]. Решение сводится к замене однородного уравнения, полученного в [84] уравнением с правой частью, которая описывает падающую волну. Поперечное волновое число, использованное в [84] в качестве спектрального параметра, в данной задаче является заданным и определяется углом между направлением распространения исходной волны и осью ленты.

В случае узкой ленты (ширина ленты значительно меньше длины волны) становится возможным получить аналитическое решение уравнения. Для этого используется квазистатическое представление для ядра при малых аргументах.

Для рассеивателей, не поглощающих и не выделяющих энергию, справедлива оптическая теорема, которая позволяет выразить полную рассеянную мощность через значение диаграммы рассеяния в направлении распространения падающей волны. Согласно оптической теореме полное сечение рассеяния определяется через фурье-преобразование поверхностного тока.

Полученные выражения для тока и его фурье-преобразования, через которые определяются поля в дальней зоне, содержат резонансный знаменатель. При изменении частоты или угла падения плоской волны этот знаменатель может принимать малые значения, при этом происходят резкие изменения характеристик рассеянного поля. В частности, может наблюдаться значительное увеличение сечения рассеяния. Резонансные явления обусловлены тем, что

лента может поддерживать вытекающие волны с малым уровнем радиационных потерь.

В случае нормального падения волны рассеянное поле не обладает угловой направленностью. Поперечник рассеяния в резонансе оказался порядка длины волны, несмотря на то, что ширина ленты предполагалась малой по сравнению с длиной волны.

Более сложные резонансные явления могут наблюдаться при наклонном падении плоской волны. При определенных углах падения по отношению к оси ленты появляются дополнительные резонансные частоты, причем используемое приближение дает бесконечно большие значения для полного сечения рассеяния в условиях резонанса. Появление бесконечных значений объясняется тем, что мнимая часть ядра, посредством которой учитывается мощность, излучаемая поверхностным током, представляет собой константу. Такая аппроксимация не позволяет учесть излучение нечетных токов.

Чтобы получить конечное решение интегродифференциального уравнения в условиях резонанса, используется вариационный принцип. При этом для мнимой части функции Грина используется более точное представление, которое учитывает квадратичный член разложения функции Бесселя. Используемый функционал является стационарным на решениях интегродифференциального уравнения и однородным, так что нормировка пробных функций не влияет на его значение. В качестве пробных функций используются приближенные решения, которые нормируются так, чтобы они оставались конечными в условиях резонанса.

Анализ уточненных выражений показывает, что в случае наклонного падения рассеянное поле приобретает направленность: $\Phi(\varphi) \approx \sin \varphi$. В случае бокового падения волны на ленту полное сечение рассеяния равно $4\lambda/\pi$, что вдвое превосходит значение в резонансе для случая нормального падения волны. Благодаря тому, что рассеянное поле имеет на резонансной частоте угловую направленность, узкие анизотропно проводящие ленты могут быть использованы для создания решеток с нестандартной зависимостью электродинамических характеристик от угла падения плоской волны.

Для экспериментального исследования рассеянного поля ленты удобно использовать понятие радиолокационного сечения рассеяния. Из формул, полученных в первой главе, следует, что при определенных условиях обратное рассеяние отсутствует (сечение радиолокационного рассеяния равно нулю). Таким образом, резонансные свойства одиночной ленты объясняют эффекты полного отражения и прохождения, обнаруженные в [81] в периодических решетках из узких анизотропно проводящих лент.

Во второй главе изучены свойства нового кирального объекта с анизотропной проводимостью вдоль винтовых линий: цилиндр с узкой продольной щелью. Направление распространения падающей волны лежит в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, азимутальный угол является произвольным. Установлена связь между углом подъема винтовых линий проводимости и угловой шириной щели, при которой рассеянное поле имеет круговую поляризацию. Обнаружен низкочастотный поляризационно-селективный резонанс, приводящий к сильному рассеянию для волны одной круговой поляризации.

Метод исследования заключается в решении интегродифференциального уравнения, которое получено из граничных условий Владимирского. Ядра уравнения выражаются через двумерную функцию Грина свободного пространства. Условие малости радиуса цилиндра по сравнению с длиной волны $ka \ll 1$ позволяет воспользоваться приближенным выражением для функции Грина. Показано, что решение неоднородного уравнения можно представить в виде суперпозиции трех функций, одна из которых совпадает с решением, полученным в [68] для металлического цилиндра с продольной щелью.

При некоторых условиях соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение, при этом собственная функция и частота в рамках используемого приближения также совпадают с решением для металлического цилиндра. Однако используемое квазистатическое приближение не позволяет определить мнимую часть собственной частоты, которая характеризует добротность резонансного колебания. Для уточнения мнимой части используется вариационный принцип, при этом в качестве пробной функции используется решение неоднородного уравнения с произвольными коэффициентами A_1, A_2, A_3 для входящих в него функций. Для этих коэффициентов получена и решена линейная система алгебраических уравнений.

Анализ полученного решения показывает, что зависимость амплитуды A_1 от частоты имеет резонансный характер. При малых углах подъема линий проводимости резонансная частота близка к частоте собственных колебаний металлического цилиндра с узкой щелью. В этом случае в условиях резонанса рассеянное поле обладает круговой диаграммой направленности. На резонансной частоте полное сечение рассеяния для волн левой и правой круговой поляризации значительно различаются, что позволяет использовать рассмотренный анизотропно проводящий цилиндр для создания электродинамических структур с киральными свойствами.

Анализ выражения для поперечника обратного рассеяния показывает, что при определенных условиях на резонансной частоте сечение радиолокационного рассеяния не зависит от направления поляризации.

В третьей главе рассматриваются волноведущие свойства анизотропно проводящего цилиндра с продольной щелью. Распространение волн в аналогичном металлическом волноводе исследовано в [86]. Задача о медленных волнах в цилиндрических системах состоит в нахождении решений однородных уравнений Максвелла с зависимостью от координаты z в виде $\exp(-ihz)$. Поля направляемых волн должны удовлетворять условиям Владимирского и на радиальной бесконечности иметь характер цилиндрической волны с поперечным волновым числом k . На кромках ленты ток должен обращаться в нуль.

Из граничных условий Владимирского вытекает интегродифференциальное уравнение для поверхностного тока. Спектральный параметр h сложным образом входит в это уравнение, так как его ядро зависит от поперечного волнового числа k . Для решения уравнения используется квазистатическое приближение.

Полученное уравнение можно применять и к замкнутому цилиндру, если вместо условия обращения в нуль токов на краях ленты потребовать их периодичности. Из того же уравнения предельным переходом можно получить интегродифференциальное уравнение для собственных токов анизотропно проводящей ленты. Таким образом, предельные случаи уравнения приводят к известным результатам.

Полученное решение в виде дисперсионного уравнения правильно описывает свойства квазистатических волн, у которых в разложении доминирует фурье-гармоника с индексом $m=0$. В работе показано, что низкочастотный резонанс, возникающий при рассеянии плоской волны на анизотропно проводящем цилиндре со щелью, связан со свойствами направляемых им волн.

При условии, что щель узкая, дисперсионное уравнение имеет решение, которое соответствует медленной волне. В [86] показано, что в металлическом цилиндре с узкой продольной щелью в той же области частот существует квазистатическая вытекающая щелевая волна. Медленных волн в металлическом цилиндре нет. Видно, что свойства анизотропно проводящего и металлического цилиндров существенно различаются.

Достоверность полученных результатов

В целях экспериментальной проверки сделанных теоретических выводов в ИРЭ РАН были проведены измерения обратного сечения рассеяния от ленты с анизотропной проводимостью [80] и анизотропно проводящего цилиндра с продольной щелью [87] на специально изготовленных макетах. Установка для измерений и метод эксперимента подробно описаны в [88]. Результаты эксперимента хорошо согласуются с выводами теории, из чего следует, что модели анизотропно проводящей ленты и анизотропно проводящего кругового цилиндра с продольной щелью, использующие граничные условия Владимирского, правильно передают все основные черты резонансных явлений, наблюдаемых при рассеянии на реальных физических объектах. Таким образом, граничные условия Владимирского являются адекватными для постановки задач рассеяния на незамкнутых цилиндрических объектах с анизотропной проводимостью поверхности.

Глава 1. Резонансное рассеяние электромагнитных волн на узкой анизотропно проводящей ленте.

1.1. Постановка задачи

Рассматривается задача дифракции плоской волны на ленте с анизотропной проводимостью (см. рис. 1.1). Лента расположена в плоскости $x = 0$, имеет ширину $2a$ и бесконечную протяженность по оси z . Единичный вектор $\tau = \{0, \sin \psi, \cos \psi\}$ указывает направление, в котором лента имеет идеальную проводимость. Падающая плоская волна распространяется в направлении, которое определяется углами θ_0, φ_0 . Электрическое поле этой волны записывается в виде

$$\vec{E}_0 = \vec{n} \exp[-i\kappa r \cos(\varphi - \varphi_0) - ihz], \quad (1.1.1)$$

где $\kappa = k \sin \theta_0$, $h = k \cos \theta_0$, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число в свободном пространстве. Вектор \vec{n} определяет поляризацию волны. Выбором поляризации волны можно менять степень взаимодействия падающей волны с лентой, поскольку для компоненты электрического вектора, направленной перпендикулярно направлению идеальной проводимости, взаимодействие отсутствует.

Необходимо определить характеристики рассеянного электромагнитного поля \vec{E}^s, \vec{H}^s . Это поле создается поверхностными токами, индуцированными на ленте полем \vec{E}^0 , оно удовлетворяет уравнениям Максвелла и имеет на радиальной бесконечности характер расходящейся цилиндрической волны [89]. Так, например:

$$E_z^s \approx \frac{\Phi_z^E(\varphi)}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-i\kappa r - ihz), \quad H_z^s \approx \frac{\Phi_z^H(\varphi)}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-i\kappa r - ihz). \quad (1.1.2)$$

Аналогичную асимптотику имеют при $\kappa r \rightarrow \infty$ компоненты $E_\varphi^s, E_r^s, H_\varphi^s, H_r^s$; соответствующие диаграммы направленности будем обозначать через $\Phi_\varphi^E, \Phi_r^E, \Phi_\varphi^H, \Phi_r^H$. На ленте ($x = 0, |y| < a$) полное поле $\vec{E}^0 + \vec{E}^s, \vec{H}^0 + \vec{H}^s$ должно удовлетворять граничным условиям Владимирского [3]:

$$E_y^+ = E_y^-, \quad E_z^+ = E_z^-, \quad (1.1.3)$$

$$E_z \cos \psi + E_y \sin \psi = 0, \quad (1.1.4)$$

$$(H_z^+ - H_z^-) \cos \psi + (H_y^+ - H_y^-) \sin \psi = 0 \quad (1.1.5)$$

где верхние индексы обозначают сторону ленты. В системе координат (\vec{r}, \vec{r}) эти условия имеют вид

$$E_{\vec{r}}^+ = E_{\vec{r}}^- = 0, E_t^+ = E_t^-, H_t^+ = H_t^-. \quad (1.1.6)$$

Из граничных условий Владимирского следует, что объемную плотность электрического тока можно представить в виде

$$\begin{aligned} j_x(x, y, z) &= 0, \\ j_y(x, y, z) &= \sin \psi f(y) \delta(x) \exp(-ihz), \\ j_z(x, y, z) &= \cos \psi f(y) \delta(x) \exp(-ihz) \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

где $f(y)$ – функция, определенная на интервале $(-a, a)$, $\delta(x)$ – функция Дирака. Для функции $f(y)$ получим интегральное уравнение.

1.2. Интегродифференциальное уравнение для поверхностного тока.

Так как электрические токи, возбуждающие рассеянное поле, направлены вдоль \vec{r} , то это поле определяется электрическим вектором Герца $\vec{\Pi}^e$ [3], имеющим единственную отличную от нуля компоненту:

$$\vec{\Pi}_{\vec{r}}^e = U(x, y) \exp(-ihz) \quad (1.2.1)$$

Электромагнитное поле выражается через вектор Герца по известным формулам

$$\vec{E}^S = \vec{\Pi}^e + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \vec{\Pi}^e, \quad \vec{H}^S = \frac{i}{k} \text{rot } \vec{\Pi}^e, \quad (1.2.2)$$

и в частности для компонент поля имеем

$$E_z^S = \Pi_z - \frac{ih}{k^2} \left(\frac{\partial \Pi_y}{\partial y} - ih \Pi_z \right), \quad (1.2.3)$$

$$E_y^S = \Pi_y + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Pi_y}{\partial y} - ih \Pi_z \right). \quad (1.2.4)$$

Функция $U(x, y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца [89]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \kappa^2 U = f(y) \delta(x), \quad (1.2.5)$$

условиям излучения

$$U \approx \frac{\Phi(\varphi)}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-i\kappa r), \quad \kappa r \rightarrow \infty, \quad (1.2.6)$$

и может быть представлена в виде

$$U(x, y) = \frac{i}{4} \int_{-a}^a f\left(\frac{y'}{a}\right) H_0^{(2)} \left[\kappa \sqrt{x^2 + (y - y')^2} \right] d\left(\frac{y'}{a}\right), \quad (1.2.7)$$

где $f(\xi)$ – плотность поверхностного тока на ленте. На краях ленты ток должен обращаться в нуль:

$$f(\pm 1) = 0 \quad (1.2.8)$$

Записывая условие (1.2.1) в координатах (x, y, z) , получаем

$$\begin{aligned} \Pi_x &= 0, \\ \Pi_y &= U(x, y) \exp(-ihz) \sin \psi, \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

$$\Pi_z = U(x, y) \exp(-ihz) \cos \psi.$$

Подставляя (1.2.9) в выражения (1.2.3) - (1.2.4) и опуская везде далее множитель $\exp(-ihz)$, имеем

$$E_z^S = \cos \psi \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \right) U - \sin \psi \frac{ih}{k^2} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (1.2.10)$$

$$E_y^S = \sin \psi \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U - \cos \psi \frac{ih}{k^2} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (1.2.11)$$

Выражения (1.2.10) - (1.2.11) определяют компоненты рассеянного электрического поля во всем пространстве. Граничное условие на ленте, т. е. при $x = 0$, $|y| < a$, $E_r^S = -E_r^0$, в развернутой записи выглядит так:

$$E_z^S \cos \psi + E_y^S \sin \psi + E_r^0 = 0. \quad (1.2.12)$$

С учетом (1.1.1) и (1.2.10)-(1.2.11) оно приводит к интегро-дифференциальному уравнению для тока:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sin^2 \psi}{k^2} \frac{d^2}{dy^2} - \frac{2ih}{k^2} \sin \psi \cos \psi \frac{d}{dy} + \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \cos^2 \psi \right) \right] U + \\ + n_r \exp(-iky \sin \varphi_0) = 0 \end{aligned}$$

или с учетом (1.2.7)

$$\left(\frac{d}{d\xi} - iu \right) \left(\frac{d}{d\xi} - iv \right) \int_{-1}^1 G(\xi, \xi') f(\xi') d\xi' = -\frac{1}{4} n_r (u - v)^2 \exp(iw\xi), \quad (1.2.13)$$

где

$$u = \frac{ka}{\sin \psi} \left(\frac{h}{k} \cos \psi + 1 \right), \quad v = \frac{ka}{\sin \psi} \left(\frac{h}{k} \cos \psi - 1 \right), \quad w = -ka \sin \varphi_0, \quad (1.2.14)$$

$$G(\xi, \xi') = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(\kappa a |\xi - \xi'|) \quad (1.2.15)$$

Чтобы подчеркнуть зависимость плотности поверхностного тока от параметров задачи u , v , w , будем решение уравнения (1.2.13), удовлетворяющее условию (1.2.8), обозначать так же $f(\xi, u, v, w)$.

1.3. Поле в дальней зоне

Введем функцию $F(s, u, v, w)$ как фурье-преобразование поверхностного тока:

$$F(s, u, v, w) = \int_{-1}^1 f(\xi, u, v, w) \exp(is\xi) d\xi \quad (1.3.1)$$

Для определения поля в дальней зоне выразим компоненты электрического вектора Герца в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_r &= \Pi_x \cos \varphi + \Pi_y \sin \varphi = \sin \psi \sin \varphi V(r, \varphi) \exp(-ihz), \\ \Pi_\varphi &= -\Pi_x \sin \varphi + \Pi_y \cos \varphi = \sin \psi \cos \varphi V(r, \varphi) \exp(-ihz), \\ \Pi_z &= \cos \varphi V(r, \varphi) \exp(-ihz), \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где

$$V(r, \varphi) = U(r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (1.3.3)$$

В дальней зоне функция $V(r, \varphi)$ имеет вид расходящейся цилиндрической волны

$$V(r, \varphi) \approx \Phi(\varphi) \frac{\exp(-ihz - i\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}}. \quad (1.3.4)$$

Аналогичные представления имеют место для поперечных компонент электрического поля:

$$\begin{aligned} E_z^S &\approx \Phi_z(\varphi) \frac{\exp(-ihz - i\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}}, \\ E_\varphi^S &\approx \Phi_\varphi(\varphi) \frac{\exp(-ihz - i\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Полагая в (1.2.7) $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, и используя асимптотику функции Ханкеля

$$H_0^{(2)}(\kappa r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \frac{i\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-i\kappa r), \quad \kappa r \rightarrow \infty,$$

получим:

$$V(r, \varphi) \approx -\frac{1}{2\sqrt{2\pi\kappa r}} \exp\left[-i\left(\kappa r + \frac{\pi}{4}\right)\right] \int_{-1}^1 \exp(i\kappa\xi \sin\varphi) f(\xi) d\xi,$$

что при сравнении с (1.3.4) дает

$$\Phi(\varphi) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \int_{-1}^1 \exp(i\kappa\xi \sin\varphi) f(\xi) d\xi. \quad (1.3.6)$$

Из (1.3.6) с учетом (3.1) имеем

$$\Phi(\varphi) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) F(\kappa a \sin\varphi, u, v, w). \quad (1.3.7)$$

Выразим диаграммы рассеяния отдельных компонент электромагнитного поля через функцию $\Phi(\varphi)$. Из формул (1.2.2), примененных к полям в дальней зоне, следует

$$E_z^S = \Pi_z - \frac{ih}{k^2} \left(\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \Pi_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial \varphi} - ih \Pi_z \right),$$

$$E_\varphi^S = \Pi_\varphi + \frac{1}{k^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \Pi_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial \varphi} - ih \Pi_z \right). \quad (1.3.8)$$

Подставляя в (1.3.8) выражения (1.3.2), используем асимптотические представления (1.3.4), (1.3.5) при $\kappa r \rightarrow \infty$. Приравнявая коэффициенты при старшем порядке по степеням κr , получим:

$$\Phi_z^E(\varphi) = \frac{\kappa}{k} \left(\frac{\kappa}{k} \cos\psi - \frac{h}{k} \sin\psi \sin\varphi \right) \Phi(\varphi), \quad (1.3.9)$$

$$\Phi_z^H(\varphi) = \frac{\kappa}{k} \sin\psi \cos\varphi \Phi(\varphi), \quad (1.3.10)$$

$$\Phi_\varphi^E = \frac{k}{\kappa} \Phi_z^H, \quad \Phi_r^E = -\frac{h}{k} \Phi_z^E, \quad \Phi_\varphi^H = -\frac{k}{\kappa} \Phi_z^E, \quad \Phi_r^H = -\frac{h}{k} \Phi_z^H \quad (1.3.11)$$

Таким образом, векторная диаграмма рассеяния полностью определяется фурье-преобразованием поверхностного тока.

1.4. Полное сечение рассеяния

Рассчитаем интеграл по окружности бесконечно большого радиуса от радиального потока рассеянной мощности. Для рассеивателей, не поглощающих и не выделяющих энергию, справедлива оптическая теорема [90], которая позволяет выразить полную рассеянную мощность через значение диаграммы рассеяния в направлении распространения падающей волны. Для цилиндрических рассеивателей оптическую теорему можно записать в

следующей форме. Пусть компоненты E_z^0 и H_z^0 в падающей плоской волне имеют вид:

$$\begin{aligned} E_z^0 &= A_E \exp[-i\kappa r \cos(\varphi - \varphi_0) - ihz], \\ H_z^0 &= A_H \exp[-i\kappa r \cos(\varphi - \varphi_0) - ihz]. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left[|\Phi_z^E(\varphi)|^2 + |\Phi_z^H(\varphi)|^2 \right] d\varphi = \\ &= -2\sqrt{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}} \left[A_E^* \Phi_z^E(\varphi_0) + A_H^* \Phi_z^H(\varphi_0) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Соотношение (1.4.2) является следствием закона сохранения энергии (см. прил. 1). В [90] приводится аналогичное соотношение для двумерной скалярной задачи в случае плоских экранов. Величина σ , определенная согласно формуле

$$\kappa\sigma = \frac{\int_0^{2\pi} \left(|\Phi_z^E|^2 + |\Phi_z^H|^2 \right) d\varphi}{|A_E|^2 + |A_H|^2} \quad (1.4.3)$$

называется полным сечением рассеяния и представляет собой отношение усредненного по времени полного потока энергии излучения, рассеянного на препятствии, к плотности потока энергии в падающей волне. В трехмерном случае оптическая теорема имеет следующую формулировку: для определения поперечного сечения рассеяния можно вместо интегрирования квадрата абсолютной величины поля в дальней зоне по всем направлениям взять мнимую часть амплитуды поля, наблюдаемой за препятствием в направлении распространения падающей волны, умножив ее на 4π . Это соотношение имеет значение и для экспериментального определения величины σ . В случае плоской волны величина σ/S' называется коэффициентом рассеяния, где через S' обозначена проекция рассеивающего тела на плоскость, перпендикулярную направлению распространения падающей волны. Таким образом, коэффициент рассеяния равен отношению усредненного по времени полного потока энергии излучения, рассеянного телом, к потоку энергии, падающей на тело согласно геометрической оптике. Полное сечение рассеяния является величиной, характерной для данного рассеивающего тела и легко поддающейся измерению.

Если падающая плоская волна задана числами A_E и A_H (см. (1.4.1)), то остальные компоненты поля выражаются по известным формулам для цилиндрических волн [3], в частности:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{k^2 - h^2} \left(-ih \frac{\partial E_z}{\partial x} - ik \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= \frac{1}{k^2 - h^2} \left(-ih \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Выполняя операции дифференцирования, получаем

$$E_x = \frac{1}{\kappa} (-hA_E \cos \varphi_0 - kA_H \sin \varphi_0) \exp[-i\kappa \cos(\varphi - \varphi_0) - ihz]$$

$$E_y = \frac{1}{\kappa} (-hA_E \sin \varphi_0 + kA_H \cos \varphi_0) \exp[-i\kappa \cos(\varphi - \varphi_0) - ihz]$$

В результате вектор \vec{n} , определяющий электрическое поле падающей волны (см. (1.1.1)), имеет компоненты

$$n_x = -\frac{h}{k} \cos \varphi_0 A_E - \frac{k}{\kappa} \sin \varphi_0 A_H,$$

$$n_y = -\frac{h}{k} \sin \varphi_0 A_E + \frac{k}{\kappa} \cos \varphi_0 A_H,$$

$$n_z = A_E,$$

поэтому

$$|\vec{n}|^2 = \frac{k^2}{\kappa^2} (|A_E|^2 + |A_H|^2), \quad (1.4.4)$$

$$n_r = \left(\cos \psi - \frac{h}{\kappa} \sin \varphi_0 \sin \psi \right) A_E + \frac{k}{\kappa} \cos \varphi_0 \sin \psi A_H. \quad (1.4.5)$$

Выражая в (31) Φ_z^E и Φ_z^H через Φ согласно (1.3.9), (1.3.10), и учитывая (1.3.7), (1.4.4), (1.4.5), получим окончательное представление для полного сечения рассеяния

$$\kappa \sigma = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \text{Im} [n_r^* F(-w, u, v, w)]. \quad (1.4.6)$$

Можно показать, что функция $F(s, u, v, w)$ обладает свойствами

$$F(s, u, v, w) = F(s, v, u, w), \quad (1.4.7)$$

$$F(s, u, v, w) = F(w, -u, -v, s). \quad (1.4.8)$$

Формула (1.4.7) следует из того, что замена $u \rightarrow v$, $v \rightarrow u$ в (1.2.13) не изменяет вида уравнения, поэтому $f(\xi, u, v, w) = f(\xi, v, u, w)$. Для доказательства (1.4.8) рассмотрим уравнение (1.2.13) и союзное к нему уравнение, правую часть которого выберем в виде $\exp(is\xi)$:

$$\left(\frac{d}{d\xi} - iu \right) \left(\frac{d}{d\xi} - iv \right) \int_{-1}^1 G(\xi, \xi') f_1(\xi') d\xi' = -\frac{1}{4} n_r (u-v)^2 \exp(iw\xi), \quad (1.4.9)$$

$$\left(\frac{d}{d\xi} + iu \right) \left(\frac{d}{d\xi} + iv \right) \int_{-1}^1 G(\xi, \xi') f_2(\xi') d\xi' = -\frac{1}{4} n_r (u-v)^2 \exp(is\xi). \quad (1.4.10)$$

Очевидно, что решения уравнений (1.4.9) и (1.4.10) связаны формулой

$$f_2(\xi, u, v, s) = f_1(\xi, -u, -v, s). \quad (1.4.11)$$

Преобразуем левую часть уравнения (1.4.9), используя симметричность ядра $G(\xi - \xi')$, формулу интегрирования по частям и условие (1.2.8) обращения в нуль поверхностного тока на краях ленты:

$$4 \left(\frac{d}{d\xi} - iu \right) \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) [f'(\eta) - ivf(\eta)] d\eta = -n_r (u - v)^2 \exp(iw\xi). \quad (1.4.12)$$

Теперь, умножая левую и правую части уравнения (1.4.12) на $f_2(\xi)$, интегрируя в пределах $(-1, 1)$, и в левой части применяя аналогичным образом формулу интегрирования по частям, получим:

$$\begin{aligned} 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) [f_1'(\eta) - ivf_1(\eta)] [f_2'(\xi) + iuf_2(\xi)] d\xi d\eta = \\ = n_r (u - v)^2 \int_{-1}^1 f_2(\xi) \exp(iw\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Точно так же поступая с (1.4.10), получаем:

$$\begin{aligned} 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) [f_1'(\eta) - ivf_1(\eta)] [f_2'(\xi) + iuf_2(\xi)] d\xi d\eta = \\ = n_r (u - v)^2 \int_{-1}^1 f_1(\xi) \exp(is\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Сравнивая левые части (1.4.13) и (1.4.14) находим, что

$$\int_{-1}^1 f_1(\xi) \exp(is\xi) d\xi = \int_{-1}^1 f_2(\xi) \exp(iw\xi) d\xi,$$

из чего следует (1.4.8).

Из (1.4.7) и (1.4.8) следует свойство

$$F(s, u, v, w) = F(w, -v, -u, s). \quad (1.4.15)$$

Учитывая (1.2.14), из (1.4.6) и (1.4.15) заключаем, что при изменении направления распространения падающей волны на противоположное: $\theta_0 \rightarrow \pi - \theta_0$, $\varphi_0 \rightarrow \pi + \varphi_0$ (при этом $u \rightarrow -v$, $v \rightarrow -u$, $w \rightarrow -w$) величина σ не меняется.

1.5. Аналитическое решение для узкой ленты

В случае узкой ленты становится возможным получить аналитическое решение уравнения (1.2.13). Для этого можно использовать разложение функции Ханкеля при малых аргументах. По определению [91]

$$H_0^{(2)}(\eta) = J_0(\eta) - iN_0(\eta). \quad (1.5.1)$$

Если ширина ленты значительно меньше длины волны ($ka \ll 1$), то аргумент функции Ханкеля в (1.2.15) будет малой величиной. Поэтому функцию Неймана, входящую в (1.5.1) можно заменить логарифмом, а функцию Бесселя – единицей. Таким образом, вместо ядра (1.2.15) будем использовать его квазистатическое представление

$$G_0(\xi, \xi') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{i\gamma ka |\xi - \xi'|}{2}, \text{ где } \gamma = 1,78... \quad (1.5.2)$$

Аналитическое решение однородного интегродифференциального уравнения (1.2.13) с ядром (1.5.2) получено в [84]. Методом, использованным в [84], можно также получить аналитическое решение неоднородного уравнения (1.2.13). Будем рассматривать его как дифференциальное уравнение относительно функции $U(0, y)$. Решение уравнения имеет вид

$$U(0, y) + A \exp(iuy/a) + B \exp(ivy/a) + C \exp(iwy/a) = 0, \quad (1.5.3)$$

где A, B, C – произвольные постоянные. Подстановкой $U(0, y) = -C \exp(iwy/a)$ в (1.2.13) найдем C :

$$\begin{aligned} C \frac{\sin^2 \psi}{k^2} \frac{w^2}{a^2} - C \frac{2h}{k^2} \sin \psi \cos \psi \frac{w}{a} - C \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \cos^2 \psi \right) + n_r = 0, \\ C = - \frac{n_r}{\frac{\sin^2 \psi}{k^2} \frac{w^2}{a^2} - \frac{2h}{k^2} \sin \psi \cos \psi \frac{w}{a} - \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \cos^2 \psi \right)} = \\ = - \frac{n_r (u-v)^2}{4[w^2 - w(u+v) + uv]} = - \frac{n_r (u-v)^2}{4(u-w)(v-w)}. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

A и B – некоторые константы для (1.5.3), которые находятся из условия (1.2.8) обращения в нуль поверхностного тока на концах интервала. Введем новые переменные $y = a \cos t$, $y' = a \cos t'$. Функцию Грина (1.5.2) представим в виде [90]

$$G_0(\xi, \xi') = G_t(t, t') = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{4} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt \cos nt'}{n}. \quad (1.5.5)$$

Нужно решить интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} G_t(t, t') f(\cos t) \sin t' dt' + \\ + A \exp(iu \cos t) + B \exp(iv \cos t) + C \exp(iw \cos t) = 0. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Поверхностный ток $f_0(\xi)$ представляется в виде ряда

$$f_0(\cos t) \sin t = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos mt. \quad (1.5.7)$$

Используя разложение [92]

$$\exp(iu \cos t) = J_0(u) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(u) \cos nt,$$

для C_m при $m \geq 1$ получим из (1.5.6)

$$-\frac{C_m}{2m} + 2i^m [AJ_m(u) + BJ_m(v) + CJ_m(w)] = 0,$$

или

$$C_m = 4mi^m [AJ_m(u) + BJ_m(v) + CJ_m(w)]. \quad (1.5.8)$$

Подставляя коэффициенты (1.5.6) в (1.5.7), используем условие обращения в нуль функции $f(\cos t) \sin t$ при $t = 0$ и $t = \pi$:

$$C_0 + 4A \sum_{m=1}^{\infty} i^m m J_m(u) + 4B \sum_{m=1}^{\infty} i^m m J_m(v) + 4C \sum_{m=1}^{\infty} i^m J_m(w) = 0, \quad (1.5.9)$$

$$C_0 + 4A \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m m J_m(u) + 4B \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m m J_m(v) + 4C \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m J_m(w) = 0. \quad (1.5.10)$$

Воспользуемся формулами

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) J_{2n+1}(u) = \frac{u}{2} J_0(u), \quad (1.5.11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2n J_{2n}(u) = -\frac{u}{2} J_1(u). \quad (1.5.12)$$

Взяв вместо (1.5.9) и (1.5.10) их полусумму и полуразность и используя (1.5.11) и (1.5.12), получим

$$C_0 - 2AuJ_1(u) - 2BvJ_1(v) - 2CwJ_1(w) = 0, \quad (1.5.13)$$

$$AuJ_0(u) + BvJ_0(v) + CwJ_0(w) = 0, \quad (1.5.14)$$

а из (1.5.6) для C_0 получим:

$$\frac{C_0}{2} + AJ_0(u) + BJ_0(v) + CJ_0(w) = 0. \quad (1.5.15)$$

Выражения (1.5.13), (1.5.14), и (1.5.15) следует рассматривать как систему неоднородных уравнений относительно A , B , C_0 . Решая ее, получаем

$$C_0 = \frac{2C}{Q(u,v)} [u(u-v)J_1(u)J_0(v)J_0(w) + v(w-u)J_1(v)J_0(w)J_0(u) + w(u-v)J_1(w)J_0(u)J_0(v)],$$

$$A = \frac{C}{Q(u,v)} \left\{ (v-w)J_0(v)J_0(w) + vw \ln \frac{i\gamma\kappa\alpha}{4} [J_0(v)J_1(w) - J_0(w)J_1(v)] \right\},$$

$$B = -\frac{C}{Q(u,v)} \left\{ (u-w)J_0(u)J_0(w) - uw \ln \frac{i\gamma\kappa\alpha}{4} [J_0(w)J_1(u) - J_0(u)J_1(w)] \right\},$$

или в другом виде

$$C_0 = -\frac{(u-v)^2 n_r}{2(u-v)(v-w)Q(u,v)} \times \\ \times [wJ_1(w)Q(u,v) + uJ_1(u)Q(v,w) + vJ_1(v)Q(w,u)], \quad (1.5.16)$$

$$A = \frac{C}{Q(u,v)} Q(v,-w), \quad (1.5.17)$$

$$B = -\frac{C}{Q(u,v)} Q(-w,u) \quad (1.5.18)$$

где

$$Q(u,v) = (u-v)J_0(u)J_0(v) + uv[J_0(u)J_1(v) - J_0(v)J_1(u)] \ln \frac{i\gamma ka}{4}. \quad (1.5.19)$$

По формуле (1.5.8) можно выразить коэффициенты разложения C_m в явном виде через функции Бесселя:

$$C_m = -\frac{(u-v)^2 n_r (i)^m m}{(u-w)(v-w)Q(u,v)} [J_m(w)Q(u,v) + J_m(u)Q(v,w) + J_m(v)Q(w,u)] \\ (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.5.20)$$

Вычислим фурье-преобразование тока

$$F_0(s, u, v, w) = \int_{-1}^1 f_0(\xi) \exp(is\xi) d\xi = \int_0^\pi f_0(\cos t) \sin t \exp(is \cos t) dt. \quad (1.5.21)$$

Подставляя (1.5.7) в (1.5.21) с коэффициентами C_m из (1.5.16), (1.5.20) и используя формулы

$$\int_0^\pi \cos mt \exp(is \cos t) dt = \pi (i)^m J_m(s), \quad (1.5.22)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m J_m(w) J_m(s) = -\frac{ws}{2(w+s)} [J_0(w)J_1(s) + J_1(w)J_0(s)], \quad (1.5.23)$$

получим

$$F_0(s, u, v, w) = \frac{\pi}{2} \frac{(u-v)^2 n_r}{(u-w)(v-w)Q(u,v)} \times \\ \times [Q(u,v)P(w,s) + Q(v,w)P(u,s) + Q(w,u)P(v,s)], \quad (1.5.24)$$

где

$$P(w,s) = \frac{w}{w+s} [sJ_0(w)J_1(s) - wJ_1(w)J_0(s)]. \quad (1.5.25)$$

Если

$$v = w \text{ или } u = w, \quad (1.5.26)$$

то знаменатель в (1.5.24) обращается в нуль. Однако, при этом обращается в нуль и выражение, стоящее в квадратных скобках числителя (1.5.24). Записывая условие (1.5.26) более подробно, получаем

$$\frac{ka}{\sin \psi} \left(\frac{h}{k} \cos \psi \pm 1 \right) = -ka \sin \varphi_0,$$

откуда

$$\cos \theta_0 \cos \psi + \sin \theta_0 \sin \psi \sin \varphi_0 = \pm 1,$$

и с учетом того, что

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1,$$

имеем

$$(\cos \theta_0 \pm \cos \psi) \cos \psi = \sin \psi (\sin \psi \pm \sin \varphi_0 \sin \theta_0) \quad (1.5.27)$$

Соотношение (1.5.27) должно выполняться при любых значениях ψ , и поскольку функции $\sin \psi$ и $\cos \psi$ являются независимыми, то выражения, стоящие в (1.5.27) в скобках должны быть тождественно равны нулю. Из этого следует, что соотношения (1.5.26) между параметрами u , v , w реализуются, если направление распространения плоской волны совпадает с вектором $\vec{\tau}$ или вектором $-\vec{\tau}$. В этих случаях $n_r = 0$, и следовательно, рассеяние отсутствует: $F_0 = 0$.

Подставляя (1.5.24) в (1.4.6) получим следующее выражение для полного сечения рассеяния:

$$\begin{aligned} \kappa \sigma = & - \frac{\pi^2 |n_r|^2 (u-v)^2}{4 |\vec{n}|^2 (u-v)(v-w) |Q(u,v)|^2} \times \\ & \times \{ P(u, -w) \{ vw(u-v) J_0(u) J_0(v) [J_0(v) J_1(w) - J_0(w) J_1(v)] - \\ & - uv(v-w) J_0(v) J_0(w) [J_0(u) J_1(v) - J_0(v) J_1(u)] \} + \\ & + P(v, -w) \{ uw(u-v) J_0(u) J_0(v) [J_0(w) J_1(u) - J_0(u) J_1(w)] - \\ & - uv(w-u) J_0(u) J_0(w) [J_0(u) J_1(v) - J_0(v) J_1(u)] \} \}, \quad (1.5.28) \end{aligned}$$

или в более компактном виде

$$\begin{aligned} \kappa \sigma = & - \frac{\pi^2 |n_r|^2 uv(u-v)^2}{4 |\vec{n}|^2 (u-v)^2 (v-w)^2 |Q(u,v)|^2} \times \\ & \times \{ (u-v)(v-w) uv J_0^2(w) [J_0(u) J_1(v) - J_0(v) J_1(u)]^2 + \\ & + (v-u)(w-u) vw J_0^2(u) [J_0(v) J_1(w) - J_0(w) J_1(v)]^2 + \\ & + (w-v)(u-v) wu J_0^2(v) [J_0(w) J_1(u) - J_0(u) J_1(w)]^2 \}. \quad (1.5.29) \end{aligned}$$

1.6. Резонансы

Выражения для тока и его фурье-преобразования, через которые определяются поля в дальней зоне, содержат резонансный знаменатель $Q(u, v)$. При изменении частоты или угла падения плоской волны θ_0 этот знаменатель может принимать малые значения. При этом происходят резкие изменения характеристик рассеянного поля. В частности, может наблюдаться значительное увеличение сечения рассеяния. Резонансные явления обусловлены тем, что лента может поддерживать вытекающие волны с малым уровнем радиационных потерь. Эти волны были впервые обнаружены и исследованы в [85].

Проанализируем вначале наиболее простой случай, когда плоская волна падает на ленту нормально: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = 0$. Будем считать, что волна линейно поляризована, и ее электрический вектор параллелен линиям проводимости, т. е. $|\vec{n}| = 1$, $n_r = 1$. Это обеспечивает максимальное взаимодействие волны с лентой.

Для рассматриваемого частного случая ($h = 0, \kappa = k, u = -v, w = 0$) рассеянное поле не обладает угловой направленностью: $\Phi(\varphi) = \text{const}$. Это следует из того, что разложение функции $F_0(s, u, -u, 0)$ в ряд по степеням s содержит нулевой член

$$F(0, u, -u, 0) = -\frac{2\pi u J_1(u)}{J_0(u) + J_1(u) \ln \frac{i\gamma k a}{4}}, \quad u = \frac{ka}{\sin \psi}, \quad (1.6.1)$$

который при $ka \ll 1$ будет доминирующим в представлении (1.3.7) для $\Phi(\varphi)$. Подставляя (1.6.1) в (1.4.6) получаем формулу для полного сечения рассеяния:

$$k\sigma = \frac{\pi^2 u^2 J_1(u)}{\left| J_0(u) + u J_1(u) \ln \frac{i\gamma k a}{4} \right|^2}. \quad (1.6.2)$$

Выражение (1.6.2) достигает максимальных значений, равных 4 (при этом $\sigma = \frac{2\lambda}{\pi}$), при равенстве нулю действительной части выражения, стоящего под знаком модуля в знаменателе:

$$J_0(u) + u J_1(u) \ln \frac{\gamma k a}{4} = 0. \quad (1.6.3)$$

Это уравнение имеет много корней. Например, если $\psi = 0.16$, то низшему резонансу соответствует $u = 0.8$. Отметим, что поперечник рассеяния в резонансе оказался порядка длины волны λ , несмотря на то, что ширина ленты $2a$ предполагалась малой по сравнению с λ . Разумеется, эти резонансы существуют лишь при условии $\psi \ll 1$.

Если частота такова, что

$$J_1(u) = 0, \quad (1.6.4)$$

то в рамках используемого приближенного метода расчета рассеяние отсутствует. Если $J_0(u) = 0$, то (1.6.2) совпадает с выражением для поперечника рассеяния металлической ленты шириной $2a$ в случае E -поляризации [90].

На рис. 1.2 показана зависимость полного сечения рассеяния от частоты падающей волны при нормальном падении. Шкала оси абсцисс выбрана таким образом, чтобы при изменении угла ψ положение резонансов не изменялось. Та же шкала используется и в случаях, когда падение не является нормальным, при этом из-за малости рассматриваемых углов также приближенно выполняется равенство $u = ka/\sin\psi$. Резонансы второго и высшего порядков также приближенно соответствуют корням уравнения (7.4).

Описанные свойства одиночной ленты объясняют эффекты полного отражения и прохождения, обнаруженные в [81] для частых решеток из анизотропно проводящих лент. Для решеток с малым коэффициентом заполнения q условие полного прохождения совпадает с (1.6.4), а условие полного отражения имеет вид

$$J_0(u) + uJ_1(u) \ln \frac{\pi q}{2} = 0. \quad (1.6.5)$$

Некоторое отличие резонансных частот, найденных из (1.6.3) и (1.6.5) объясняется тем, что формула (1.6.5) учитывает взаимодействие лент.

Более сложные резонансные явления могут наблюдаться при наклонном падении плоской волны. Если частота и угол падения волны θ_0 таковы, что выполняются условия

$$J_0(u) = J_0(v) = 0, \quad (1.6.6)$$

то

$$Q(u, v) = 0 \quad (1.6.7)$$

и выражение (1.5.24) обращается в бесконечность. Это происходит, когда

$$ka = \frac{v_m + v_n}{2} \sin\psi, \quad \cos\theta_0 = \frac{v_m - v_n}{(v_m + v_n) \cos\psi}, \quad (1.6.8)$$

где v_m – нули функции Бесселя $J_0(v)$: $v_1 = 2,4..$; $v_2 = 5,52..$; $v_3 = 8,65..$ и т.д.

Заметим, что угол $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет условию (1.6.8) ($v_m = v_n$).

Однако, при нормальном падении волны, когда выполнено так же условие $w = 0$, величина F_0 остается конечной при $ka/\sin\psi = v_n$, так как в этом случае множитель $J_0(u)$, содержащийся в $Q(u, v)$ компенсируется таким же множителем в числителе выражения (1.5.24).

Обращение F_0 в бесконечность связано с использованием аппроксимации (1.5.2). Мнимая часть ядра G_0 , посредством которой учитывается мощность, излучаемая поверхностным током, представляет собой константу. Эта константа возникла как нулевой член разложения функции

Бесселя в ряд по степеням малого аргумента. Такая аппроксимация не позволяет учесть излучение токов, если они обладают свойством

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 0. \quad (1.6.9)$$

В этом случае необходимо использовать более точное приближение ядра G :

$$G = G_0 + G_1, \quad (1.6.10)$$

где G_1 представляет собой квадратичный член разложения функции Бесселя:

$$G_1(\xi, \xi') = -\frac{i}{16} (ka)^2 (\xi - \xi')^2. \quad (1.6.11)$$

Уточнение действительной части ядра (1.2.15) приведет лишь к изменению значений резонансных частот, поскольку эти значения определяются из условия равенства нулю действительной части резонансного знаменателя. Это уточнение не повлияет на значение полного сечения рассеяния в условиях резонанса. Таким образом, будем пренебрегать изменением значения мнимой части знаменателя при малом смещении точки резонанса.

Влияние малой добавки (1.6.11) на решение интегро-дифференциального уравнения оценим с помощью вариационного принципа [90]. Решение интегрального уравнения определим как экстремаль вариационной задачи для функционала, в который варьируемая функция входит билинейно. Практическое значение метода стационарного представления определяется возможностью построения таких стационарных функционалов, которые сами имеют непосредственный физический смысл. Ниже показано, что такое стационарное представление имеет поле в дальней зоне в произвольном направлении. Следовательно, функция $F(s, u, v, w)$ может быть представлена в виде однородного функционала от поверхностного тока, не чувствительного в первом приближении к отклонениям поверхностного тока от его точного распределения, которое определяется интегро-дифференциальным уравнением (1.2.13) с ядром (1.2.15).

Для функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$, удовлетворяющих условиям

$$f_1(\pm 1) = f_2(\pm 1) = 0, \quad (1.6.12)$$

введем функционал

$$\Omega(f_1, f_2) = \frac{n_r(u-v)^2 \int_{-1}^1 f_1(\xi) \exp(is\xi) d\xi \int_{-1}^1 f_2(\xi) \exp(iw\xi) d\xi}{4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \xi') [f_1'(\xi') - ivf_1(\xi')] [f_2'(\xi) + iuf_2(\xi)] d\xi d\xi'}; \quad (1.6.13)$$

штрих у функции означает дифференцирование. Покажем, что функционал (1.6.13) стационарен на следующих решениях уравнения (1.2.13):

$$f_1(\xi) = f(\xi, u, v, w), \quad (1.6.14)$$

$$f_2(\xi) = f(\xi, -u, -v, s), \quad (1.6.15)$$

и принимает на этих решениях значение

$$\Omega = F(s, u, v, w). \quad (1.6.16)$$

С учетом (1.6.14) и (1.6.15) формула (1.6.16) сразу следует из (3.1) и (1.4.13). Для доказательства стационарности возьмем вариацию знаменателя (1.6.13). С использованием (1.4.13) и (1.4.14) получаем:

$$\begin{aligned} & \delta \left\{ 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) [f_1'(\eta) - ivf_1(\eta)] [f_2'(\xi) + iuf_2(\xi)] d\xi d\eta \right\} = \\ & = 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) [\delta f_1'(\eta) - iv\delta f_1(\eta)] [f_2'(\xi) + iuf_2(\xi)] d\xi d\eta + \\ & + 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) [f_1'(\eta) - ivf_1(\eta)] [\delta f_2'(\xi) + iu\delta f_2(\xi)] d\xi d\eta = \\ & = n_r (u - v)^2 \delta \int_{-1}^1 f_1(\xi) \exp(is\xi) d\xi + n_r (u - v)^2 \delta \int_{-1}^1 f_2(\xi) \exp(iw\xi) d\xi. \quad (1.6.17) \end{aligned}$$

Теперь из (1.6.13), (1.6.17) с использованием (1.4.13), (1.4.14) следует $\delta\Omega = 0$. Таким образом, выражение (1.6.11) можно использовать для уточнения приближенного решения $F_0(s, u, v, w)$. Отметим, что функционал (1.6.13) является однородным, поэтому нормировка функций f_1 и f_2 не влияет на его значение.

Введем функции

$$\bar{f}_0(\xi, u, v, w) = Q(u, v) f_0(\xi, u, v, w), \quad (1.6.18)$$

$$\bar{F}_0(s, u, v, w) = Q(u, v) F_0(s, u, v, w), \quad (1.6.19)$$

которые в резонансе остаются конечными. Подставим в (1.6.13) в качестве пробных функций выражения

$$f_1(\xi) = \bar{f}_0(\xi, u, v, w), \quad f_2(\xi) = \bar{f}_0(\xi, -u, -v, s). \quad (1.6.20)$$

При этом для ядра G используем представления (1.6.10), (1.6.11), тогда знаменатель (1.6.13) представляется в виде суммы следующих интегралов:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) [f_1'(\eta) - ivf_1(\eta)] [f_2'(\xi) + iuf_2(\xi)] d\xi d\eta = \\ & = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_0(\xi, \eta) [f_1'(\eta) - ivf_1(\eta)] [f_2'(\xi) + iuf_2(\xi)] d\xi d\eta + \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_1(\eta) G_1(\xi, \eta) f_2'(\xi) d\xi d\eta + uv \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_1(\eta) G_1(\xi, \eta) f_2(\xi) d\xi d\eta + \\ & + i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_1(\xi, \eta) [uf_1'(\eta) f_2(\xi) - vf_2'(\xi) f_1(\eta)] d\xi d\eta \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования производятся при помощи формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_1'(\eta) G_1(\xi, \eta) f_2'(\xi) d\xi d\eta &= -\frac{i(\kappa a)^2}{16} \left[\int_{-1}^1 \xi^2 f_2'(\xi) d\xi \int_{-1}^1 f_1'(\eta) d\eta - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{-1}^1 \xi f_2'(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta f_1'(\eta) d\eta + \int_{-1}^1 f_2'(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta^2 f_1'(\eta) d\eta \right] = \\ &= \frac{i(\kappa a)^2}{8} \int_{-1}^1 f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 f_1(\eta) d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} uv \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_1(\eta) G_1(\xi, \eta) f_2(\xi) d\xi d\eta &= -\frac{i(\kappa a)^2}{16} uv \left[\int_{-1}^1 \xi^2 f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 f_1(\eta) d\eta - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{-1}^1 \xi f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta f_1(\eta) d\eta + \int_{-1}^1 f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta^2 f_1(\eta) d\eta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_1(\xi, \eta) [u f_1'(\eta) f_2(\xi) - v f_2'(\xi) f_1(\eta)] d\xi d\eta &= \\ &= \frac{i(\kappa a)^2}{16} \left[u \int_{-1}^1 \xi^2 f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 f_1'(\eta) d\eta - 2u \int_{-1}^1 \xi f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta f_1'(\eta) d\eta + \right. \\ &\quad + u \int_{-1}^1 f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta^2 f_1'(\eta) d\eta - v \int_{-1}^1 f_2'(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta^2 f_1(\eta) d\eta + \\ &\quad \left. + 2v \int_{-1}^1 \xi f_2'(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta^2 f_1(\eta) d\eta - v \int_{-1}^1 \xi^2 f_2'(\xi) d\xi \int_{-1}^1 f_1(\eta) d\eta \right] = \\ &= \frac{i(\kappa a)^2}{16} \left[2u \int_{-1}^1 \xi f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 f_1(\eta) d\eta - 2u \int_{-1}^1 f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta f_1(\eta) d\eta - \right. \\ &\quad \left. - 2v \int_{-1}^1 f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \eta f_1(\eta) d\eta + 2v \int_{-1}^1 \xi f_2(\xi) d\xi \int_{-1}^1 f_1(\eta) d\eta \right] \end{aligned}$$

Однократные интегралы в полученных перекрестных произведениях выражаются, как это следует из (3.1), через функцию $\bar{F}_0(s, u, v, w)$ по формулам

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f_1(\eta) d\eta &= \bar{F}_0(0, u, v, w), \quad \int_{-1}^1 \eta f_1(\eta) d\eta = -i\bar{F}_0'(0, u, v, w), \\ \int_{-1}^1 \eta^2 f_1(\eta) d\eta &= -\bar{F}_0''(0, u, v, w), \quad \int_{-1}^1 f_2(\xi) d\xi = \bar{F}_0(0, -u, -v, s), \\ \int_{-1}^1 \xi f_2(\xi) d\xi &= -i\bar{F}_0'(0, -u, -v, s), \quad \int_{-1}^1 \xi^2 f_2(\xi) d\xi = -\bar{F}_0''(0, -u, -v, s). \end{aligned}$$

В результате получим выражение для фурье-преобразования поверхностного тока, которое полностью определяется через известное выражение для фурье-преобразования нулевого приближения $\bar{F}_0(s, u, v, w)$:

$$F(s, u, v, w) = \bar{F}_0^2(s, u, v, w) \left/ \left\{ Q(u, v) \bar{F}_0(s, u, v, w) - \frac{i(\kappa a)^2}{4n_r(u-v)^2} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left[2 + 2(u+v) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + uv \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right)^2 \right] \times \bar{F}_0(\alpha, u, v, w) \bar{F}_0(\beta, -u, -v, s) \right|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}}$$

или иначе

$$F(s, u, v, w) = \bar{F}_0^2(s, u, v, w) \left/ \left\{ Q(u, v) \bar{F}_0(s, u, v, w) - \frac{i(\kappa a)^2}{4n_r(u-v)^2} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left[2 + 2(u+v) \frac{\partial}{\partial \alpha} + uv \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \bar{F}_0(\alpha, u, v, w) \bar{F}_0(-\alpha, -u, -v, s) \right|_{\alpha=0} \quad (1.6.21)$$

С помощью (1.6.21) определим значение $F(s, u, v, w)$ в резонансных точках (1.6.8). Из (1.5.24), учитывая (1.6.6) и предполагая, что $|s|, |w| \ll 1$, получим

$$F_0(s, u, v, w) = \frac{\pi}{2} n_r s w \frac{(u-v)^3}{uv} J_1(u) J_1(v) \ln \frac{i\gamma \kappa a}{4}. \quad (1.6.22)$$

Подставляя (1.6.22) в (1.6.21), учитывая так же (1.6.6) и еще раз используя $|s|, |w| \ll 1$, получим следующее выражение для фурье-преобразования поверхностного тока в точках резонанса (1.6.8):

$$F(s, u, v, w) = \frac{2in_r s w (u-v)^2}{(\kappa a)^2 uv}. \quad (1.6.23)$$

В этом случае, как это следует из (1.6.23) и (1.3.7), рассеянное поле приобретает направленность: $\Phi(\varphi) \approx \sin \varphi$. Используя (1.6.23), (1.4.6) и (1.2.14), получим выражение для полного сечения рассеяния в условиях резонанса (1.6.8):

$$\kappa \sigma = - \frac{2|n_r|^2 (u-v)^2}{|\bar{n}|^2 uv} \sin^2 \varphi_0. \quad (1.6.24)$$

Так, например, для волны, которая распространяется вдоль оси y ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$) и у которой электрический вектор направлен по оси z , полное сечение рассеяния равно $\frac{4}{\pi} \lambda$, что вдвое превосходит значение σ в резонансе для случая нормального падения волны. В случае, когда падение не является нормальным, рассеянное поле в условиях резонанса обладает направленностью. Нормированная диаграмма направленности для такого случая приведена на рис. 1.9.

На рис. 1.3 и 1.4 представлены графики зависимости полного сечения рассеяния от частоты для случаев наклонного падения. Угол θ_0 выбран таким, что при некоторых значениях k могут выполняться условия (1.6.8): в случае $v_m = v_n$ (рис. 1.3) и $v_n = v_1, v_m = v_2$ (рис. 1.4). Кривые на рис. 1.3 соответствуют случаю $(\theta_0 = 90^\circ, \varphi_0 = 90^\circ)$ при различных значениях угла ψ . В этом случае в дополнение к представленным на рис. 1.2 появляются резонансы, соответствующие условию (1.6.8). Кривые на рис. 1.4. соответствуют $(\psi = 5.7^\circ, \theta_0 = 64^\circ)$ при различных значениях угла φ_0 .

Разумеется, в общем случае, когда угол падения плоской волны θ_0 не совпадает с (1.6.8), поле, рассеянное узкой лентой не обладает направленностью. Из (1.5.29) при $|w| \ll 1$ следует

$$\kappa\sigma = -\frac{|n_r|^2(u-v)^2 [\text{Im} Q(u,v)]^2}{|\bar{n}|^2 uv |Q(u,v)|^2}. \quad (1.6.25)$$

Зависимость полного сечения рассеяния от частоты носит резонансный характер. Резонансные частоты находятся из условия

$$\text{Re} Q(u,v) = 0. \quad (1.6.26)$$

Полное сечение рассеяния в резонансе определяется выражением

$$\kappa\sigma = -\frac{|n_r|^2(u-v)^2}{|\bar{n}|^2 uv}. \quad (1.6.27)$$

При фиксированном направлении распространения падающей волны за счет выбора ориентации вектора \bar{n} можно добиться как минимального (равного нулю), так и максимального значения для величины $|n_r|^2/|\bar{n}|^2$, входящей множителем в выражение для сечения рассеяния. Решая задачу на нахождение экстремума для функции

$$N(\zeta) = N\left(\frac{A_H}{A_E}\right) = \frac{|n_r|^2}{|\bar{n}|^2} = \frac{(K + L\zeta)^2}{M(1 + \zeta^2)}$$

где введены обозначения $K = \cos\psi - \frac{h}{\kappa} \sin\varphi_0 \sin\psi$, $L = \frac{k}{\kappa} \cos\varphi_0 \sin\psi$, $M = \frac{k^2}{\kappa^2}$ получаем, как это следует из (1.4.4), (1.4.5)

$$N'(\zeta) = \left[\frac{(K + L\zeta)^2}{M(1 + \zeta^2)} \right]' = \frac{2L(K + L\zeta)(1 + \zeta^2) - 2\zeta(K + L\zeta)^2}{M(1 + \zeta^2)^2} = 0;$$

точки экстремума

$$\zeta_1 = -K/L, \quad \zeta_2 = L/K. \quad (1.6.28)$$

В точке ζ_1 функция $N(\zeta)$ обращается в нуль, а в точке ζ_2 принимает максимальное значение, равное

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|n_r|^2}{|\vec{n}|^2} \right)_{\max} &= \frac{K^2 + L^2}{M} = \\
&= \sin^2 \theta_0 \left[(\cos \psi - \operatorname{ctg} \theta_0 \sin \varphi_0 \sin \psi)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta_0} \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \psi \right] = \\
&= \sin^2 \theta_0 \left[(\cos \psi \sin \varphi_0 - \operatorname{ctg} \theta_0 \sin \psi)^2 + \cos^2 \varphi_0 \right]. \quad (1.6.29)
\end{aligned}$$

На рис. 1.3 и 1.4 ориентация вектора \vec{n} была такова, что выполнялось условие (1.6.29), чем достигалось максимальное взаимодействие падающей волны с лентой.

Резонансный характер полного сечения рассеяния наблюдается не только при изменении частоты, но и при изменении угла падения θ_0 . На рис. 1.5 и 1.6 представлены зависимости сечения рассеяния от θ_0 для различных значений частоты, причем кривые 1 и 3 на каждом из рисунков соответствуют резонансным значениям, удовлетворяющим условиям (1.6.8), а кривые 2 построены для произвольно выбранного промежуточного значения частоты. Яркая выраженная зависимость от угла падения при резонансных частотах связана с возможностью обращения в нуль числителя (1.6.25) при выполнении условия (1.6.8). Построение зависимостей рис. 1.5 и 1.6 также производилось с использованием (1.6.29).

1.7. Сечение обратного рассеяния ленты

Рассмотрим случай, когда направление распространения падающей волны составляет прямой угол с осью z и угол φ_0 с осью x , а вектор \vec{E}^0 электрического поля в падающей волне параллелен оси z . Таким образом, в цилиндрической системе координат имеем

$$E_z^0 = \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)], \quad \kappa = k = 2\pi/\lambda, \quad h = 0. \quad (1.7.1)$$

В рассеянном поле z -компонента электрического вектора в дальней зоне имеет вид

$$E_z^S \approx \frac{\Phi(\varphi, \varphi_0)}{\sqrt{kr}} \exp(-ikr). \quad (1.7.2)$$

Радиолокационное сечение рассеяния определяется формулой

$$\sigma_r(\varphi_0) = \lambda |\Phi(\pi + \varphi_0, \varphi_0)|^2. \quad (1.7.3)$$

В предположении, что $ka \ll 1$, исследуем зависимость величины σ_r от частоты и угла падения φ_0 .

Безразмерные параметры s, u, v, w (1.2.14), которыми характеризуется направление рассеяния, направление облучения и частота падающей волны:

$$s = ka \sin \varphi, w = -ka \sin \varphi_0, u = -v = ka / \sin \psi. \quad (1.7.4)$$

Интегродифференциальное уравнение (1.2.13) для плотности поверхностного тока на ленте как функции нормированной координаты $\xi = y/a$ приобретает вид

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + u^2 \right) \int_{-1}^1 G(\xi, \xi') f(\xi', u, w) d\xi' = -u^2 \cos \psi \exp(iw\xi) \quad (1.7.5)$$

с ядром (1.2.15). На краях ленты плотность поверхностного тока обращается в нуль:

$$f(\pm 1, u, w) = 0 \quad (1.7.6)$$

Диаграмма рассеяния $\Phi(\varphi, \varphi_0)$ выражается через фурье-преобразование поверхностного тока:

$$F(s, u, w) = \int_{-1}^1 f(\xi, u, w) \exp(is\xi) d\xi \quad (1.7.7)$$

по формуле (см. (1.3.7))

$$\Phi(\varphi, \varphi_0) = -\frac{\cos \psi}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) F(s, u, w). \quad (1.7.8)$$

Представим экспоненту в правой части уравнения (1.7.5) в виде суммы четной и нечетной функций: $\exp(iw\xi) = \cos w\xi + i \sin w\xi$. Тогда ток и его фурье-преобразование также могут быть записаны в виде сумм четных и нечетных функций соответствующих аргументов:

$$f = f_c + f_s, F = F_c + F_s \quad (1.7.9)$$

Из выражений (1.7.3), (1.7.8), (1.7.9) для радиолокационного сечения рассеяния получим

$$\sigma_r(\varphi_0) = \frac{\cos^2 \psi}{8\pi} \lambda |F_c(w, u, w) + F_s(w, u, w)|^2. \quad (1.7.10)$$

Для узких лент ($ka \ll 1$) аргумент функции Ханкеля в (1.2.15) мал, и вместо ядра G будем использовать аппроксимацию (1.5.2). Аналитическое решение уравнения в этом приближении обозначим через f^0 . Формулы для фурье-преобразований этого решения F_c^0 и F_s^0 , можно получить из (1.5.24), если учесть, что $v = -u$ (см. (1.7.4)):

$$F^0(s, u, w) = F_0(s, u, -u, w) = -2\pi \frac{u^2 \cos \psi}{(u^2 - w^2) Q(u, -u)} \times \\ \times [Q(u, -u)P(w, s) + Q(-u, w)P(u, s) + Q(w, u)P(-u, s)], \quad (1.7.11)$$

где $P(w, s)$ и $Q(u, v)$ определяются по формулам (1.5.25) и (1.5.19) соответственно. Преобразуем (1.7.11):

$$\begin{aligned}
F^0(s, u, w) &= \frac{\pi u^2 \cos \psi}{(u^2 - w^2)(u^2 - s^2) J_0(u) L(u)} [u J_1(u) J_0(s) - s J_0(u) J_1(s)] \times \\
&\times \left\{ (u+w)(s-u) J_0(u) J_0(w) + uw(s-u) [J_0(u) J_1(w) + J_0(w) J_1(u)] \ln \frac{i\gamma ka}{4} + \right. \\
&+ (w-u)(s+u) J_0(w) J_0(u) + wu(s+u) [J_0(w) J_1(u) - J_0(u) J_1(w)] \ln \frac{i\gamma ka}{4} \left. \right\} - \\
&- 2\pi \frac{u^2 \cos \psi}{(u^2 - w^2)} \frac{w}{w+s} [s J_0(w) J_1(s) - w J_1(w) J_0(s)] = \\
&= \frac{2\pi u^2 \cos \psi M(u, s)}{(u^2 - w^2)(u^2 - s^2) J_0(u) L(u)} [ws J_0(w) L(u) - u^2 J_0(u) L(w)] - \\
&- 2\pi \frac{u^2 \cos \psi}{(u^2 - w^2)} \frac{w}{w+s} [s J_0(w) J_1(s) - w J_1(w) J_0(s)] \quad (1.7.12)
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$L(u) = J_0(u) + u J_1(u) \ln \frac{i\gamma ka}{4}, \quad (1.7.13)$$

$$M(u, s) = u J_1(u) J_0(s) - s J_1(s) J_0(u). \quad (1.7.14)$$

Для нахождения сечения обратного рассеяния (1.7.10) нас будет интересовать фурье-преобразование вида $F^0(w, u, w)$. Выделяя из (1.7.12) четную и нечетную части относительно аргумента w и производя замену $s \rightarrow w$, получаем:

$$F_c^0(w, u, w) = -\frac{2\pi \cos \psi u^4 L(w) M(u, w)}{(u^2 - w^2)^2 L(u)}, \quad (1.7.15)$$

$$F_s^0(w, u, w) = \frac{2\pi \cos \psi u^2 w^2 J_0(w) M(u, w)}{(u^2 - w^2)^2 J_0(u)}, \quad (1.7.16)$$

Условие $ka \ll 1$ означает, что $|w| \ll 1$ (см. (1.7.4)), однако величину u в приведенных формулах малой не предполагаем. При $\psi \ll 1$ она может принимать любые значения. Выражения (1.7.15), (1.7.16) при $|w| \ll 1$ и $|w| \ll u$ упрощаются:

$$F_c^0(w, u, w) = -\frac{2\pi \cos \psi u J_1(u)}{L(u)}, \quad (1.7.17)$$

$$F_s^0(w, u, w) = \frac{2\pi \cos \psi u J_1(u) w^2}{u J_0(u)}, \quad (1.7.18)$$

Выражение (1.7.17) не зависит от w , оно описывает вклад в рассеянное поле четной части токов, создающих ненаправленное излучение. Выражение (1.7.18) пропорционально w^2 и описывает вклад нечетных токов, которые создают диаграмму рассеяния, пропорциональную $\sin \varphi$.

Из формул (1.7.17), (1.7.18) следует, что на частотах, определяемых из условия $J_1(u)=0$, величина σ в рамках использованного приближения превращается в нуль при любых значениях угла падения φ_0 . Этот эффект связан с резонансами токов четного типа. Частоты, удовлетворяющие уравнению $J_0(u)=0$, соответствуют резонансам нечетного типа, при этом $F_s^0 = \infty$.

Обращение F_s^0 в бесконечность на резонансных частотах – следствие аппроксимации (1.5.2), которая не позволяет учесть излучение нечетных токов. Это излучение можно оценить, дополнив G_0 слагаемым (1.6.11), представляющим собой следующий член разложения мнимой части функции Грина G в ряд по степеням малого аргумента.

Уточненное решение для фурье-преобразования поверхностного тока следует из формулы (1.6.21), полученной с использованием вариационного принципа с учетом поправки (1.6.11). Полагая в (1.6.21) значения параметров в соответствии с (1.7.4), получим уточненное выражение для фурье-преобразования поверхностного тока:

$$F_s(w, u, w) = [F_s^0(w, u, w)]^2 / \left\{ F_s^0(w, u, w) + \frac{i(ka)^2}{8 \cos \psi} [F_s^{0'}(0, u, w)]^2 \right\}, \quad (1.7.19)$$

где

$$F_s^{0'}(0, u, w) = \left. \frac{d}{d\alpha} F_s^0(\alpha, u, w) \right|_{\alpha=0}. \quad (1.7.20)$$

Из (1.7.12) следует, что

$$F_s^0(w, u, w) = \frac{2\pi u^2 \cos \psi M(u, s)}{(u^2 - w^2)(u^2 - s^2) J_0(u)} w s J_0(w) + \\ + 2\pi \frac{u^2 \cos \psi}{(u^2 - w^2)(w^2 - s^2)} [s J_0(w) J_1(s) - w J_1(w) J_0(s)] \quad (1.7.21)$$

Производя операцию дифференцирования (1.7.20) над выражением (1.7.21), получаем:

$$F_s^{0'}(0, u, w) = \left. \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{2\pi u^2 \cos \psi M(u, \alpha)}{(u^2 - w^2)(u^2 - \alpha^2) J_0(u)} \alpha w J_0(w) \right] \right|_{\alpha=0} = \\ = \frac{2\pi \cos \psi}{(u^2 - w^2) J_0(u)} u J_1(u) w J_0(w) - \frac{2\pi u^2 \cos \psi}{u^2 - w^2} J_1(w) = \\ = - \frac{2\pi \cos \psi u N(u, w)}{(u^2 - w^2) J_0(u)}, \quad (1.7.22)$$

где

$$N(u, w) = uJ_0(u)J_1(w) - wJ_0(w)J_1(u). \quad (1.7.23)$$

Подставляя (1.7.21) и (1.7.22) в (1.7.19), получим выражение, пригодное для определения F_s и на резонансных частотах:

$$F_s(w, u, w) = \frac{8\pi \cos \psi u^2 w^4 J_0^2(w) M^2(u, w)}{(u^2 - w^2)^2 [4w^2 J_0(w) J_0(u) M(u, w) + i\pi (ka)^2 N^2(u, w)]} \quad (1.7.24)$$

При выполнении условий $|w| \ll 1$, $|w| \ll u$ старший член разложения этого выражения по степеням малого параметра w имеет вид (ср. с (1.7.18))

$$F_s(w, u, w) = \frac{32\pi \cos \psi J_1^2(u) w^2}{16w J_0(u) J_1(u) + i\pi (ka)^2 u^2 J_2^2(u)}. \quad (1.7.25)$$

Таким образом, формулы (1.7.10), (1.7.15), (1.7.24) позволяют определить радиолокационное сечение рассеяния узкой анизотропно проводящей ленты.

На рис. 1.7, 1.8 приведены результаты расчета σ_r в полосе частот для ленты, у которой угол $\psi = \pi/12$. На низких частотах (рис. 1.7) лента рассеивает изотропно; кривые, рассчитанные при различных значениях угла падения φ_0 , совпадают с графической точностью. Величина σ_r плавно меняется с частотой и достигает максимума при $ka \approx 0,2$.

На более высоких частотах сечение обратного рассеяния существенно зависит от угла падения φ_0 (рис. 1.9). Видно, что в этом диапазоне частот есть два резонанса, соответствующие первым корням уравнений $J_0(u) = 0$, $J_1(u) = 0$. Резонансы проявляются в резком уменьшении величины σ , причем для нечетного резонанса глубокий провал наблюдается лишь при $\varphi_0 = \pi/4$. Обсудим это свойство более подробно.

В малой окрестности резонансной частоты нечетного колебания ($u \approx u_0 = 2, 4, \dots$) для величины F_s из (1.7.25), используя свойства функций Бесселя, получим

$$F_s \approx \frac{4\pi \cos \psi (ka)^2 \sin^2 \varphi_0}{-2u_0(u - u_0) + i\frac{\pi}{2}(ka)^2}. \quad (1.7.26)$$

При этом согласно (1.7.13), (1.7.17) имеем

$$F_c^0 \approx -\frac{2\pi \cos \psi}{\ln \frac{\gamma ka}{4} + i\frac{\pi}{2}}. \quad (1.7.27)$$

Из соотношений (1.7.26), (1.7.27) следует, что при выполнении условий

$$\sin^2 \varphi_0 = \frac{1}{2}, \quad u - u_0 = -\frac{(ka)^2}{2u_0} \ln \frac{\gamma ka}{4} \quad (1.7.27)$$

обратного рассеяния нет: $F_c^0 + F_s = 0$. Если $\varphi_0 = \pi/4$, то существует частота, на которой $\sigma = 0$, при этом диаграмма рассеяния описывается функцией $1 + \sqrt{2} \sin \varphi$. На указанной частоте сечение обратного рассеяния зависит от угла падения φ_0 по закону $\cos^2 2\varphi_0$.

В ИРЭ РАН проведены измерения обратного сечения рассеяния от ленты с анизотропной проводимостью. Результаты эксперимента хорошо согласуются с выводами теории (рис. 1.7). Таким образом, модель анизотропно проводящей ленты правильно передает все основные черты резонансных явлений, наблюдаемых при рассеянии на системе близко расположенных параллельных металлических проводников конечной длины. Благодаря тому, что рассеянное поле имеет на резонансной частоте угловую направленность, узкие анизотропно проводящие ленты могут быть использованы для создания решеток с нестандартной зависимостью электродинамических характеристик от угла падения плоской волны.

Выводы

1. Рассмотрена задача дифракции плоской волны, падающей под произвольным углом на анизотропно проводящую ленту. Для случая узкой по сравнению с длиной волны ленты получено выражение для полного сечения рассеяния в зависимости от параметров задачи. Решение получено в квазистатическом приближении.
2. Обнаружено, что при малых значениях угла, образуемого направлением идеальной проводимости с осью ленты, возникают резонансные явления, приводящие к резкому увеличению сечения рассеяния при определенных параметрах первичной волны. Эти явления объясняют эффекты полного прохождения и отражения, обнаруженные в частых решетках из анизотропно проводящих лент.
3. С помощью вариационного принципа и учета дополнительного члена в разложении функции Грина получены уточненные значения для величины полного сечения рассеяния в условиях резонанса. Для решения задачи использован однородный функционал, который на решениях интегродифференциального уравнения приобретает смысл фурье-преобразования поверхностных токов ленты.
4. Резонансные явления исследованы, получены выражения для сечения рассеяния поля в общем случае. Найдены условия возникновения резонанса. Определены диаграммы рассеянного поля.
5. Получены выражения для сечения радиолокационного рассеяния ленты. Расчеты хорошо согласуются с результатами эксперимента, проведенного в ИРЭ РАН.

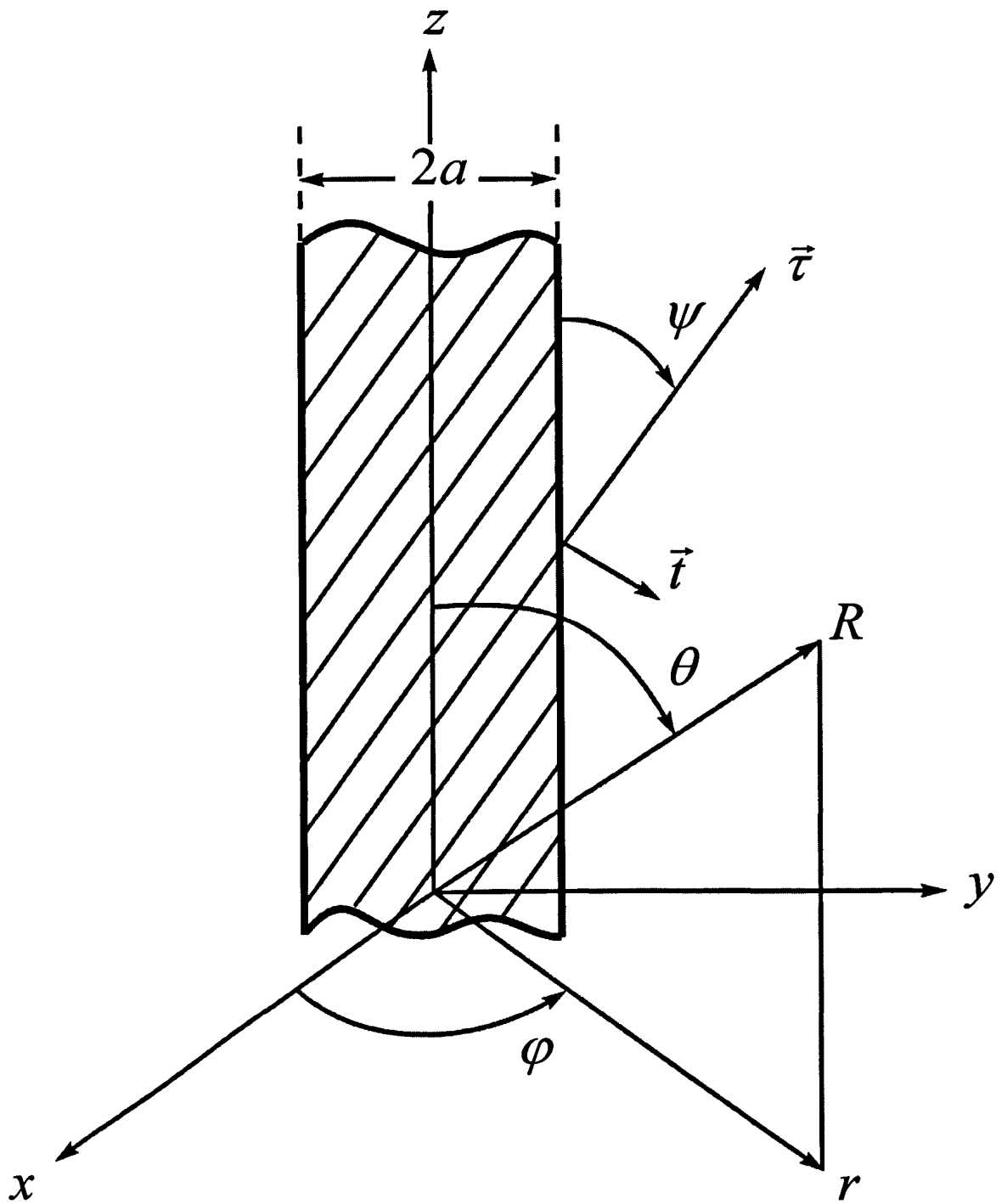


Рис. 1.1. Анизотропно проводящая лента.

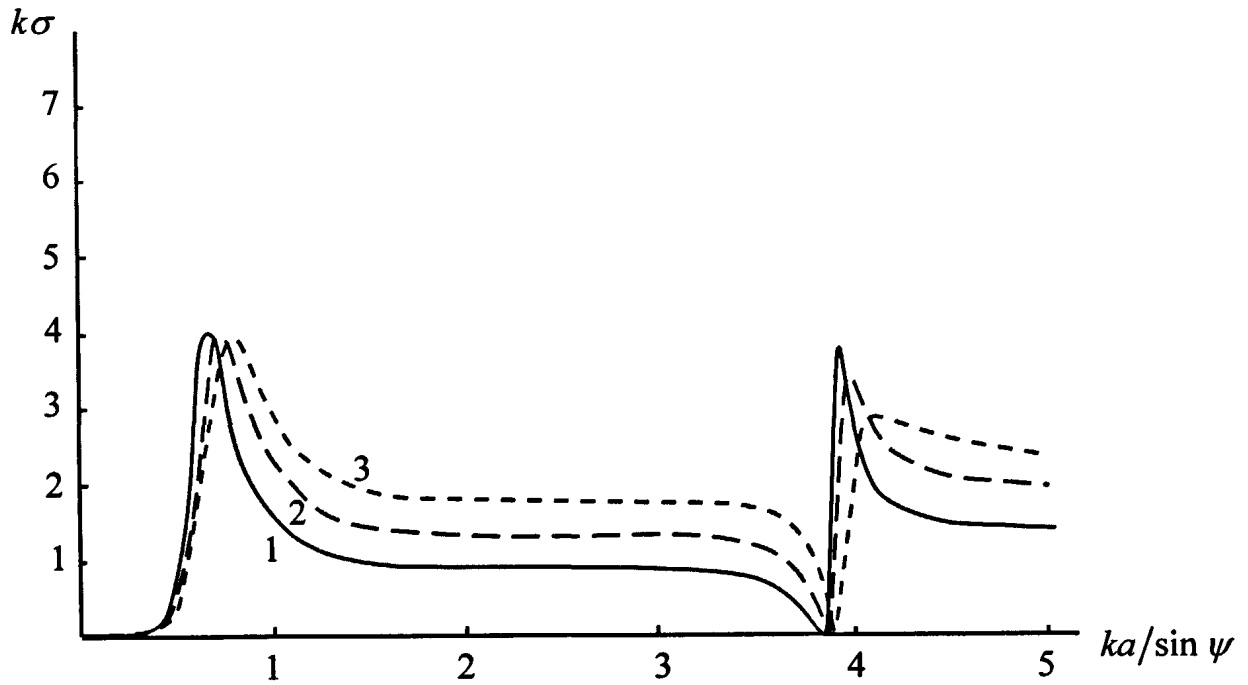


Рис.1.2. Зависимость полного сечения рассеяния от частоты при нормальном падении ($\theta_0 = 90^\circ, \varphi_0 = 0$) в случае $\psi = 2.9^\circ$ (1), $\psi = 5.7^\circ$ (2) и $\psi = 9.2^\circ$ (3); $\vec{E}^0 \parallel \vec{\tau}$.

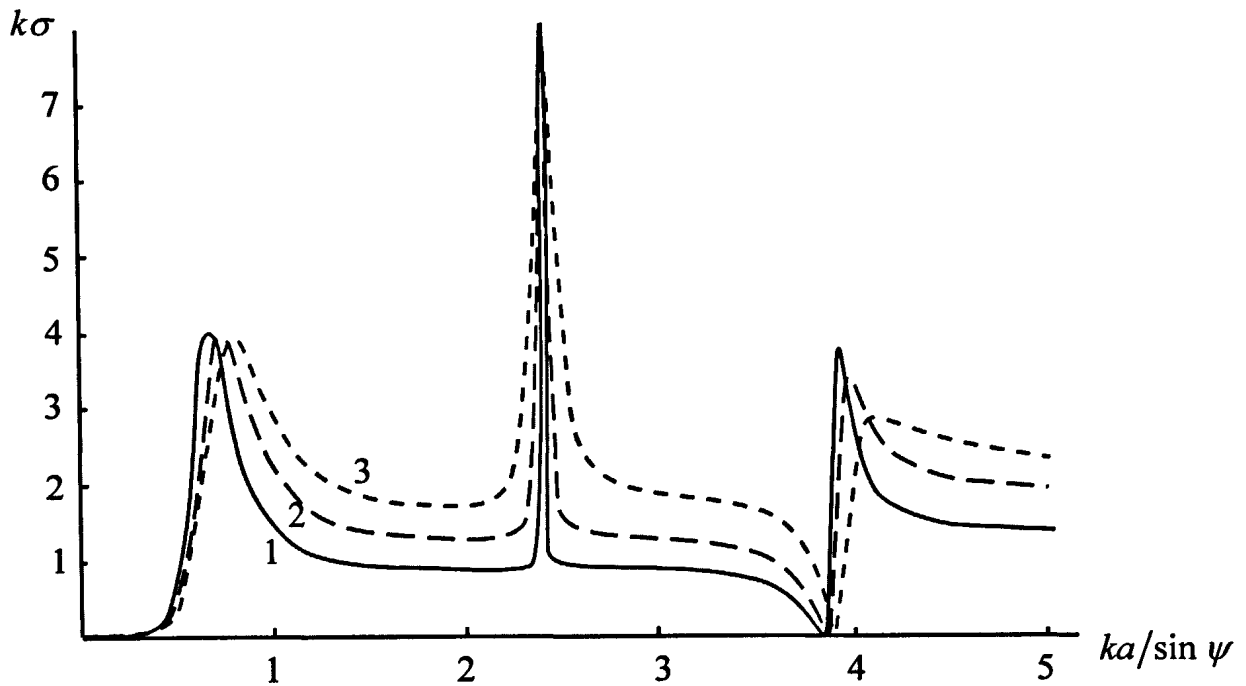


Рис.1.3. Зависимость полного сечения рассеяния от частоты при боковом падении ($\theta_0 = 90^\circ, \varphi_0 = 0$) в случае $\psi = 2.9^\circ$ (1), $\psi = 5.7^\circ$ (2) и $\psi = 9.2^\circ$ (3).

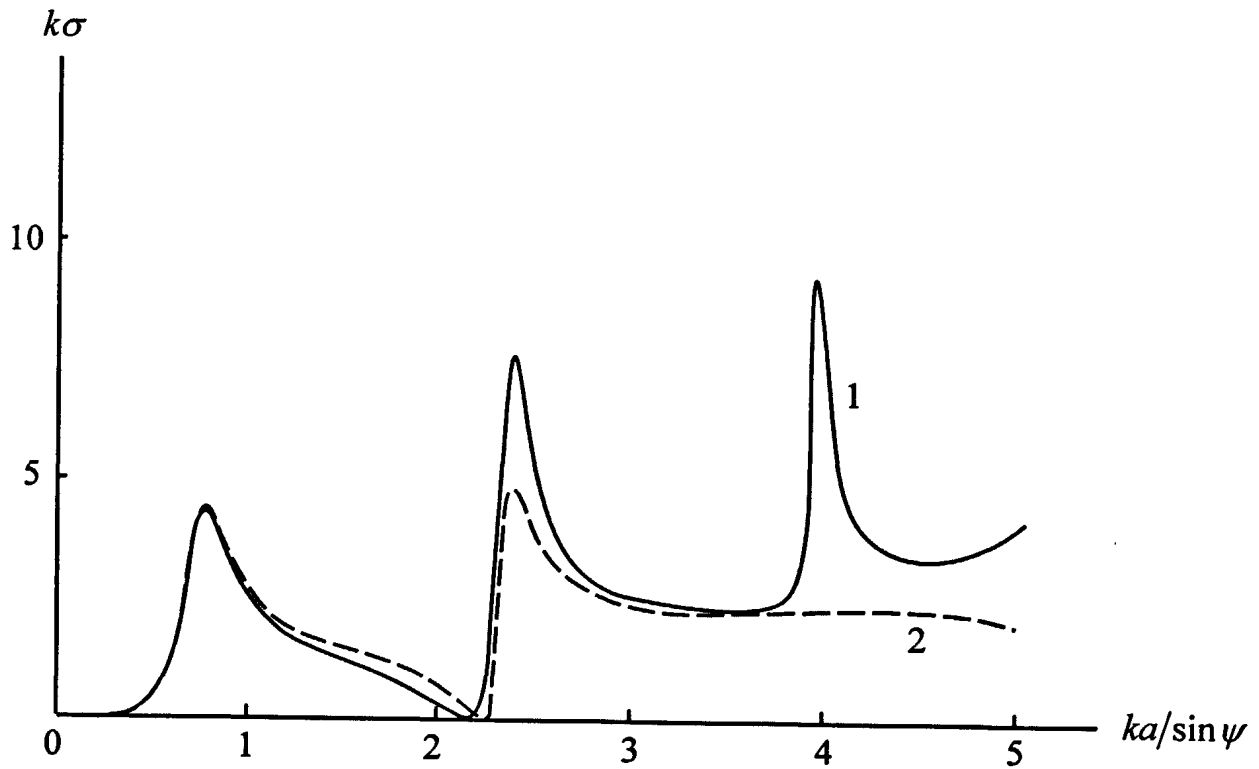


Рис.1.4. Зависимость полного сечения рассеяния от частоты при наклонном падении ($\theta_0 = 64^\circ, \psi = 5,7^\circ$) в случае $\varphi_0 = 90^\circ$ (кривая 1) и $\varphi_0 = 0$ (кривая 2).

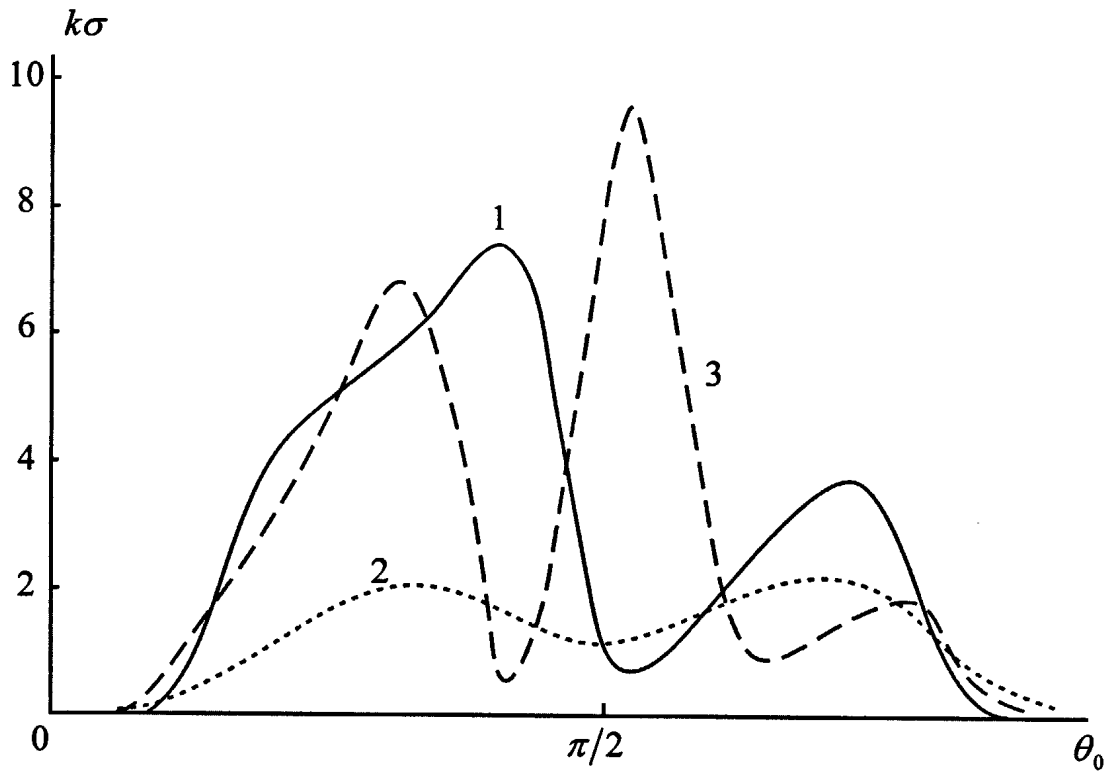


Рис.1.5. Зависимость полного сечения рассеяния от угла падения θ_0 при $\varphi_0 = 90^\circ$, $\psi = 5,7^\circ$ для фиксированных значений частот: $ka = 0.24$ (1), $ka = 0.3$ (2) и $ka = 0.39$ (3).

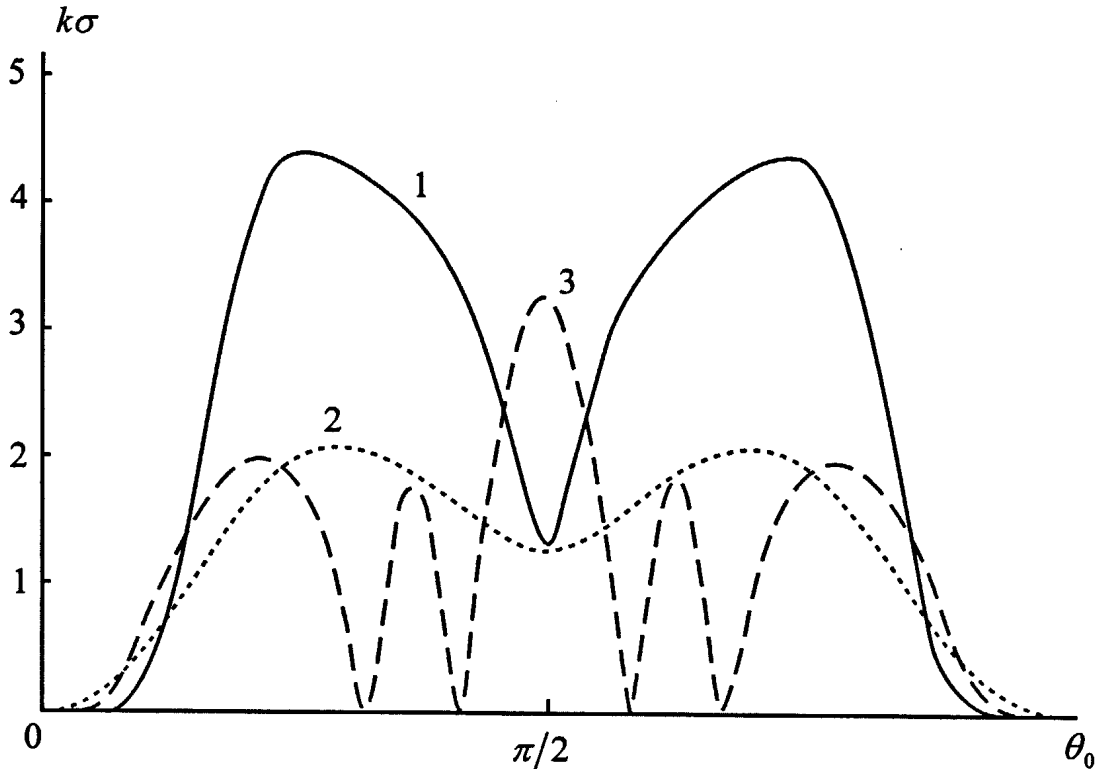


Рис.1.6. Зависимость полного сечения рассеяния от угла падения θ_0 при $\varphi_0 = 0$, $\psi = 5,7^\circ$ для фиксированных значений частот: $ka = 0.24$ (кривая 1), $ka = 0.3$ (кривая 2) и $ka = 0.39$ (кривая 3).

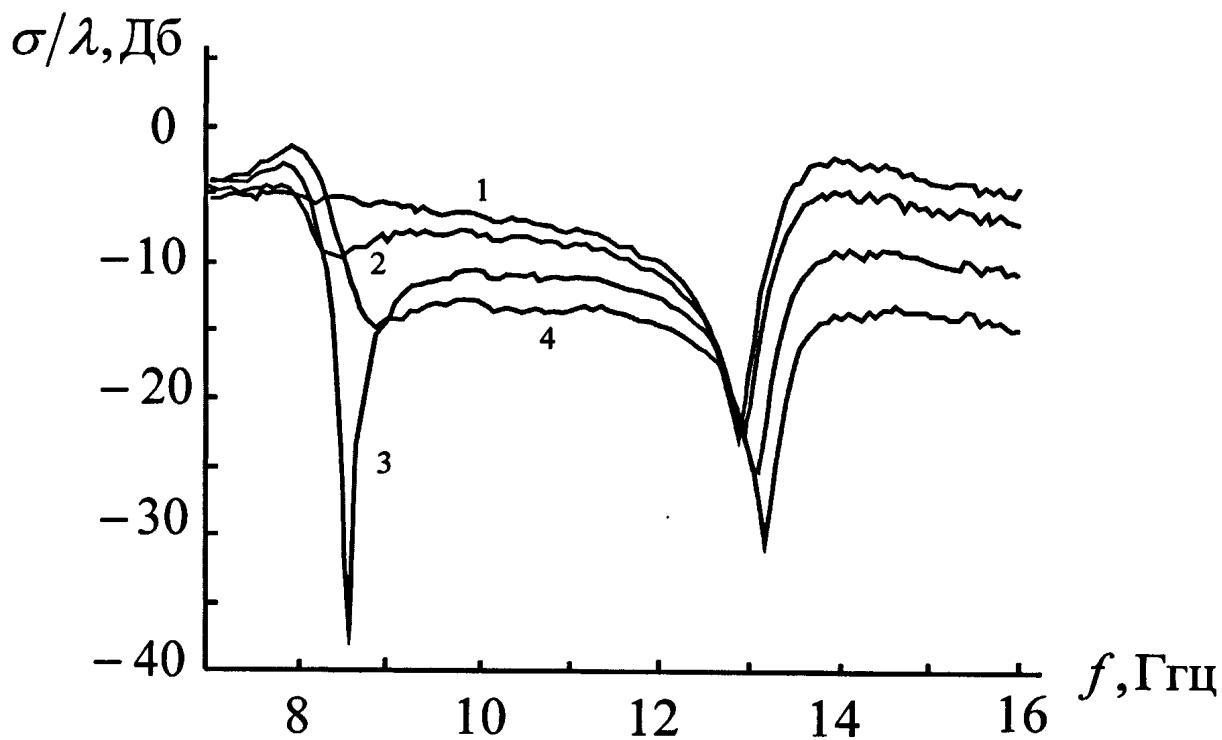
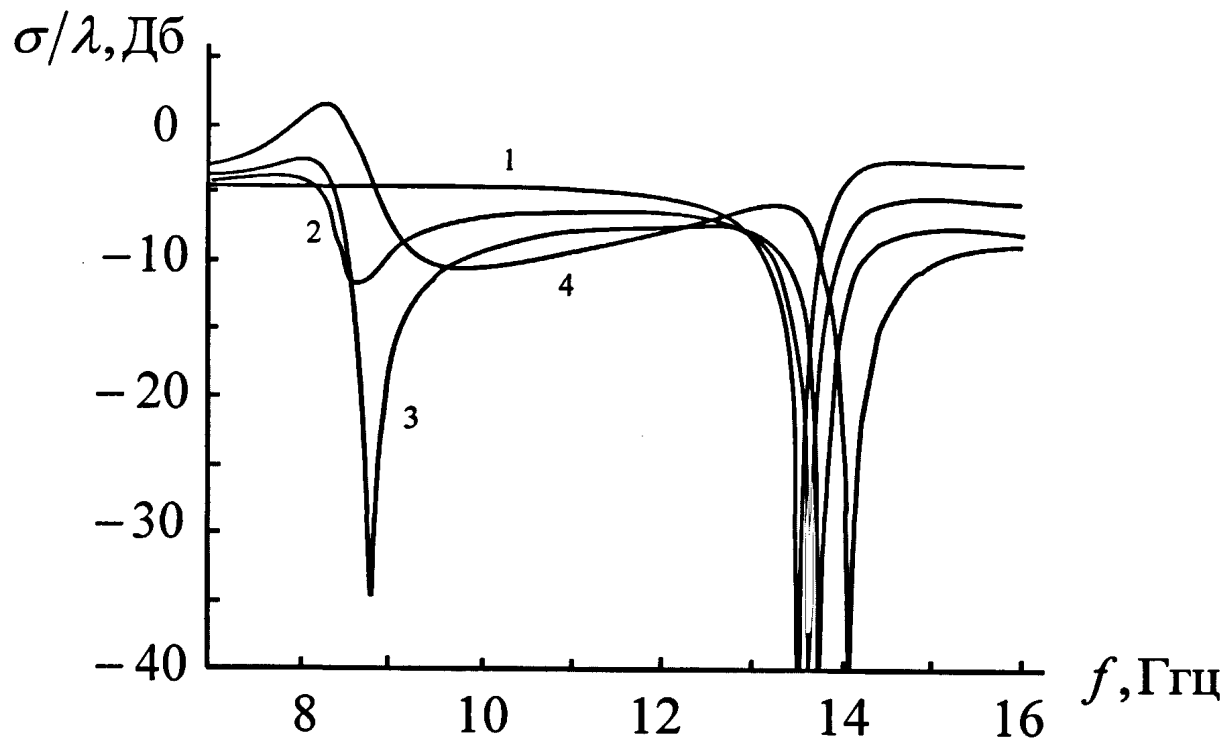


Рис. 1.7. Зависимость нормированного сечения рассеяния анизотропно проводящей ленты от частоты при различных значениях угла падения плоской волны φ_0 (слева - теория, справа - эксперимент, проведенный в ИРЭ РАН). Кривые 1-4 соответствуют $\varphi_0 = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Глава 2. Рассеяние на тонком анизотропно проводящем цилиндре с узкой продольной щелью

2.1. Постановка задачи

Рассматривается задача дифракции плоских волн с круговой поляризацией на незамкнутой цилиндрической поверхности с винтовой проводимостью (рис. 2.1). На поверхности цилиндра ($r = a$, $|\varphi| \leq \theta \leq \pi$) граничные условия Владимирского для полного поля $\vec{E}^0 + \vec{E}^S$, $\vec{H}^0 + \vec{H}^S$ принимают следующий вид:

$$E_z^+ = E_z^-, \quad (2.1.1)$$

$$E_\varphi^+ = E_\varphi^-, \quad (2.1.2)$$

$$E_z \sin \alpha + E_\varphi \cos \alpha = 0, \quad (2.1.3)$$

$$(H_z^+ - H_z^-) \sin \alpha + (H_\varphi^+ - H_\varphi^-) \cos \alpha = 0, \quad (2.1.4)$$

где α - угол подъема винтовых линий проводимости, которые для определенности предполагаем правыми: $0 < \alpha < \pi/2$. Индексы "+" и "-" в (2.1.1)-(2.1.2), (2.1.4) и далее соответствуют областям $r > a$ и $r < a$.

Рассматривается случай, когда направление распространения падающей волны лежит в плоскости (x, y) и составляет угол φ_0 с осью x . В этой волне z -компоненты электромагнитного поля выражаются формулами

$$H_z^0 = \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad (2.1.5)$$

$$E_z^0 = \pm i \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)]. \quad (2.1.6)$$

Здесь и далее верхний и нижний знаки относятся к задачам о правой и левой круговой поляризации.

2.2. Поле поверхностных винтовых токов

Найдем поле, которое создают в свободном пространстве не зависящие от координаты z электрические токи $f(\varphi)$, текущие вдоль винтовых линий по цилиндрической поверхности $r = a$, которая может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Ток связан со скачками тангенциальных компонент магнитного поля на поверхности $r = a$ формулами

$$H_z^+ - H_z^- = -f(\varphi)\cos\alpha, \quad (2.2.1)$$

$$H_\varphi^+ - H_\varphi^- = f(\varphi)\sin\alpha. \quad (2.2.2)$$

Если цилиндрическая поверхность незамкнутая, то $f(\varphi) = 0$ при $\theta \leq \varphi \leq \pi$, и в частности

$$f(\pm\theta) = 0 \quad (2.2.3)$$

Представим ток в виде разложения в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in\varphi), \quad \varphi \leq \pi. \quad (2.2.4)$$

Внутри цилиндра $r = a$ компоненты электромагнитного поля могут быть представлены в виде ряда по функциям Бесселя, а вне его – по функциям Ханкеля второго рода:

$$H_z^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n^H H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi, \quad H_z^+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n^H J_n(kr) \cos n\varphi, \quad (2.2.5)$$

$$E_z^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n^E H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi, \quad E_z^+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n^E J_n(kr) \cos n\varphi. \quad (2.2.6)$$

Условие (2.2.1) вместе с условием непрерывности производной $\partial/\partial r$ на поверхности $r = a$ для z -компоненты поля H дает:

$$K_n^H H_n^{(2)'}(ka) = L_n^H J_n'(ka), \quad (2.2.7)$$

$$K_n^H H_n^{(2)}(ka) - L_n^H J_n(ka) = -C_n \cos\alpha. \quad (2.2.8)$$

Решая эту систему относительно коэффициентов K_n^H и L_n^H и используя свойство вронскиана двух решений уравнения Бесселя

$$J_n' H_n^{(2)} - J_n H_n^{(2)'} = 2/i\pi ka, \quad (2.2.9)$$

получаем, что поверхностный ток (2.2.4) создает электромагнитное поле, у которого z -компоненты поля H вне и внутри цилиндра имеют вид

$$\begin{cases} H_z^+ \\ H_z^- \end{cases} = \frac{i\pi ka}{2} \cos\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \begin{cases} J_n'(ka) H_n^{(2)}(kr) \\ H_n^{(2)'}(ka) J_n(kr) \end{cases} \exp(in\varphi). \quad (2.2.10)$$

Чтобы получить выражение для поля E через коэффициенты разложения тока (2.2.4), воспользуемся тем, что во всем поле $\partial/\partial z = 0$. При этом из уравнений Максвелла следует, в частности,

$$H_\varphi = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (2.2.11)$$

Используя (2.1.1), (2.2.2) и (2.2.11), получаем

$$K_n^E H_n^{(2)}(kr) - L_n^E J_n(kr) = 0 \quad (2.2.12)$$

$$-iK_n^E H_n^{(2)'}(kr) + iL_n^E J_n'(kr) = C_n \sin \alpha \quad (2.2.13)$$

Решая эту систему относительно коэффициентов K_n^E и L_n^E и используя свойство (2.2.9), получаем:

$$\begin{Bmatrix} E_z^+ \\ E_z^- \end{Bmatrix} = -\frac{\pi ka}{2} \sin \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \begin{Bmatrix} J_n(ka) H_n^{(2)}(kr) \\ H_n^{(2)}(ka) J_n(kr) \end{Bmatrix} \exp(in\varphi) \quad (2.2.14)$$

В дальней зоне электромагнитное поле имеет вид расходящейся цилиндрической волны

$$H_z^+ \approx \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{kr}} \Phi_H(\varphi), \quad E_z^+ \approx \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{kr}} \Phi_E(\varphi) \quad (2.2.15)$$

Представим диаграммы излучения в виде разложений

$$\Phi_H(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^H \exp(in\varphi), \quad \Phi_E(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^E \exp(in\varphi) \quad (2.2.16)$$

Предполагая, что радиус цилиндра мал по сравнению с длиной волны ($ka \ll 1$), выразим коэффициенты C_n^H , C_n^E через C_n . Используя асимптотические представления для цилиндрических функций

$$J_n(ka) \approx \frac{(ka)^n}{2^n n!} \text{ при } ka \ll 1, \quad (2.2.17)$$

$$H_n^{(2)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[\frac{i\pi}{4}(2n+1)\right] \frac{1}{\sqrt{kr}} \exp(-ikr) \text{ при } kr \gg 1, \quad (2.2.18)$$

из (2.2.10) и (2.2.14) получим

$$\begin{aligned} ik^2 a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{(ka)^{n-1}}{2^n (n-1)!} \exp\left[\frac{i\pi}{4}(2n+1)\right] \frac{1}{\sqrt{kr}} \exp(-ikr) \exp(in\varphi) = \\ = \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{kr}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^H \exp(in\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -ka \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{(ka)^n}{2^n n!} \exp\left[\frac{i\pi}{4}(2n+1)\right] \frac{1}{\sqrt{kr}} \exp(-ikr) \exp(in\varphi) = \\ = \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{kr}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^E \exp(in\varphi), \end{aligned}$$

из чего следует:

$$C_0^H = -\frac{i\sqrt{2\pi}(ka)^2}{4} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \cos \alpha C_0, \quad (2.2.19)$$

$$C_0^E = -\frac{\sqrt{2\pi}ka}{2} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \sin \alpha C_0, \quad (2.2.20)$$

$$C_n^H = \frac{i\sqrt{2\pi}(ka)^{|n|}}{2^{|n|+1}(|n|-1)!} \exp\left(i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}|n|\right) \cos \alpha C_n, \quad |n| \geq 1, \quad (2.2.21)$$

$$C_n^E = -\frac{\sqrt{2\pi}(ka)^{|n|+1}}{2^{|n|+1}|n|!} \exp\left(i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}|n|\right) \sin \alpha C_n, \quad |n| \geq 1, \quad (2.2.22)$$

Из (2.2.21) и (2.2.22) видно, что вклад гармоник больших номеров в диаграммы существенно ослаблен по сравнению с их весом в разложении тока. Поэтому для описания диаграмм рассеяния на малых объектах, как правило, достаточно двух низших гармоник: $n = 0$, $|n| = 1$.

Из (2.2.19), (2.2.20) следует, что на частоте, определяемой выражением

$$ka = 2\nu \quad (2.2.23)$$

поле нулевой гармоники будет иметь левую круговую поляризацию: $C_0^H = iC_0^E$. Выполнение условия (2.2.23) возможно только в случае, когда угол подъема мал ($\nu = \operatorname{tg} \alpha \ll 1$).

При больших углах подъема становится возможным выполнение условия

$$ka = |n|/\nu, \quad |n| \geq 1. \quad (2.2.24)$$

Как следует из (2.2.21), (2.2.22), на частотах, удовлетворяющих условию (2.2.24), поля высших гармоник будут иметь правую круговую поляризацию: $C_n^H = -iC_n^E$. Формула (2.2.24) совпадает с выражением для резонансных частот замкнутого цилиндра [63].

Таким образом, для того чтобы излучение поверхностных токов было ненаправленным и имело круговую поляризацию, необходимо выполнение условия (2.2.23). При этом, учитывая, что $\alpha \ll 1$, из (2.2.19) – (2.2.22) получим

$$C_0^H = iC_0^E = -\frac{i\sqrt{2\pi}(ka)^2}{4} \exp\left(i\frac{\pi}{4} C_0\right), \quad (2.2.25)$$

$$C_n^H = -i\frac{2|n|}{(ka)^2} C_n^E = \frac{i\sqrt{2\pi}(ka)^{|n|}}{2^{|n|+1}(|n|-1)!} \exp\left(i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}|n|\right) C_n. \quad (2.2.26)$$

Из (2.2.26) следует, что высшими гармониками диаграммы Φ_E можно пренебрегать, так как они в $1/(ka)^2$ раз меньше соответствующих гармоник диаграммы Φ_H . Для того, чтобы нулевая гармоника диаграммы Φ_H была доминирующей, например, превосходила первую гармонику в $1/ka$ раз, необходимо, чтобы первая гармоника тока была меньше нулевой гармоники в $1/(ka)^2$ раз.

В [68] для случая H -поляризации обнаружен низкочастотный резонанс в полом металлическом цилиндре с узкой продольной щелью. Заметим, что эта задача является частным случаем рассматриваемой задачи, когда $\alpha = 0$. Частота этого резонанса определяется формулой

$$ka = \left| 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \right|^{-1/2}, \quad \pi - \theta \ll 1, \quad (2.2.27)$$

при этом ток описывается функцией

$$f_1(\varphi) = \ln \left[\left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right] - \ln \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.2.28)$$

Функция (2.2.28) обращается в нуль при $\varphi = \pm\theta$. Вычислим ее коэффициенты Фурье. Так как функция четная,

$$\int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = 0 \quad (2.2.29)$$

при любых n . Найдем коэффициенты разложения

$$\int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (2.2.30)$$

При $n = 0$ воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) d\varphi &= \left\{ \ln \left[\left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right] - \ln \cos \frac{\theta}{2} \right\} \varphi \Big|_{-\theta}^{\theta} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2}} d\varphi \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Аналогичным образом по формуле интегрирования по частям при $n \geq 1$ получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi &= \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \ln \left[\left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right] - \ln \cos \frac{\theta}{2} \right\} \sin n\varphi \Big|_{-\theta}^{\theta} + \\ &+ \frac{1}{2n} \int_{-\theta}^{\theta} \sin n\varphi \sin \frac{\varphi}{2} \frac{1}{\left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2}} d\varphi \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Интеграл в (2.2.32) также выражается через полиномы Лежандра. Будем использовать следующие формулы [92]:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} d\varphi, \quad (2.2.33)$$

$$P_{-n-1}(z) = P_n(z), \quad (2.2.34)$$

$$\left[\frac{\partial P_n(\cos \varphi)}{\partial n} \right]_{n=0} = 2 \ln \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (2.2.35)$$

Тогда из (2.2.33) и (2.2.34) следует:

$$P_{-n}(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} d\varphi \quad (2.2.36).$$

Из (2.2.33) и (2.2.36) получаем формулы:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^\theta \frac{\cos n\varphi \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi = P_{-n}(\cos \theta) + P_n(\cos \theta), \quad (2.2.37)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^\theta \frac{\sin n\varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi = P_{-n}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta), \quad (2.2.38)$$

а из (2.2.33) и (2.2.35) получаем

$$\begin{aligned} 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} &= \left[\frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial n} \right]_{n=0} = \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} d\varphi \right]_{n=0} = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} d\varphi \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

Сравнивая выражения (2.2.39) и (2.2.31) получаем

$$\int_{-\theta}^\theta f_1(\varphi) d\varphi = -2\pi \ln \cos \frac{\theta}{2}. \quad (2.2.40)$$

Из (2.2.32) и (2.2.38) получаем коэффициенты разложения:

$$\int_{-\theta}^\theta f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} -2\pi \ln \cos \frac{\theta}{2}, & n = 0 \\ \frac{\pi}{2n} [P_{-n}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta)], & n \geq 1 \end{cases}. \quad (2.2.41)$$

Из (2.2.27), (2.2.41) следует, что на резонансной частоте амплитуда нулевой гармоники тока превосходит амплитуды высших гармоник в $\frac{1}{(ka)^2}$ раз, что гарантирует изотропность рассеяния.

Ниже будет показано, что формулы (2.2.27), (2.2.28), полученные для $\alpha = 0$, применимы и к случаю малых углов подъема (2.2.23), которые обеспечивают круговую поляризацию рассеянного поля.

2.3. Интегро-дифференциальное уравнение для плотности поверхностного тока

Из граничного условия (2.1.4) следует, что объемная плотность электрического тока $\vec{j}^{(e)}$ имеет вид

$$\vec{j}_r^{(e)} = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\vec{j}_\varphi^{(e)} = \cos \alpha f(\varphi) \delta(r - a), \quad (2.3.2)$$

$$\vec{j}_z^{(e)} = \sin \alpha f(\varphi) \delta(r - a), \quad (2.3.3)$$

где $f(\varphi)$ - плотность поверхностного тока (см. (2.2.1)-(2.2.2)). Условия (2.1.1) и (2.1.2) означают, что на цилиндрической поверхности нет магнитных токов: $\vec{j}_r^{(m)} = 0$. Поэтому рассеянное поле \vec{E}^s , \vec{H}^s создано только электрическими токами, и его можно выразить через электрический вектор Герца $\vec{\Pi}^{(e)}$ по формулам:

$$\vec{E}^s = \vec{\Pi}^{(e)} + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \vec{\Pi}^{(e)}, \quad (2.3.4)$$

$$\vec{H}^s = \frac{i}{k} \text{rot } \vec{\Pi}^{(e)}. \quad (2.3.5)$$

При этом вектор Герца удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \vec{\Pi}^{(e)} + k^2 \vec{\Pi}^{(e)} = ik \vec{j}^{(e)}. \quad (2.3.6)$$

Из формул (2.3.1) и (2.3.2) следует, что декартовы компоненты объемной плотности тока имеют вид

$$j_x^{(e)} = -\cos \alpha \sin \varphi f(\varphi) \delta(r - a), \quad (2.3.7)$$

$$j_y^{(e)} = \cos \alpha \cos \varphi f(\varphi) \delta(r - a). \quad (2.3.8)$$

С помощью двумерной функции Грина свободного пространства

$$G(r, \varphi, r', \varphi') = \frac{i}{4} H_0^{(2)} \left[k \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')} \right] \quad (2.3.9)$$

решение векторного уравнения (2.3.6), у которого правая часть определена согласно (2.3.3), (2.3.7), (2.3.8), может быть представлено интегралами

$$\Pi_x^{(e)} = -ika \cos \alpha \int_{-\theta}^{\theta} G(r, \varphi, a, \varphi') \sin \varphi' f(\varphi') d\varphi', \quad (2.3.10)$$

$$\Pi_y^{(e)} = ika \cos \alpha \int_{-\theta}^{\theta} G(r, \varphi, a, \varphi') \cos \varphi' f(\varphi') d\varphi', \quad (2.3.11)$$

$$\Pi_z^{(e)} = ika \sin \alpha \int_{-\theta}^{\theta} G(r, \varphi, a, \varphi') f(\varphi') d\varphi'. \quad (2.3.12)$$

Из (2.3.10), (2.3.11) получим следующие выражения для компонент вектора Герца в цилиндрической системе координат

$$\Pi_r^{(e)} = ika \cos \alpha \int_{-\theta}^{\theta} G(r, \varphi, a, \varphi') \sin(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi', \quad (2.3.13)$$

$$\Pi_{\varphi}^{(e)} = ika \cos \alpha \int_{-\theta}^{\theta} G(r, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi'. \quad (2.3.14)$$

Перепишем граничное условие (2.1.3) в виде

$$(E_z^0 + E_z^s) \sin \alpha + (E_{\varphi}^0 + E_{\varphi}^s) \cos \alpha = 0, \quad r = a, \quad |\varphi| \leq \theta, \quad (2.3.15)$$

где \vec{E}^0 - электрическое поле падающей плоской волны. Выражение (2.3.4) для компонент E_z и E_{φ} в цилиндрической системе координат при $\partial/\partial z = 0$ принимает вид

$$E_z = \Pi_z, \quad (2.3.16)$$

$$E_{\varphi} = \Pi_{\varphi} + \frac{1}{k^2 r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \Pi_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \quad (2.3.17)$$

Подставляя в (2.3.15) выражения для рассеянного электрического поля, найденные из (2.3.16), (2.3.17), (2.3.12) - (2.3.14), получим интегродифференциальное уравнение для функции $f(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} A(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' + \frac{d}{d\varphi} \int_{-\theta}^{\theta} B(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' + \\ + \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' = F(\varphi). \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Ядра A , B и C выражаются через функцию Грина следующим образом:

$$A = \frac{\cos^2 \alpha}{ka} G(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi'), \quad (2.3.19)$$

$$B = \frac{\cos^2 \alpha}{ka} \left[G(a, \varphi, a, \varphi') + a \frac{\partial}{\partial r} G(a, \varphi, a, \varphi') \right] \sin(\varphi - \varphi'), \quad (2.3.20)$$

$$C = ka \sin^2 \alpha G(a, \varphi, a, \varphi') + ka \cos^2 \alpha G(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi'). \quad (2.3.21)$$

Правая часть уравнения (2.3.18) определяется формулой

$$F(\varphi) = [i \cos \alpha \cos(\varphi - \varphi_0) \mp \sin \alpha] \exp[-ika \cos(\varphi - \varphi_0)]. \quad (2.3.22)$$

Решение $f(\varphi)$ должно удовлетворять условию обращения в нуль тока на краях щели:

$$f(\theta) = f(-\theta) = 0. \quad (2.3.23)$$

Функция Грина (2.3.9) обладает свойством

$$a \sin(\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial r} G(a, \varphi, a, \varphi') = [1 - \cos(\varphi - \varphi')] \frac{\partial}{\partial \varphi} G(a, \varphi, a, \varphi'), \quad (2.3.24)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} G(r, \varphi, a, \varphi') &= \frac{ik[2r - 2a \cos(\varphi - \varphi')]}{8[r^2 + a^2 - 2ra \cos(\varphi - \varphi')]^{3/2}} H_0^{(2)'}(r, \varphi, a, \varphi'), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} G(r, \varphi, a, \varphi') &= \frac{ik[2ra \sin(\varphi - \varphi')]}{8[r^2 + a^2 - 2ra \cos(\varphi - \varphi')]^{3/2}} H_0^{(2)'}(r, \varphi, a, \varphi'). \end{aligned}$$

Преобразуем ядро в первом слагаемом в (2.3.18) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} G(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') &= \frac{d}{d\varphi} \left[\cos(\varphi - \varphi') \frac{d}{d\varphi} G(a, \varphi, a, \varphi') \right] - \\ &\quad - \frac{d}{d\varphi} \sin(\varphi - \varphi') G(a, \varphi, a, \varphi') \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Используя свойства (2.3.24) и (2.3.25), интегродифференциальное уравнение (2.3.18) можно преобразовать к более простой форме:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' + \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' = F(\varphi), \quad (2.3.26)$$

где

$$D = \frac{\cos^2 \alpha}{ka} G(a, \varphi, a, \varphi'), \quad (2.3.27)$$

а C определено в (2.3.21). Таким образом, задача дифракции сведена к нахождению из интегродифференциального уравнения (2.3.26) поверхностного тока $f(\varphi)$, который должен подчиняться конечным условиям (2.3.23). Ядра уравнения (2.3.26) определены формулами (2.3.21), (2.3.27), в которых аргументом функции Грина (см.(2.3.9)) является длина хорды, проведенной между точками (a, φ) и (a, φ') :

$$G(a, \varphi, a, \varphi') = \frac{i}{4} H_0^{(2)} \left(2ka \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right| \right). \quad (2.3.28)$$

2.4. Предельный вид токов при $ka \rightarrow 1$

Условие $ka \ll 1$ позволяет воспользоваться приближенным выражением для функции Грина (2.3.28):

$$G_0(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \ln \left(i\gamma ka \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right| \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\varphi - \varphi')}{n}, \quad (2.4.1)$$

где $\gamma = 1.78\dots$ - постоянная Эйлера.

Оператор в уравнении (2.3.26) состоит из двух частей, которым соответствуют ядра C и D , причем при $ka \ll 1$ эти ядра соответственно прямо и обратно пропорциональны частоте. Пренебрегая в уравнении (2.3.26) оператором C , получим

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} G_0(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' = \frac{ka}{\cos^2 \alpha} F(\varphi) \quad (2.4.2)$$

Используя разложения

$$\exp[-ika \cos(\varphi - \varphi_0)] \cos(\varphi - \varphi_0) = iJ'_0(ka) + 2i \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J'_n(ka) \cos n(\varphi - \varphi_0),$$

$$\exp[-ika \cos(\varphi - \varphi_0)] = J_0(ka) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(ka) \cos n(\varphi - \varphi_0), \quad (2.4.3)$$

представим функцию $F(\varphi)$, определенную согласно (2.3.22), в виде разложения в ряд Фурье:

$$F(\varphi) = -\cos \alpha J'_0(ka) \mp \sin \alpha J_0(ka) -$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n [\cos \alpha J'_n(ka) \pm \sin \alpha J_n(ka)] \cos n(\varphi - \varphi_0). \quad (2.4.4)$$

При $ka \ll 1$ и $\nu \ll 1$ можно считать $\cos \alpha \approx 1$, $J'_0(ka) \approx -ka/2$, $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \nu$, $J'_1(ka) \approx 1/2$, и в (2.4.4) достаточно оставить нулевую и первую гармоники:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} ka \mp \nu + i \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (2.4.5)$$

Определим функции $f_2(\varphi)$ и $f_3(\varphi)$ формулами

$$f_2(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (2.4.6)$$

$$f_3(\varphi) = \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (2.4.7)$$

Функции, определенные согласно (2.4.6), (2.4.7) так же как $f_1(\varphi)$ удовлетворяют условию (2.2.3) обращения в нуль на краях щели. Используя тождества (см. прил. 2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi [P_{-n}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta)] = 1, \quad |\varphi| < \theta, \quad (2.4.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n}(\cos\theta) + P_n(\cos\theta)] = 0, \quad |\varphi| < \theta, \quad (2.4.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \{ [P_{-n-1}(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta)] + [P_{-n+1}(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)] \} = \\ = 2 \cos \varphi - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad |\varphi| < \theta. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi \{ [P_{-n-1} + P_{n+1}] + [P_{-n+1} + P_{n-1}] \} = 2 \sin \varphi, \quad |\varphi| < \theta. \quad (2.4.11)$$

покажем, что функции f_m ($m=1,2,3$), определенные согласно (2.2.28), (2.4.6) и (2.4.7), удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} G_0(\varphi - \varphi') \begin{Bmatrix} f_1(\varphi') \\ f_2(\varphi') \\ f_3(\varphi') \end{Bmatrix} d\varphi' = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.4.12)$$

с ядром $G_0(\varphi - \varphi')$, определенным согласно (2.4.1). Нужно вычислить $F_n(\varphi)$:

$$F_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} f_n(\varphi') \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right| d\varphi', \quad n=1,2,3. \quad (2.4.13)$$

где функции $f_n(\varphi)$ обладают свойством

$$f_n(-\theta) = f_n(\theta) = 0, \quad n=1,2,3. \quad (2.4.14)$$

Внося в (2.4.13) операцию однократного дифференцирования под знак интеграла и интегрируя по частям с учетом (2.4.14), получим:

$$F_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\varphi} \int_{-\theta}^{\theta} f'_n(\varphi') \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right| d\varphi' \quad (2.4.15)$$

Для первых производных от функций $f_n(\varphi)$ имеем:

$$f'_1(\varphi) = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (2.4.16)$$

$$\begin{aligned} f'_2(\varphi) &= -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos \varphi \right) = \\ &= \sin^2 \frac{\theta}{2} f'_1(\varphi) - \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

$$f_2'(\varphi) = -\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos \varphi \right) \quad (2.4.18)$$

Будем использовать разложение

$$\ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi \cos n\varphi'}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi \sin n\varphi'}{n}. \quad (2.4.19)$$

Вычислим $F_1(\varphi)$. Так как $f_1'(\varphi')$ - нечетная функция, подставим в (2.4.15) нечетную часть выражения (2.4.19):

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sin n\varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} [P_{-n}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta)] = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi [P_{-n}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta)] = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

При получении (2.4.20) использовалась формула (2.4.8). Вычислим $F_2(\varphi)$:

$$F_2(\varphi) = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sin n\varphi \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi. \quad (2.4.21)$$

Подставим в (2.4.21)

$$\sin n\varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} [\sin(n+1)\varphi + \sin(n-1)\varphi], \quad (2.4.22)$$

тогда с учетом (2.4.10)

$$\begin{aligned} F_2(\varphi) &= \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{8} \frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} [P_{-n-1} - P_{n+1} + P_{-n+1} - P_{n-1}] = \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{8} \left(2 \cos \varphi - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{4} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Вычислим $F_3(\varphi)$. Подставим в (2.4.15) выражение (2.4.18) и четную часть разложения (2.4.19):

$$F_3(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\cos n\varphi \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{d}{d\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\cos n\varphi \cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi. \quad (2.4.24)$$

Подставим в (2.4.24)

$$\cos n\varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} [\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi], \quad (2.4.25)$$

тогда с учетом (2.4.9) и (2.4.11)

$$F_3(\varphi) = -\frac{1}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n} - P_n] + \\ + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n-1} + P_{n+1} + P_{-n+1} + P_{n-1}] = \frac{1}{4} \sin n\varphi. \quad (2.4.26)$$

Из сравнения (2.4.2), (2.4.5) с (2.4.12) следует, что ток $f(\varphi)$ при $ka \ll 1$ будет линейной комбинацией функций $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$, $f_3(\varphi)$ с коэффициентами, равными соответственно $2ka(k\alpha \mp 2\nu)$, $4ika \cos \varphi_0$, $4ika \sin \varphi_0$.

В рассматриваемой задаче кроме параметра ka есть другие малые параметры ν и $\pi - \theta$. Поэтому само по себе условие $ka \ll 1$ малосодержательно и сформулированный выше результат будет справедлив лишь при определенном соотношении между величиной ka и этими параметрами.

2.5. Низкочастотный резонанс

Пренебрежение при $ka \ll 1$ ядром C в уравнении (2.3.26) становится неправомерным, если щель узкая ($\theta \rightarrow \pi$). Действительно, если допустить, что нулевая гармоника тока превосходит остальные в $\frac{1}{(ka)^2}$ раз (именно таким свойством обладает функция $f_1(\varphi)$, когда величина θ определена согласно (2.2.27)), то оба слагаемых в левой части уравнения (2.3.26) имеют один порядок. На некоторой частоте происходит их взаимная компенсация и становится возможным существование у соответствующего однородного уравнения нетривиального решения.

Определим резонансную частоту, предполагая, что угол подъема α мал ($\alpha = O(ka)$, см. (2.2.23)). В этом случае можно пренебречь первым слагаемым ядра C в (2.3.21). При вычислении второго слагаемого будем использовать следующее разложение, вытекающее из (2.4.1):

$$G_0(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi') =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{i\gamma ka}{2}\right) \cos(\varphi - \varphi') - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi')}{n} = \\
&= -\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{i\gamma ka}{2}\right) - \frac{1}{4} \right] \cos(\varphi - \varphi') - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} \cos n(\varphi - \varphi'). \quad (2.5.1)
\end{aligned}$$

Ограничившись нулевой гармоникой $-1/4\pi$ разложения (2.5.1) для второго слагаемого ядра C , получим искомое уравнение для нахождения собственного тока и собственной частоты

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} G_0(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' - \frac{(ka)^2}{4\pi} \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi') d\varphi' = 0. \quad (2.5.2)$$

В соответствии с выражениями (2.2.41) и (2.4.12) решением этого уравнения является функция $f_1(\varphi)$; при этом величина ka определяется формулой (2.2.27).

Разумеется, собственная частота должна быть комплексной, однако для нахождения ее мнимой части, характеризующей добротность колебания, требуются более точные расчеты, которые будут проведены далее.

2.6. Квазистатическое решение задачи дифракции

Предполагая параметры ka , α , $\pi - \theta$ малыми, ищем решение уравнения (2.3.26) в виде

$$f(\varphi) = A_1 f_1(\varphi) + A_2 f_2(\varphi) + A_3 f_3(\varphi). \quad (2.6.1)$$

Коэффициенты A_m определим с помощью вариационного принципа. Покажем, что если $f(\varphi)$ является решением уравнения (2.3.26), то функционал

$$\begin{aligned}
\Omega = & 2 \int_{-\theta}^{\theta} F(\varphi) f(\varphi) d\varphi - \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') f(\varphi) f(\varphi') d\varphi d\varphi' + \\
& + \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') f'(\varphi) f'(\varphi') d\varphi d\varphi' \quad (2.6.2)
\end{aligned}$$

стационарен на решениях задачи (2.3.26), (2.3.23) и принимает на этих решениях значение

$$\Omega(f) = \int_{-\theta}^{\theta} F(\varphi) f(\varphi) d\varphi \quad (2.6.3)$$

Возьмем вариацию функционала (2.6.2):

$$\delta\Omega = 2 \int_{-\theta}^{\theta} F(\varphi) \delta f(\varphi) d\varphi -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') \delta f(\varphi) f(\varphi') d\varphi d\varphi' - \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') f(\varphi) \delta f(\varphi') d\varphi d\varphi' + \\
& + \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') \delta f'(\varphi) f'(\varphi') d\varphi d\varphi' + \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') f'(\varphi) \delta f'(\varphi') d\varphi d\varphi'
\end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Пользуясь тем, что ядра C и D симметричны относительно замены $\varphi \rightarrow \varphi'$, $\varphi' \rightarrow \varphi$, (2.6.4) можно записать в более простом виде:

$$\begin{aligned}
\delta\Omega = & 2 \int_{-\theta}^{\theta} F(\varphi) \delta f(\varphi) d\varphi - 2 \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') \delta f(\varphi) f(\varphi') d\varphi d\varphi' + \\
& + 2 \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') \delta f'(\varphi) f'(\varphi') d\varphi d\varphi'.
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Последнее слагаемое в (2.6.4) преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям и условием (2.3.23) обращения тока в нуль на краях щели:

$$2 \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') \delta f'(\varphi) f'(\varphi') d\varphi d\varphi' = -2 \int_{-\theta}^{\theta} \delta f(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') f'(\varphi') d\varphi' d\varphi$$

Тогда (2.6.5) можно записать в следующем виде:

$$\delta\Omega = 2 \int_{-\theta}^{\theta} \delta f(\varphi) \left[F(\varphi) - \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' - \frac{d}{d\varphi} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') f'(\varphi') d\varphi' \right] d\varphi \tag{2.6.6}$$

Применив еще раз формулу интегрирования по частям к последнему слагаемому, стоящему в квадратных скобках в (2.6.6), и пользуясь тем, что

$$\frac{d}{d\varphi} D(\varphi - \varphi') = -\frac{d}{d\varphi'} D(\varphi' - \varphi) \tag{2.6.7}$$

$$-\frac{d}{d\varphi} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') f'(\varphi') d\varphi' = -\frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' \tag{2.6.8}$$

В результате выражение, стоящее в квадратных скобках в (2.6.6) равно нулю, поскольку $f(\varphi)$ является решением уравнения (2.3.26), и следовательно $\delta\Omega = 0$. Точно так же, используя формулу интегрирования по частям, покажем, что на решениях уравнения (2.3.26) выполняется (2.6.3):

$$\begin{aligned}
\Omega = & \int_{-\theta}^{\theta} F(\varphi) f(\varphi) d\varphi + \\
& + \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) \left[F(\varphi) - \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' - \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' \right] d\varphi
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (2.6.9) на решениях уравнения (2.3.26) равно нулю, что означает справедливость (2.6.3). Подставляя $f(\varphi)$ в (2.6.2) в виде (2.6.1), получаем:

$$\Omega(A_1, A_2, A_3) = 2 \sum_{l=1}^3 A_l B_l - \sum_{l,m=1}^3 a_{lm} A_l A_m \quad (2.6.10)$$

где

$$a_{lm} = \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') f_l(\varphi) f_m(\varphi') d\varphi d\varphi' - \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} D(\varphi - \varphi') f_l'(\varphi) f_m'(\varphi') d\varphi d\varphi', \quad (2.6.11)$$

$$B_l = \int_{-\theta}^{\theta} F(\varphi) f_l(\varphi) d\varphi. \quad (2.6.12)$$

Условия стационарности $\frac{\partial \Omega}{\partial A_l} = 0$ ($l=1,2,3$) приводят к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов A_m :

$$\sum_{m=1}^3 a_{lm} A_m = B_l \quad (2.6.13)$$

Как и в задаче о дифракции на анизотропно проводящей ленте (Глава 1), для того чтобы правильно оценить добротность резонанса, необходимо ядро G_0 (см. (2.4.1)) дополнить слагаемым

$$G_1(\varphi - \varphi') = -\frac{i}{8} (ka)^2 [1 - \cos(\varphi - \varphi')], \quad (2.6.14)$$

позволяющим более точно аппроксимировать мнимую часть функции Грина (2.3.28).

В случае узкой щели можно использовать упрощенные представления для функций $f_m(\varphi)$. Полагая в (2.4.6), (2.4.7) $\theta = \pi$, получим

$$f_2(\varphi) \approx \frac{1 + \cos \varphi}{2}, \quad f_3(\varphi) \approx \frac{1}{2} \sin \varphi. \quad (2.6.15)$$

Для вычисления коэффициентов в (2.6.13) будем пользоваться приближенными значениями коэффициентов Фурье для функции $f_1(\varphi)$, пользуясь тем, что $\cos \theta \rightarrow -1$ при $\theta \rightarrow \pi$. В соответствии с формулами [92]

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (2.6.16)$$

$$P_{-n}(x) = P_{n-1}(x), \quad (2.6.17)$$

$$P_n(1) = 1 \quad (2.6.18)$$

из (2.2.41) получаем

$$\int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}, \quad n \geq 1. \quad (2.6.19)$$

По формулам (2.4.1), (2.5.1), (2.6.11), (2.6.14) и приближения (2.6.15), (2.6.19), а также предполагая, что $ka \ll 1$ и $\nu \ll 1$, найдем выражения для матричных элементов a_{lm} . При $l = m = 1$ ток выражается по формуле (2.2.28), в этом случае имеем

$$\begin{aligned}
 a_{11} = & ka \sin^2 \alpha \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_1(\varphi) f_1(\varphi') d\varphi d\varphi' + \\
 & + ka \cos^2 \alpha \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') f_1(\varphi) f_1(\varphi') d\varphi d\varphi' - \\
 & - \frac{\cos^2 \alpha}{ka} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_1'(\varphi) f_1'(\varphi') d\varphi d\varphi', \quad (2.6.20)
 \end{aligned}$$

где

$$G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') = G_0(a, \varphi, a, \varphi') + G_1(a, \varphi, a, \varphi'). \quad (2.6.21)$$

Для вычисления интегралов в (2.6.20) будем использовать формулу интегрирования по частям и полученные ранее выражения (2.2.41) и (2.6.19):

$$\begin{aligned}
 \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_1(\varphi) f_1(\varphi') d\varphi d\varphi' = & \\
 = & \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{i(ka)^2}{8} \right] \left(\int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) d\varphi \right)^2 - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_{-\theta}^{\theta} \cos n\varphi f_1(\varphi) d\varphi \right)^2 + \frac{i(ka)^2}{8} \left(\int_{-\theta}^{\theta} \cos \varphi f_1(\varphi) d\varphi \right)^2 = \\
 = & \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{i(ka)^2}{8} \right] \left(2\pi \ln \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} + \frac{i(ka)^2 \pi^2}{8}, \quad (2.6.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') f_1(\varphi) f_1(\varphi') d\varphi d\varphi' = & \\
 = & \left[\frac{i(ka)^2}{16} - \frac{1}{4\pi} \right] \left(\int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) d\varphi \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{4} - \frac{i\pi(ka)^2}{4} \right] \left(\int_{-\theta}^{\theta} \cos \varphi f_1(\varphi) d\varphi \right)^2 + \\
 & + \frac{i(ka)^2}{16} \left(\int_{-\theta}^{\theta} \cos 2\varphi f_1(\varphi) d\varphi \right)^2 - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} \left(\int_{-\theta}^{\theta} \cos n\varphi f_1(\varphi) d\varphi \right)^2 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{i(ka)^2}{16} - \frac{1}{4\pi} \right] \left(2\pi \ln \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 + \\
&+ \frac{\pi}{2} \left[\ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{4} - \frac{i\pi(ka)^2}{4} \right] + \frac{i\pi^2(ka)^2}{64} - \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}, \quad (2.6.23)
\end{aligned}$$

Для вычисления третьего интеграла в (2.6.20) можно также как при доказательстве стационарности функционала Ω воспользоваться симметричностью ядра G_{Ω} относительно перестановки φ и φ' :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_1'(\varphi) f_1'(\varphi') d\varphi d\varphi' = \\
&= - \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_1'(\varphi') d\varphi' d\varphi = \\
&= \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi') \frac{d}{d\varphi'} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') d\varphi' d\varphi = \\
&= - \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi') G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') d\varphi' d\varphi
\end{aligned}$$

При вычислении этого интеграла можно не учитывать поправку $G_1(a, \varphi, a, \varphi')$, поскольку $P_1'(\cos\theta) = const$, $P_{-1}'(\cos\theta) = const$, и поэтому соответствующая часть подынтегрального выражения $\frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi') G_1(a, \varphi, a, \varphi') d\varphi'$ вычисленная по формуле (2.2.41) в результате дифференцирования равна нулю. Используя полученные ранее формулы (2.4.12) и (2.2.41) получаем:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_1'(\varphi) f_1'(\varphi') d\varphi d\varphi' = \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_0(a, \varphi, a, \varphi') f_1'(\varphi) f_1'(\varphi') d\varphi d\varphi' = \\
&= -\frac{1}{4} \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} \ln \cos \frac{\theta}{2}. \quad (2.6.24)
\end{aligned}$$

В результате для коэффициента a_{11} из (2.6.20), (2.6.22)-(2.6.24) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= ka \sin^2 \alpha \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{i(ka)^2}{8} \right] \left(2\pi \ln \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} + \frac{i(ka)^2 \pi^2}{8} \right\} + \\
&+ ka \cos^2 \alpha \left\{ \left[\frac{i(ka)^2}{16} - \frac{1}{4\pi} \right] \left(2\pi \ln \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{2(ka)^2} \ln \cos \frac{\theta}{2} + \right. \\
&\left. + \frac{\pi}{2} \left[\ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{4} - \frac{i\pi(ka)^2}{4} \right] + \frac{i\pi^2(ka)^2}{64} - \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} \right\},
\end{aligned}$$

Пользуясь малостью параметров α , $\cos \frac{\theta}{2}$, имеем $\ln \cos \frac{\theta}{2} \gg 1$, $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \nu$, в результате чего

$$a_{11} \approx ka \left\{ \left[2\pi \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) \nu^2 + \frac{i\pi^2 (ka)^2}{4} - \pi \right] \left(\ln \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{2(ka)^2} \ln \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.6.25)$$

Матричные коэффициенты $a_{12} = a_{21}$ вычисляются аналогичным образом:

$$\begin{aligned} a_{12} = & ka \sin^2 \alpha \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_1(\varphi) f_2(\varphi') d\varphi d\varphi' + \\ & + ka \cos^2 \alpha \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') f_1(\varphi) f_2(\varphi') d\varphi d\varphi' - \\ & - \frac{\cos^2 \alpha}{ka} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_1'(\varphi) f_2'(\varphi') d\varphi d\varphi', \end{aligned} \quad (2.6.26)$$

где функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ выражаются по формулам (2.2.28) и (2.6.15).

$$\begin{aligned} & \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_1(\varphi) f_2(\varphi') d\varphi d\varphi' = \\ = & \theta \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{i(ka)^2}{8} \right] \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) d\varphi - \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{4\pi} - \frac{i(ka)^2}{16} \right) \int_{-\theta}^{\theta} \cos \varphi f_1(\varphi) d\varphi = \\ = & -2\theta\pi \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{i(ka)^2}{8} \right] \ln \cos \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{i\pi(ka)^2}{16} \right), \end{aligned} \quad (2.6.27)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') f_1(\varphi) f_2(\varphi') d\varphi d\varphi' = \\ = & \theta \left[\frac{i(ka)^2}{16} - \frac{1}{4\pi} \right] \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi) d\varphi + \\ + & \frac{\theta}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{4} - \frac{i\pi(ka)^2}{4} \right] \int_{-\theta}^{\theta} \cos \varphi f_1(\varphi) d\varphi = \\ = & -2\theta\pi \left[\frac{i(ka)^2}{16} - \frac{1}{4\pi} \right] \ln \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{4} \left[\ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{4} - \frac{i\pi(ka)^2}{4} \right], \end{aligned} \quad (2.6.28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_2'(\varphi) f_1'(\varphi') d\varphi d\varphi' = \\ = & - \int_{-\theta}^{\theta} f_2(\varphi) \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} f_1(\varphi') G_0(a, \varphi, a, \varphi') d\varphi' d\varphi = -\frac{\theta}{4}. \end{aligned} \quad (2.6.29)$$

В результате для коэффициентов $a_{12} = a_{21}$ из (2.6.26)-(2.6.29) получаем следующее выражение:

$$a_{12} = ka \sin^2 \alpha \left\{ -2\theta\pi \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{i(ka)^2}{8} \right] \ln \cos \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{i\pi(ka)^2}{16} \right) \right\} +$$

$$+ ka \cos^2 \alpha \left\{ 2\theta\pi \left[\frac{1}{4\pi} - \frac{i(ka)^2}{16} \right] 2\pi \ln \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{4} \left[\ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{4} - \frac{i\pi(ka)^2}{4} \right] \right\} + \frac{\theta \cos^2 \alpha}{4ka}. \quad (2.6.30)$$

Пользуясь предположением о том, что щель узкая ($\theta \approx \pi$), а так же малостью параметров α , $\cos \frac{\theta}{2}$, имеем $\ln \cos \frac{\theta}{2} \gg 1$, $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \nu$, в результате чего

$$a_{12} \approx -ka\nu^2 \pi \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) \ln \cos \frac{\theta}{2} - ka\pi \left[\frac{i\pi(ka)^2}{8} - \frac{1}{2} \right] \ln \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4ka}. \quad (2.6.31)$$

Обозначим

$$S = 1 + 2(ka)^2 \left[1 - i\frac{\pi}{4}(ka)^2 - 2\nu^2 \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) \right] \ln \cos \frac{\theta}{2}, \quad (2.6.32)$$

тогда коэффициенты a_{11} , a_{21} , a_{12} из (2.6.25) и (2.6.31) можно записать в более простом виде:

$$a_{11} = -\frac{\pi S \ln \cos \frac{\theta}{2}}{2ka}, \quad (2.6.33)$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\pi S}{4ka}. \quad (2.6.34)$$

Для коэффициента a_{22} получаем:

$$a_{22} = ka \sin^2 \alpha \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_2(\varphi) f_2(\varphi') d\varphi d\varphi' +$$

$$+ ka \cos^2 \alpha \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') f_2(\varphi) f_2(\varphi') d\varphi d\varphi' -$$

$$- \frac{\cos^2 \alpha}{ka} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_2'(\varphi) f_2'(\varphi') d\varphi d\varphi' =$$

$$= ka \theta^2 \sin^2 \alpha \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{i(ka)^2}{8} - \frac{1}{8\pi} + \frac{i(ka)^2}{32} \right] +$$

$$+ ka \theta^2 \cos^2 \alpha \left[\frac{i(ka)^2}{32} - \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{8\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{32\pi} \right] -$$

$$-\frac{\theta^2 \cos^2 \alpha}{ka} \left[-\frac{1}{8\pi} + \frac{i(ka)^2}{32} \right], \quad (2.6.35)$$

и аналогично для a_{33} :

$$\begin{aligned} a_{33} &= ka \sin^2 \alpha \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_3(\varphi) f_3(\varphi') d\varphi d\varphi' + \\ &\quad + ka \cos^2 \alpha \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') f_3(\varphi) f_3(\varphi') d\varphi d\varphi' - \\ &\quad - \frac{\cos^2 \alpha}{ka} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} G_{\Omega}(a, \varphi, a, \varphi') f_3'(\varphi) f_3'(\varphi') d\varphi d\varphi' = \\ &= ka \theta^2 \sin^2 \alpha \left[-\frac{1}{8\pi} + \frac{i(ka)^2}{32} \right] + \\ &\quad + ka \theta^2 \cos^2 \alpha \left[\frac{1}{8\pi} \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{32\pi} \right] - \frac{\theta^2 \cos^2 \alpha}{ka} \left[-\frac{1}{8\pi} + \frac{i(ka)^2}{32} \right] \end{aligned} \quad (2.6.36)$$

В выражениях (2.6.35)-(2.6.36) будем пренебрегать членами, содержащими в числителе малый параметр ka . В результате получим:

$$a_{22} = a_{33} = \frac{\pi}{8ka}. \quad (2.6.37)$$

Остальные элементы матрицы (2.6.13) равны нулю, так как функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ - четные, а $f_3(\varphi)$ - нечетная функция. Для B_1 согласно (2.6.12) с использованием формул (2.2.41) и (2.6.19) и полагая $\theta \approx \pi$, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{-\theta}^{\theta} \left[\frac{1}{2} ka \mp \nu + i \cos(\varphi - \varphi_0) \right] f_1(\varphi) d\varphi = \\ &= -\pi(ka \mp 2\nu) \ln \cos \frac{\theta}{2} + i\pi \cos \varphi_0, \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \int_{-\theta}^{\theta} \left[\frac{1}{2} ka \mp \nu + i \cos(\varphi - \varphi_0) \right] f_2(\varphi) d\varphi = \\ &= \int_{-\theta}^{\theta} \left[\frac{1}{2} ka \mp \nu + i \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \frac{1 + \cos \varphi}{2} d\varphi \approx \frac{\pi}{2} (ka \mp 2\nu) + \frac{i\pi}{2} \cos \varphi_0, \end{aligned} \quad (2.6.39)$$

$$\begin{aligned} B_3 &= \int_{-\theta}^{\theta} \left[\frac{1}{2} ka \mp \nu + i \cos(\varphi - \varphi_0) \right] f_3(\varphi) d\varphi = \\ &= \int_{-\theta}^{\theta} \left[\frac{1}{2} ka \mp \nu + i \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \frac{\sin \varphi}{2} d\varphi \approx \frac{i\pi}{2} \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (2.6.40)$$

Предполагая, что $\left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right| \gg 1$, будем иметь также $\left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right| \gg |S|$, и $S - 1 \approx 2(ka)^2 \ln \cos \frac{\theta}{2}$. Тогда можно в дальнейшем пользоваться приближенным решением системы (2.6.13):

$$A_1 = \frac{B_1 a_{22} - B_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = ka \frac{2(ka \mp 2\nu) \left[\ln \cos \frac{\theta}{2} + S \right] + 2i \cos \varphi_0 (S - 1)}{S \ln \cos \frac{\theta}{2} + S^2} =$$

$$= \frac{2ka(ka \mp 2\nu)}{S} + \frac{2ika \cos \varphi_0 (S - 1)}{S \ln \cos \frac{\theta}{2} + S^2} \approx \frac{2ka(ka \mp 2\nu) + 4i(ka)^3 \cos \varphi_0}{S}, \quad (2.6.41)$$

$$A_2 = \frac{B_2 a_{11} - B_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = 4ka \frac{i \cos \varphi_0 \left(\ln \cos \frac{\theta}{2} + 1 \right)}{\ln \cos \frac{\theta}{2} + S} \approx 4ika \cos \varphi_0, \quad (2.6.42)$$

$$A_3 = \frac{B_3}{a_{33}} = 4ika \sin \varphi_0. \quad (2.6.43)$$

Как видно из (2.6.41), зависимость амплитуды A_1 от частоты имеет резонансный характер. Резонансная частота определяется из условия обращения в нуль вещественной части знаменателя S :

$$1 + 2(ka)^2 \left[1 - 2\nu^2 \ln \left(\frac{\gamma ka}{2} \right) \right] \ln \cos \frac{\theta}{2} = 0. \quad (2.6.44)$$

При малых углах подъема линий проводимости ($\nu \ll 1$) вторым слагаемым в квадратной скобке в (2.6.44) можно пренебречь; поэтому резонансная частота близка к частоте собственных колебаний металлического цилиндра с узкой щелью (см. (2.2.27)). При этом резонансный знаменатель (2.6.32) можно записать в виде

$$S = 1 + 2(ka)^2 \left\{ 1 - i \frac{\pi}{4} \left[(ka)^2 + (2\nu)^2 \right] \right\} \ln \cos \frac{\theta}{2}. \quad (2.6.45)$$

Вычислим нулевую и первую фурье-гармоники (2.2.4) тока (2.6.1):

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi = -A_1 \ln \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} A_2$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) \exp(-i\varphi) d\varphi = \frac{1}{4} (2A_1 + A_2 - iA_3)$$

Теперь согласно (2.2.19)-(2.2.22) можно определить диаграммы рассеянного поля:

$$\Phi_H(\varphi, \varphi_0) = \cos \alpha \frac{\sqrt{2\pi}(ka)^2}{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \times \left[-\frac{ka(ka \mp 2\nu) + 2i(ka)^3 \cos \varphi_0}{S} \ln \cos \frac{\theta}{2} + ika \cos \varphi_0 - i \frac{(ka \mp 2\nu) + 2i(ka)^2 \cos \varphi_0}{S} \cos \varphi + \cos(\varphi_0 - \varphi) \right], \quad (2.6.46)$$

$$\Phi_E(\varphi, \varphi_0) = \sin \alpha \frac{\sqrt{2\pi}(ka)^2}{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \times \left[i \frac{2(ka \mp 2\nu) + 4i(ka)^2 \cos \varphi_0}{S} \ln \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos \varphi_0 + \frac{ka(ka \mp 2\nu) + 2i(ka)^3 \cos \varphi_0}{S} \cos \varphi + ika \cos(\varphi_0 - \varphi) \right]. \quad (2.6.47)$$

Пользуясь малостью $ka \ll 1$ и $\nu \ll 1$, получаем

$$\Phi_H(\varphi, \varphi_0) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) (ka)^2 \left\{ \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{ka \left[(ka \mp 2\nu) \ln \cos \frac{\theta}{2} - i \cos \varphi_0 \right] + i \left[(ka \mp 2\nu) + 2i(ka)^2 \cos \varphi_0 \right] \cos \varphi}{S} \right\}, \quad (2.6.48)$$

$$\Phi_E(\varphi, \varphi_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) (ka)^2 \frac{2i\nu \left[(ka \mp 2\nu) \ln \cos \frac{\theta}{2} - i \cos \varphi_0 \right]}{S}. \quad (2.6.49)$$

Формула (2.6.48) при $\nu = 0$ переходит в решение задачи дифракции H -поляризованной плоской волны на металлическом цилиндре с продольной щелью. Резонансная частота разбивает низкочастотный диапазон $ka \ll 1$ на две области. С разных сторон от резонансной частоты диаграммы рассеяния описываются разными функциями

$$\Phi_H(\varphi, \varphi_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) (ka)^2 \times \begin{cases} \cos(\varphi - \varphi_0), (ka)^2 \left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right| \ll 1 \\ \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2}, (ka)^2 \left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right| \gg 1 \end{cases}. \quad (2.6.50)$$

Нижняя формула совпадает с выражением для диаграммы рассеяния на сплошном металлическом цилиндре.

Рассмотрим частный случай, когда параметры ν и θ связаны соотношением

$$\ln \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{8\nu^2}. \quad (2.6.51)$$

Тогда

$$S = \frac{(2\nu)^2 - (ka)^2 + i\frac{\pi}{4}(ka)^2[(2\nu)^2 + (ka)^2]}{(2\nu)^2}, \quad (2.6.52)$$

и резонансная частота определяется формулой (2.2.23). В этом случае в условиях резонанса рассеянное поле обладает круговой диаграммой направленности. Из выражения (2.6.52) можно оценить добротность резонанса

$Q = \frac{\tilde{k}a}{\Delta ka}$, где $\tilde{k}a$ - значение резонансной частоты, а Δka - ширина резонанса на

половине его высоты. В резонансе действительная часть числителя равна нулю. При изменении частоты на Δka приращение действительной части в условиях резонанса равно $\Delta \operatorname{Re}(S) = 2ka\Delta ka$ согласно (2.6.52). Это приращение должно быть приближенно равно удвоенному значению мнимой части числителя в

условиях резонанса, из чего следует $\Delta ka = \frac{\pi(ka)^3}{2}$, и добротность резонанса равна

$$Q = \frac{2}{\pi(ka)^2} = \frac{1}{2\pi\nu^2} \quad (2.6.53)$$

Рассчитаем полное сечение рассеяния σ_s , используя оптическую теорему (см. (1.4.3)):

$$k\sigma_s = -\sqrt{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) [\Phi_H(\varphi_0, \varphi_0) \mp i\Phi_E(\varphi_0, \varphi_0)] \right\}. \quad (2.6.54)$$

На рис. 2.2 и 2.3 представлены результаты расчета полного сечения рассеяния волн левой и правой круговой поляризации по формуле (2.6.54) для цилиндра с параметрами $\theta = 175^\circ$, $\alpha = 12^\circ$, для которых является верным условие (2.6.51).

На резонансной частоте (2.2.23) полное сечение рассеяния для волн левой и правой круговой поляризации равны, соответственно:

$$k\sigma_s = 4[1 + (ka)^2 \cos^2 \varphi_0], \quad (2.6.55)$$

$$k\sigma_s = 4(ka)^2 \cos^2 \varphi_0. \quad (2.6.56)$$

Эти величины значительно различаются, что позволяет использовать рассмотренный анизотропно проводящий цилиндр для создания электродинамических структур с киральными свойствами.

Равенство нулю полного сечения рассеяния волн правой круговой поляризации при угле падения $\varphi = 90^\circ$ связано с тем, что оптическая теорема

применена к приближенным выражениям для диаграмм направленности $\Phi_E(\varphi, \varphi_0)$, $\Phi_H(\varphi, \varphi_0)$. Более строгий расчет по формуле

$$k\sigma_s = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [|\Phi_E(\varphi, \varphi_0)|^2 + |\Phi_H(\varphi, \varphi_0)|^2] d\varphi \quad (2.6.57)$$

дает для этого случая конечное значение полного сечения рассеяния в условиях резонанса. На рис. 2.4 и 2.5 приведены частотные зависимости полных сечений рассеяния волн круговой поляризации от цилиндра с параметрами $\theta = 175^\circ$, $\alpha = 12^\circ$, рассчитанные по формуле (2.6.57).

2.7. Сечение обратного рассеяния цилиндра

Рассмотрим случай, когда цилиндр возбуждается плоской линейно поляризованной волной, у которой z - компонента электромагнитного поля определяется формулами

$$H_z^0 = \sin \gamma \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad (2.7.1)$$

$$E_z^0 = \cos \gamma \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad (2.7.2)$$

В этой волне единичный вектор электрического поля \vec{E}^0 составляет угол γ с осью z (см. рис 2.1). Обозначим через $\tilde{\Phi}_H(\varphi, \varphi_0)$ и $\tilde{\Phi}_E(\varphi, \varphi_0)$ диаграммы рассеяния, которые создаются компонентами (2.7.1) и (2.7.2) соответственно. Так как в падающем поле $\partial/\partial z = 0$, то дифракция плоской волны на цилиндре не нарушает линейной поляризации, и в дальней зоне компоненты рассеянного поля выражаются через эти диаграммы направленности:

$$H_z^s \approx \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{kr}} \tilde{\Phi}_H(\varphi, \varphi_0), \quad E_z^s \approx \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{kr}} \tilde{\Phi}_E(\varphi, \varphi_0) \quad (2.7.3)$$

Поскольку рассеянное поле в дальней зоне обладает свойством $E_\varphi^s = H_z^s$, то в случае, когда облучение и прием производятся на одинаковой поляризации (под углом γ к оси z) и в одном направлении ($\varphi = \varphi_0 + \pi$), величина

$$\frac{\sigma_r}{\lambda} = \left| \tilde{\Phi}_E(\varphi_0 + \pi, \varphi_0) \cos \gamma - \tilde{\Phi}_H(\varphi_0 + \pi, \varphi_0) \sin \gamma \right|^2 \quad (2.7.4)$$

представляет собой нормированный радиолокационный поперечник рассеяния.

Диаграмма $\tilde{\Phi}_H$ и $\tilde{\Phi}_E$ могут быть выражены через диаграммы рассеяния волн круговой поляризации. Плоскую волну (2.7.1) можно представить в виде суммы двух волн вида (2.1.5), (2.1.6) с одинаковым волновым числом k с противоположным направлением вращения вектора поляризации. Тогда для волны (2.7.1) диаграммы рассеяния имеют вид

$$\tilde{\Phi}_H^H(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} [\Phi_H^L(\varphi, \varphi_0) + \Phi_H^R(\varphi, \varphi_0)] \sin \gamma, \quad (2.7.5)$$

$$\tilde{\Phi}_E^H(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} [\Phi_E^L(\varphi, \varphi_0) + \Phi_E^R(\varphi, \varphi_0)] \sin \gamma, \quad (2.7.6)$$

где верхние индексы L и R относятся соответственно к диаграммам рассеяния для волн левой и правой круговой поляризации. Аналогичным образом можно представить волну (2.7.2). Соответствующий вид диаграмм рассеяния для волны (2.7.2) следующий:

$$\tilde{\Phi}_H^E(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} [i\Phi_H^L(\varphi, \varphi_0) - i\Phi_H^R(\varphi, \varphi_0)] \cos \gamma, \quad (2.7.7)$$

$$\tilde{\Phi}_E^E(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} [i\Phi_E^L(\varphi, \varphi_0) - i\Phi_E^R(\varphi, \varphi_0)] \cos \gamma, \quad (2.7.8)$$

Суммарная диаграмма рассеяния для волны, представленной в виде (2.7.1), (2.7.2) выражается по формуле:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_H(\varphi, \varphi_0) &= \tilde{\Phi}_H^H(\varphi, \varphi_0) + \tilde{\Phi}_H^E(\varphi, \varphi_0) = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) (ka)^2 \left\{ -\frac{2\nu \left(ika \ln \cos \frac{\theta}{2} - \cos \varphi\right)}{S} \cos \gamma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{S \cos(\varphi - \varphi_0) + ka \left[ka \ln \cos \frac{\theta}{2} - i \cos \varphi_0\right] + i \left[ka + 2i(ka)^2 \cos \varphi_0\right] \cos \varphi}{S} \sin \gamma \right\}, \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_E(\varphi, \varphi_0) &= \tilde{\Phi}_E^H(\varphi, \varphi_0) + \tilde{\Phi}_E^E(\varphi, \varphi_0) = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) (ka)^2 \left[-\frac{4\nu^2 \ln \cos \frac{\theta}{2}}{S} \cos \gamma + \frac{2\nu \left(ika \ln \cos \frac{\theta}{2} + \cos \varphi_0\right)}{S} \sin \gamma \right] \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

В результате из (2.7.9) и (2.7.10) для нормированного поперечника обратного рассеяния по формуле (2.7.4) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{\lambda} &= \frac{\pi(ka)^4}{|S|^2} \times \left| 2\nu \left(ika \ln \cos \frac{\theta}{2} + \cos \varphi_0\right) \sin 2\gamma - 4\nu^2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \cos^2 \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \left[S + (ka)^2 \ln \cos \frac{\theta}{2} - 2ika \cos \varphi_0 + 2(ka)^2 \cos^2 \varphi_0 \right] \sin^2 \gamma \right|^2. \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

Анализ этого выражения показывает, что если выполнены условия (2.6.51), и $\ln \cos \frac{\theta}{2} \gg 1$, то при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ на резонансной частоте (2.2.27) сечение радиолокационного рассеяния не зависит от угла γ , причем $\frac{\sigma_r}{\lambda} = \frac{1}{2\pi}$.

Зависимость радиолокационного сечения рассеяния σ_r/λ от частоты показана на рис. 2.6 и 2.7 соответственно при угловых размерах продольной щели цилиндра $2(\pi - \theta) = 2 \times 2,3 \times 10^{-6}$ и $2(\pi - \theta) = 2 \times 0,23$ и углом подъема винтовых линий $\alpha = 5^\circ$ и $\alpha = 13,5^\circ$. На рис. 8 для этих двух случаев представлена зависимость от угла γ величины σ_r/λ на резонансных частотах $ka = 0.18$ и $ka = 0.44$ соответственно. Угол падения волны φ_0 для расчетов принят равным $\pi/2$. При $\pi - \theta = 2,3 \times 10^{-6}$ поляризация рассеянного поля на резонансной частоте близка к круговой поляризации. При $\pi - \theta = 0,23$ поляризация рассеянного поля отличается от круговой, колебания величины σ_r/λ при изменении угла γ составляют ± 4 дБ относительно уровня $1/2\pi$.

На рис. 2.9 приведены результаты измерений радиолокационного сечения рассеяния от макета цилиндра, проведенные в диапазоне частот от 4 до 6 ГГц при $\varphi_0 = 90^\circ$ и различных углах γ вместе с результатами теоретического расчета [87]. Из рисунка видно, что совпадение теоретических расчетов и эксперимента хорошее, за исключением высокочастотной части диапазона, где развитая квазистатическая теория становится неприменимой.

Выводы

1. Исследована двумерная задача дифракции плоской электромагнитной волны на полом цилиндра с продольной щелью, поверхность которого обладает проводимостью вдоль винтовых линий. Получено интегродифференциальное уравнение для плотности поверхностного тока.
2. В квазистатическом приближении (диаметр цилиндра мал по сравнению с длиной волны) и в предположении, что угловая ширина щели и угол подъема винтовых линий проводимости малы, получено аналитическое решение интегродифференциального уравнения. Найдены аналитические выражения для поля в дальней зоне.
3. Обнаружен и исследован низкочастотный резонанс, обладающий киральными свойствами. Установлена связь между угловой шириной щели и углом подъема линий проводимости, обеспечивающая круговую поляризацию рассеянного поля в резонансе. Резонанс проявляется лишь при возбуждении цилиндра круглополяризованной волной определенного знака вращения поляризации. Полное сечение рассеяния в резонансе не зависит от геометрических параметров цилиндра и равно $2\lambda/\pi$.
4. Получены аналитические выражения для радиолокационного сечения рассеяния. Показано, что если киральный резонанс имеет высокую

добротность, то радиолокационное сечение рассеяния на резонансной частоте не зависит от угла между вектором электрического поля падающей линейно поляризованной волны и осью цилиндра.

5. Результаты расчета частотных и угловых зависимостей радиолокационного рассеяния находятся в хорошем согласии с проведенными в ИРЭ РАН измерениями.

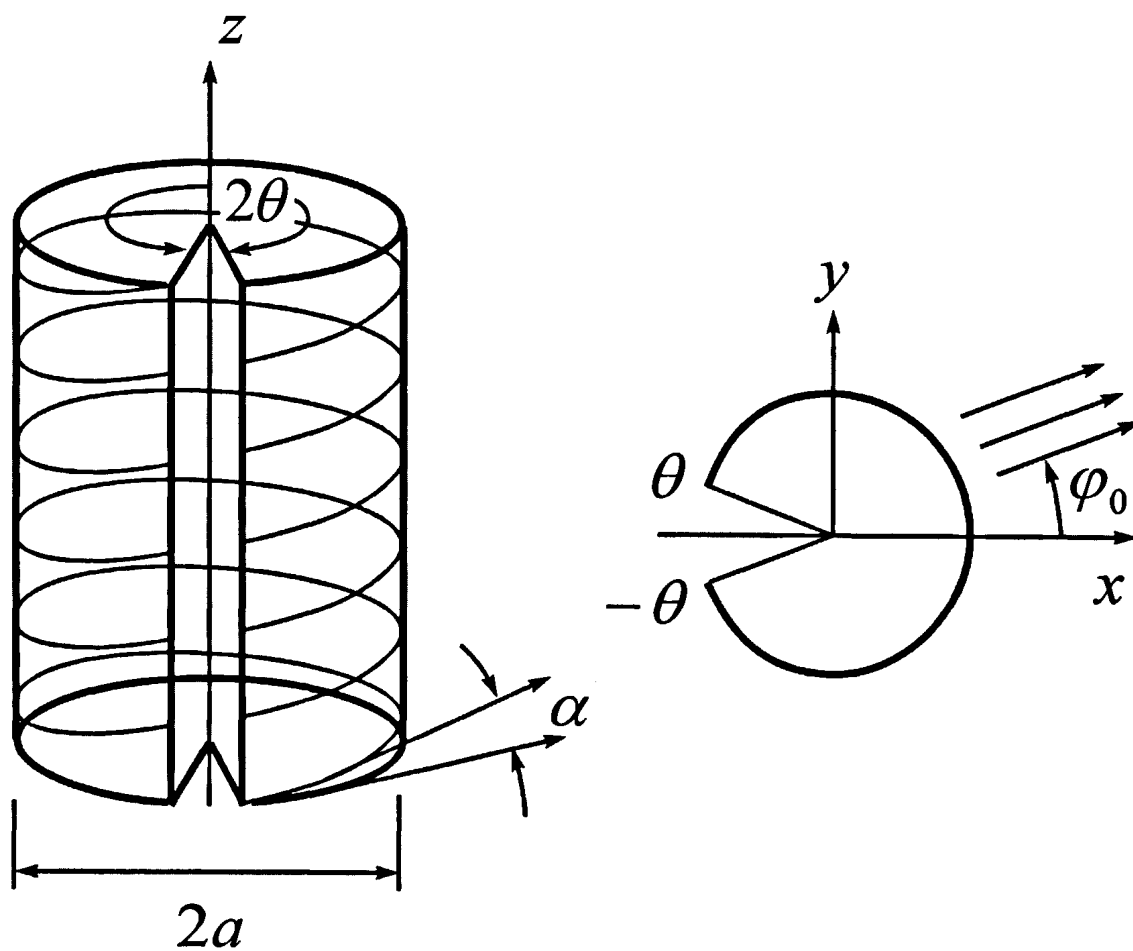


Рис. 2.1. Анизотропно проводящий круговой цилиндр с продольной щелью.

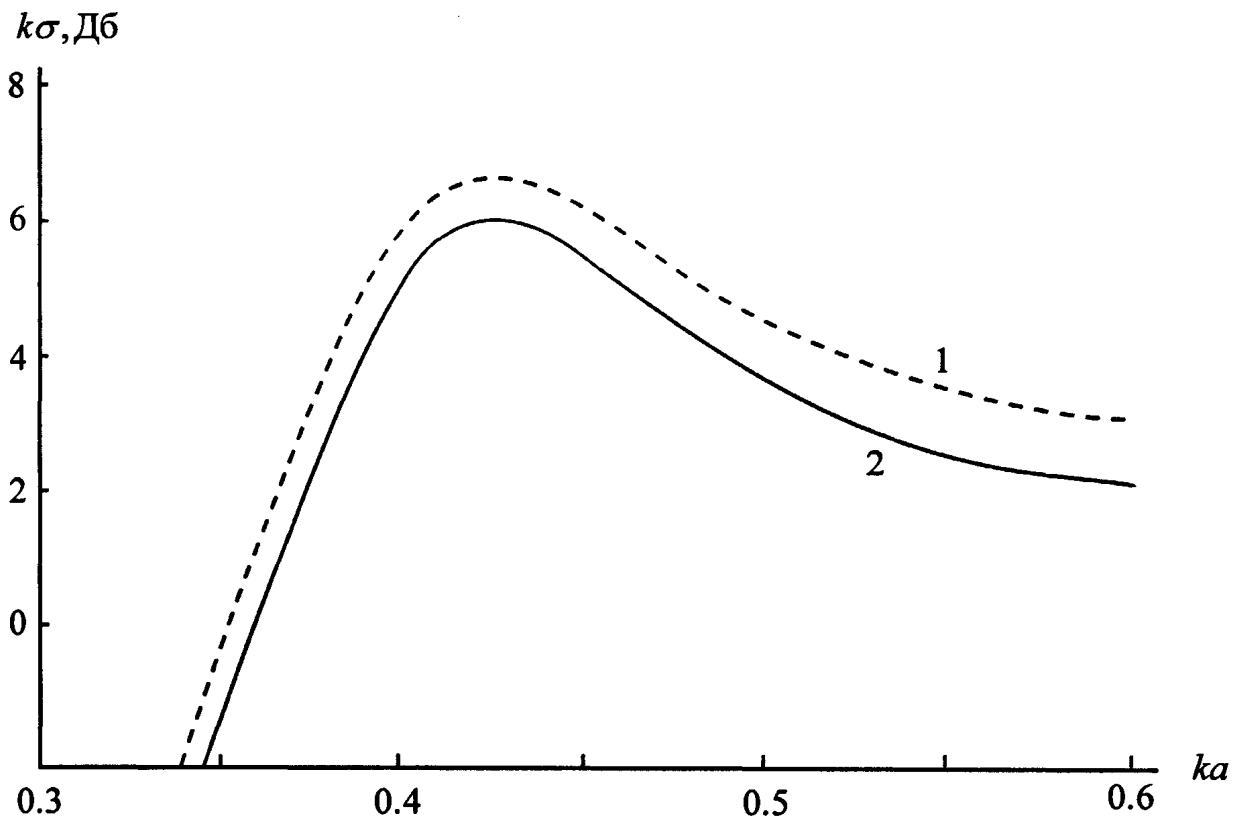


Рис 2.2. Зависимость полного сечения рассеяния волн левой круговой поляризации от частоты, рассчитанная по оптической теореме. Кривые 1 и 2 соответствуют $\varphi_0 = 0$ и 90° .

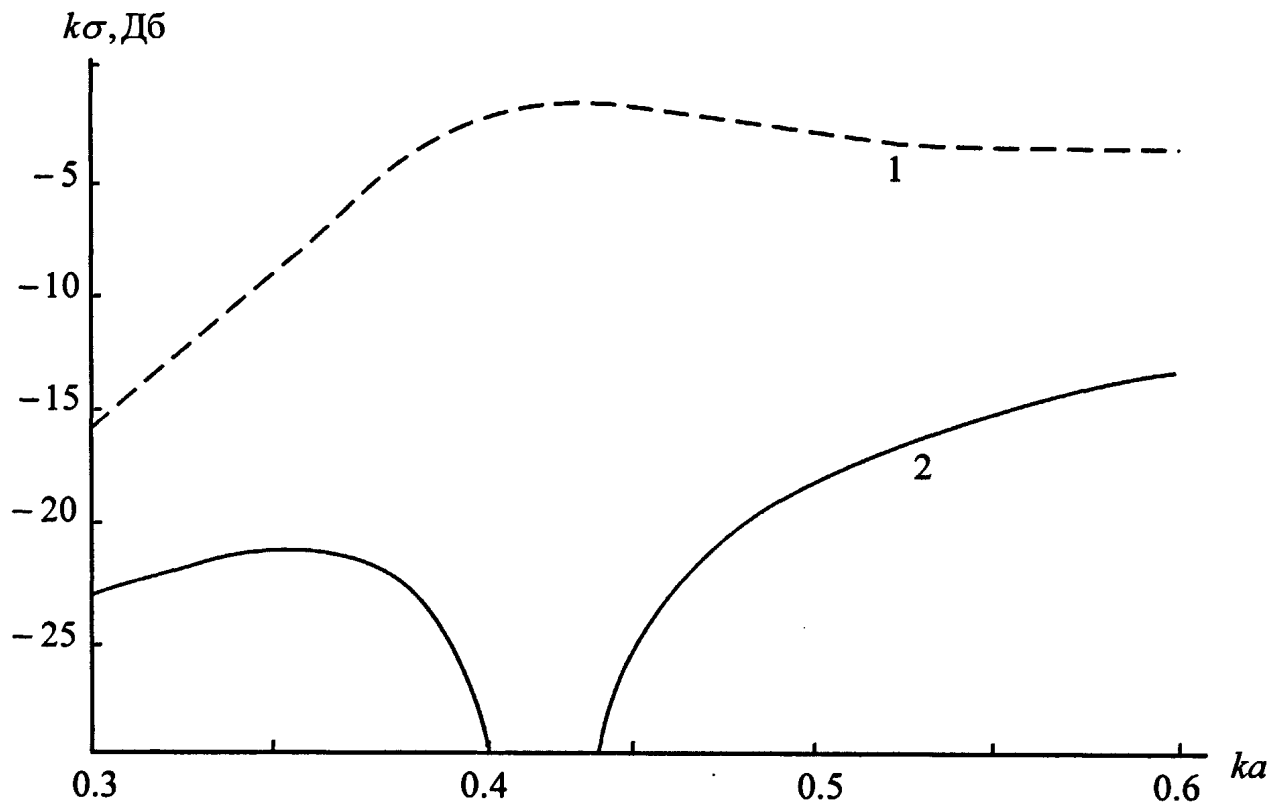


Рис 2.3. Зависимость полного сечения рассеяния волн правой круговой поляризации от частоты, рассчитанная по оптической теореме. Кривые 1 и 2 соответствуют $\varphi_0 = 0$ и 90° .

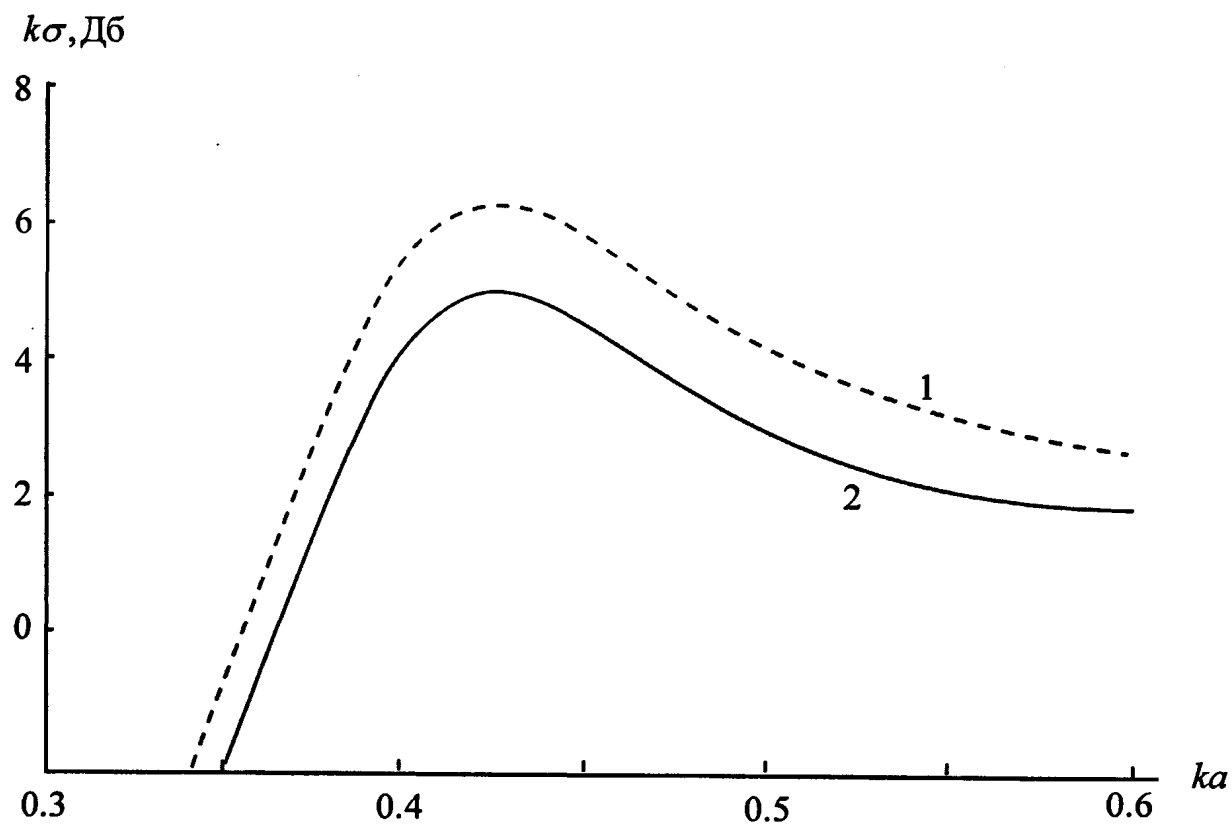


Рис 2.4. Зависимость полного сечения рассеяния волн левой круговой поляризации от частоты. Кривые 1 и 2 соответствуют $\varphi_0 = 0$ и 90° .

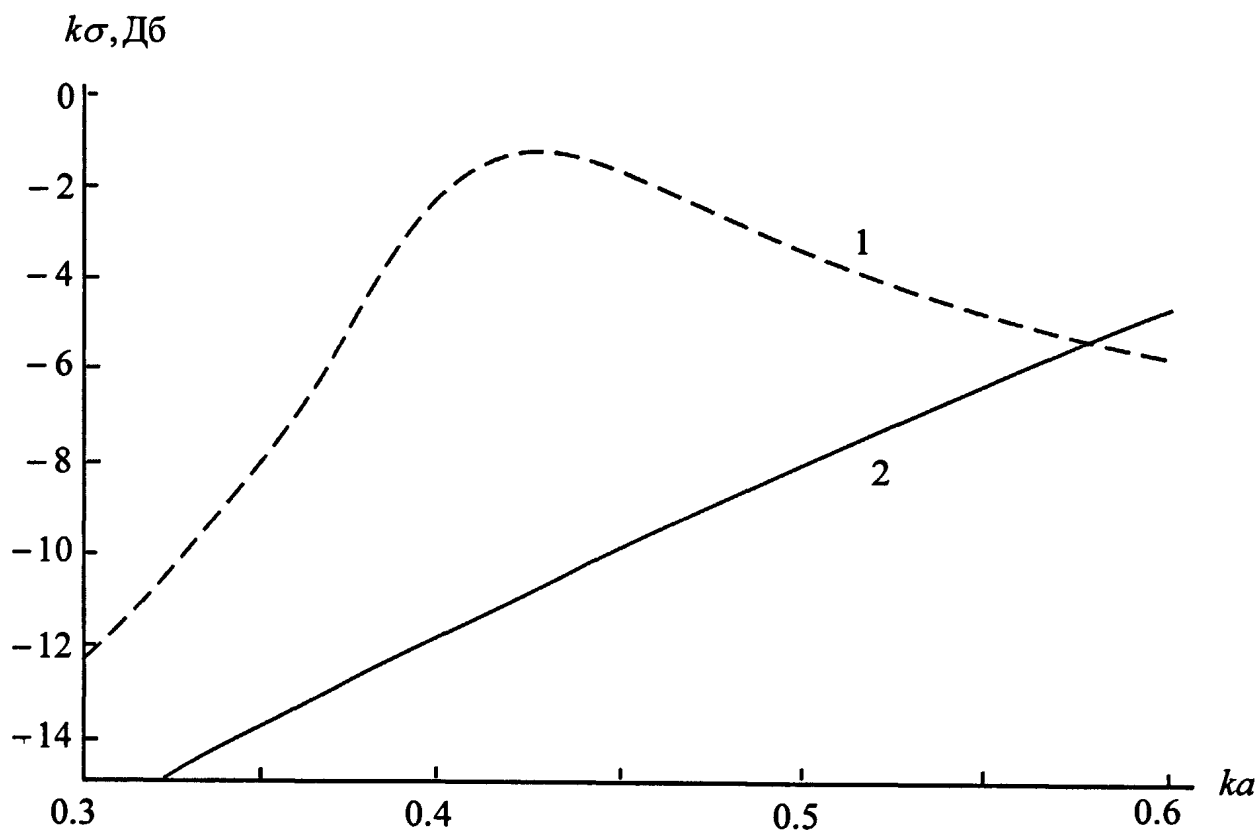


Рис 2.5. Зависимость полного сечения рассеяния волн правой круговой поляризации от частоты. Кривые 1 и 2 соответствуют $\varphi_0 = 0$ и 90° .

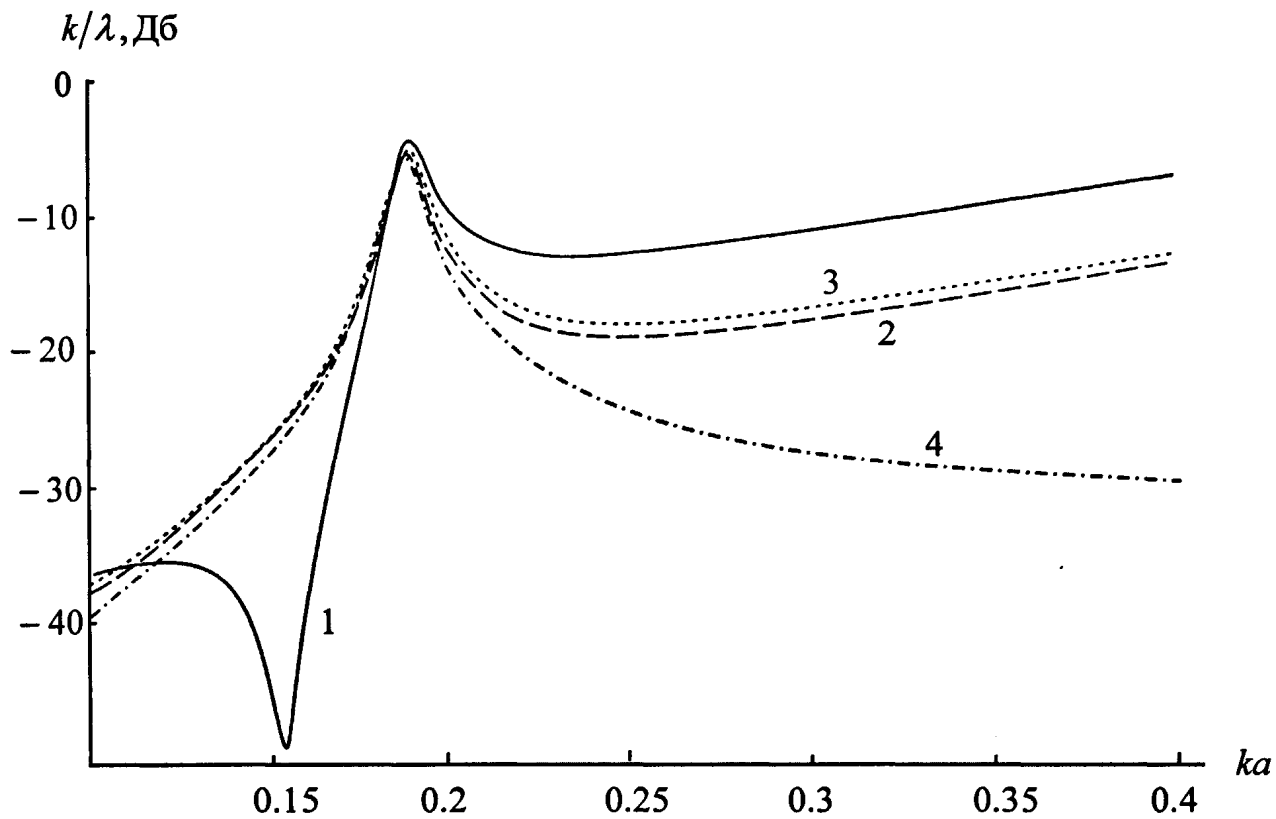


Рис.2.6. Зависимость радиолокационного сечения от частоты для цилиндра с продольной щелью $2(\pi - \theta) = 2 \times 2.3 \times 10^{-6}$. Кривые 1-4 соответствуют $\gamma = 90^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 0$.

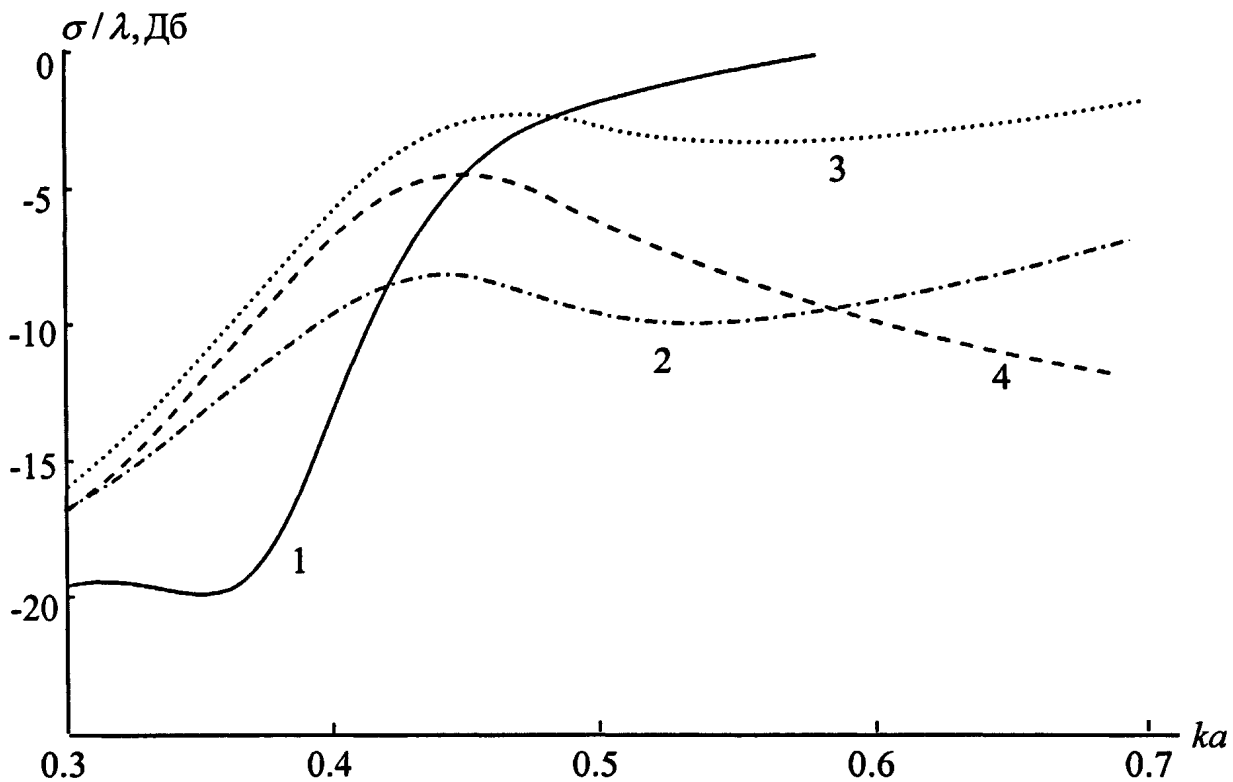


Рис.2.7. Зависимость радиолокационного сечения рассеяния от частоты для цилиндра с продольной щелью $2(\pi - \theta) = 2 \times 0,23$. Кривые 1-4 соответствуют $\gamma = 90^\circ; -45^\circ; 45^\circ; 0^\circ$.

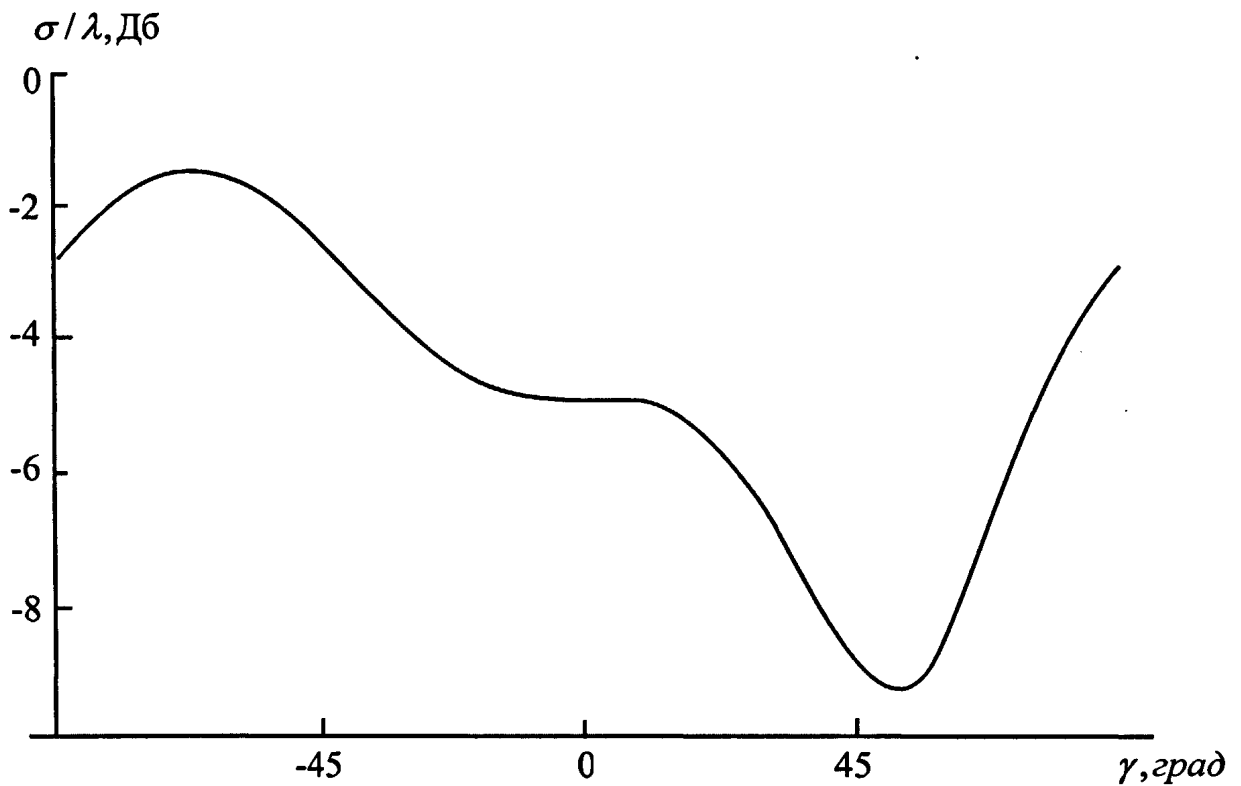
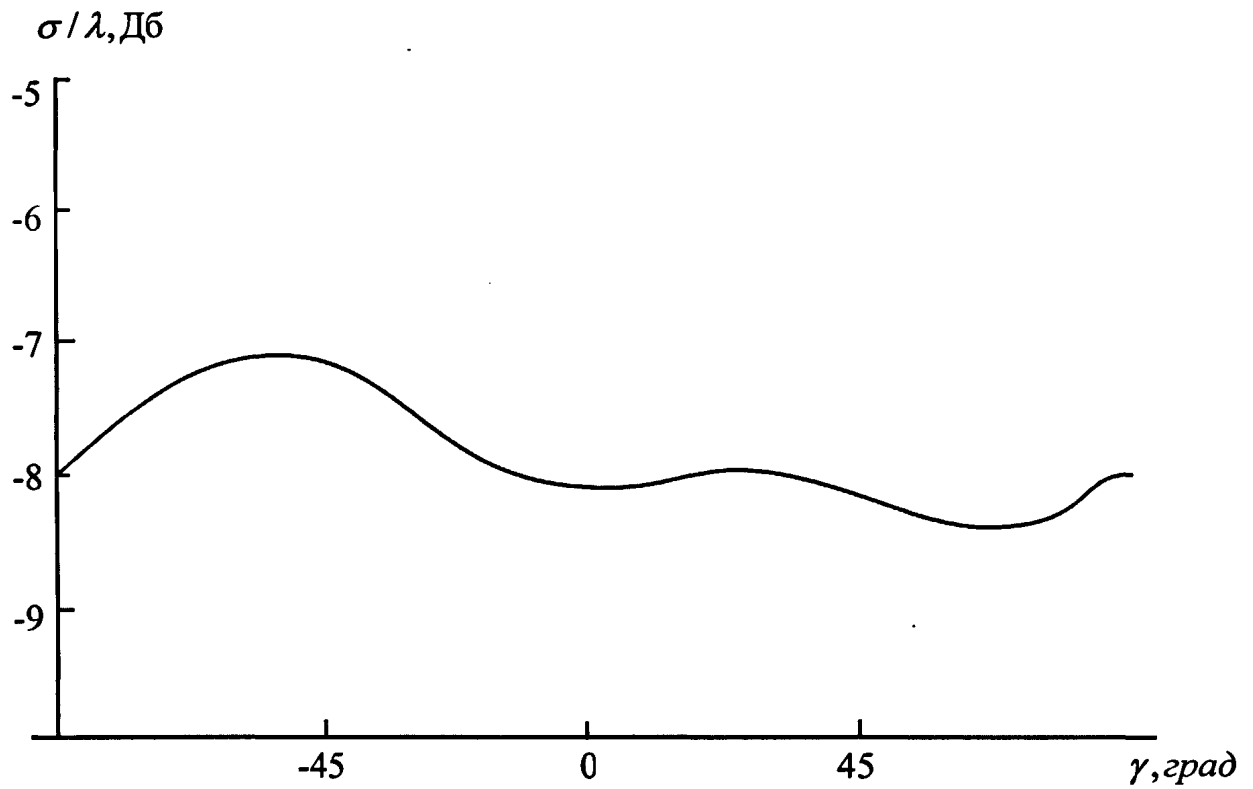


Рис.2.8. Зависимость радиолокационного сечения рассеяния от угла поляризации γ для цилиндра с продольной щелью $2(\pi - \theta) = 2 \times 2,3 \times 10^{-6}$ (вверху) и $2(\pi - \theta) = 2 \times 0,23$ (внизу) на резонансных частотах.

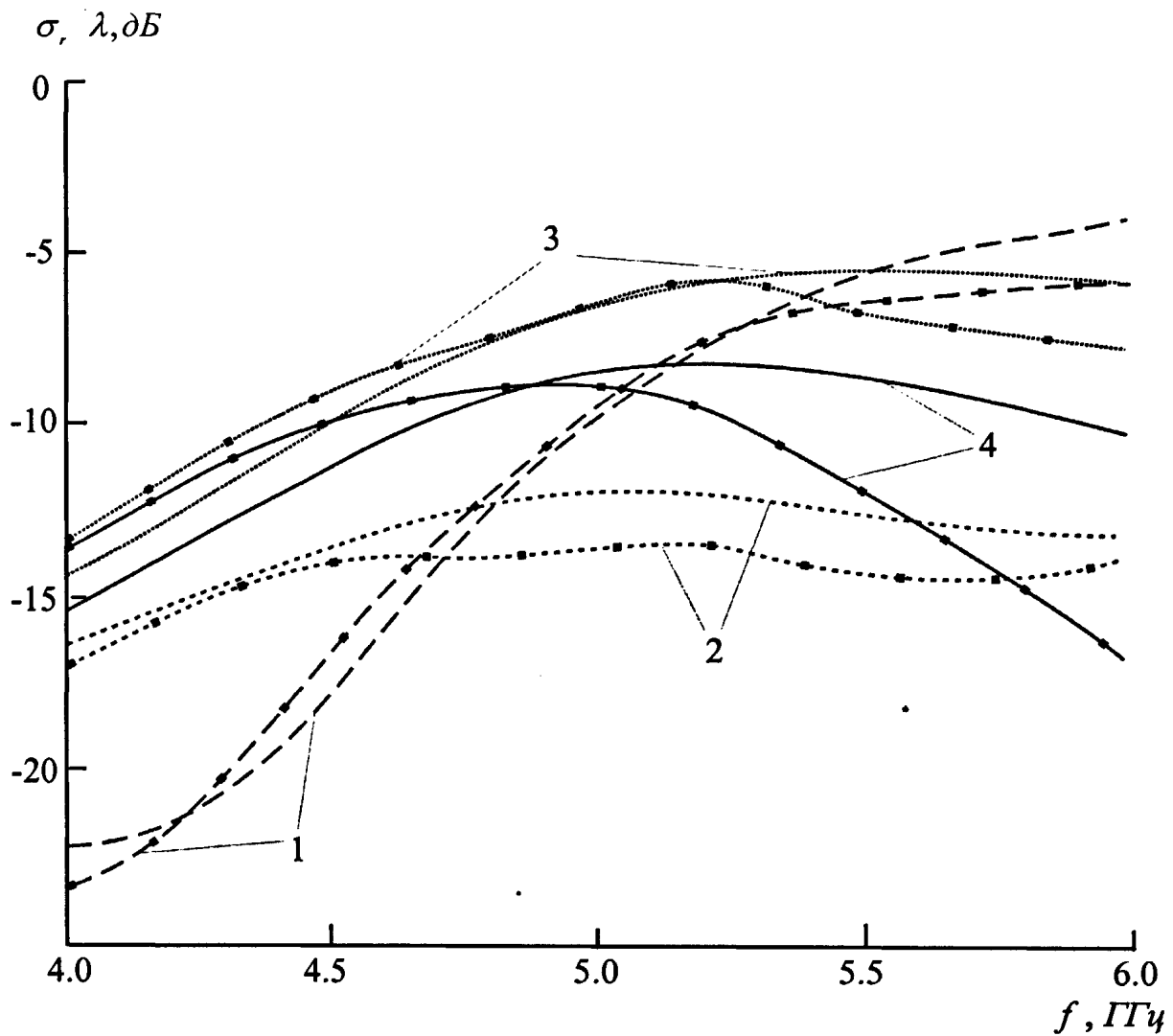


Рис. 2.9. Зависимости (теоретические и экспериментальные) радиолокационного сечения рассеяния от частоты. Кривые 1-4 соответствуют $\gamma = 90^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 0^\circ$. Экспериментальные кривые отмечены квадратиками.

Глава 3. Волны, направляемые анизотропно проводящим цилиндром с продольной щелью.

3.1. Постановка задачи

Рассматриваются волноведущие свойства анизотропно проводящего цилиндра с радиусом a и узкой продольной щелью с угловым размером $2(\pi - \theta)$ (см. рис. 2.1). Поверхность цилиндра является проводящей вдоль винтовых линий с углом подъема α . На поверхности цилиндра ($|\varphi| < \theta$) выполняются граничные условия Владимирского:

$$E_z^+ = E_z^-, \quad (3.1.1)$$

$$E_\varphi^+ = E_\varphi^-, \quad (3.1.2)$$

$$E_z \sin \alpha + E_\varphi \cos \alpha = 0, \quad (3.1.3)$$

$$(H_z^+ - H_z^-) \sin \alpha + (H_\varphi^+ - H_\varphi^-) \cos \alpha = 0, \quad (3.1.4)$$

Задача о медленных волнах в цилиндрических системах состоит в нахождении решений однородных уравнений Максвелла с зависимостью от координаты z в виде $\exp(-ihz)$. Поля направляемых волн должны удовлетворять условиям (3.1.1) – (3.1.4) и при $kr \rightarrow \infty$ иметь характер цилиндрической волны с поперечным волновым числом κ :

$$H_\infty \approx \frac{\exp(-i\kappa r - ihz)}{\sqrt{\kappa}} \Phi_H(\varphi), \quad E_\infty \approx \frac{\exp(-i\kappa r - ihz)}{\sqrt{\kappa}} \Phi_E(\varphi). \quad (3.1.5)$$

Здесь κ - поперечное, h - продольное волновые числа. Величины κ и h связаны соотношением

$$h = \sqrt{k^2 - \kappa^2}, \quad (3.1.6)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число в свободном пространстве. Таким образом, получаем спектральную задачу на собственные значения h и собственные функции, в качестве которых примем плотности поверхностных токов вдоль направления проводимости $f(\varphi)\exp(-ihz)$, $-\theta < \varphi < \theta$. На кромках ленты ток должен обращаться в нуль:

$$f(\pm\theta) = 0. \quad (3.1.7)$$

3.2. Интегральное уравнение для собственного тока

Из граничного условия (3.1.4) вытекает следующее представление для поверхностных токов:

$$\vec{j}_\varphi^{(e)} = \cos \alpha f(\varphi) \delta(r-a), \quad (3.2.1)$$

$$\vec{j}_z^{(e)} = \sin \alpha f(\varphi) \delta(r-a), \quad (3.2.2)$$

где $f(\varphi)$ - функция, описывающая азимутальную зависимость собственных токов. Радиальная компонента поверхностного тока равна нулю: $j_r^{(e)} = 0$. Граничные условия (3.1.1) - (3.1.2) означают, что на цилиндрической поверхности присутствуют только электрические токи, поэтому компоненты создаваемого ими электромагнитного поля можно выразить через электрический вектор Герца $\vec{\Pi}^{(e)}$ по формулам:

$$\vec{E} = \vec{\Pi}^{(e)} + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \vec{\Pi}^{(e)}, \quad (3.2.3)$$

$$\vec{H} = \frac{i}{k} \text{rot } \vec{\Pi}^{(e)}. \quad (3.2.4)$$

Электрический вектор Герца удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \vec{\Pi}^{(e)} + k^2 \vec{\Pi}^{(e)} = i k \vec{j}^{(e)}. \quad (3.2.5)$$

Из формул (3.2.1) и (3.2.2) следует, что декартовы компоненты объемной плотности поверхностного тока имеют вид

$$j_x^{(e)} = -\cos \alpha \sin \varphi f(\varphi) \delta(r-a), \quad (3.2.6)$$

$$j_y^{(e)} = \cos \alpha \cos \varphi f(\varphi) \delta(r-a). \quad (3.2.7)$$

Решение векторного уравнения (3.2.5), у которого правая часть определена согласно (3.2.2), (3.2.6) - (3.2.7), может быть представлено интегралами (2.3.10) - (2.3.12) с помощью двумерной функции Грина свободного пространства (2.3.9).

Из (2.3.10), (2.3.11) получим следующие выражения для компонент вектора Герца в цилиндрической системе координат

$$\Pi_r^{(e)} = i k a \cos \alpha \int_{-\theta}^{\theta} G(r, \varphi, a, \varphi') \sin(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi', \quad (3.2.8)$$

$$\Pi_\varphi^{(e)} = i k a \cos \alpha \int_{-\theta}^{\theta} G(r, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi', \quad (3.2.9)$$

$$\Pi_z^{(e)} = i k a \sin \alpha \int_{-\theta}^{\theta} G(r, \varphi, a, \varphi') f(\varphi') d\varphi'. \quad (3.2.10)$$

С учетом того, что $\partial/\partial z = -ih$, выражение (3.2.3) для компонент электрического поля в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$E_z = \Pi_z - \frac{ih}{k^2} \left(\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \Pi_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial \varphi} - ih \Pi_z \right), \quad (3.2.11)$$

$$E_\varphi = \Pi_\varphi + \frac{1}{k^2 r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \Pi_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_\varphi}{\partial \varphi} - ih \Pi_z \right). \quad (3.2.12)$$

Подставляя в (3.1.3) выражения (3.2.10) – (3.2.12) с учетом (3.2.8) – (3.2.9), получим интегродифференциальное уравнение для функции $f(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_{-\theta}^{\theta} A(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' + \frac{d}{d\varphi} \int_{-\theta}^{\theta} B(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' + \\ + \int_{-\theta}^{\theta} C(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' = 0, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

где ядра A , B и C выражаются через функцию Грина следующим образом:

$$A = \frac{\cos^2 \alpha}{ka} G(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi'), \quad (3.2.14)$$

$$\begin{aligned} B = \frac{\cos^2 \alpha}{ka} \left[G(a, \varphi, a, \varphi') + a \frac{\partial}{\partial r} G(a, \varphi, a, \varphi') \right] \sin(\varphi - \varphi') - \\ - i \frac{h}{k} \cos \alpha \sin \alpha [1 + \cos(\varphi - \varphi')] G(a, \varphi, a, \varphi'), \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} C = -i \frac{h}{k} \sin \alpha \cos \alpha \left[a \frac{\partial}{\partial r} G(a, \varphi, a, \varphi') + G(a, \varphi, a, \varphi') \right] \sin(\varphi - \varphi') + \\ + ka \cos^2 \alpha G(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') + ka \sin^2 \alpha G(a, \varphi, a, \varphi') (1 - h^2/k^2). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Решение уравнения (3.2.13) $f(\varphi)$ должно удовлетворять условию обращения в нуль тока на краях щели:

$$f(\theta) = f(-\theta) = 0. \quad (3.2.17)$$

Чтобы упростить выражение (3.2.13), воспользуемся следующими формулами (см. (2.3.24)-(2.3.25)):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} G(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') = \frac{d}{d\varphi} \left[\cos(\varphi - \varphi') \frac{d}{d\varphi} G(a, \varphi, a, \varphi') \right] - \\ - \frac{d}{d\varphi} \sin(\varphi - \varphi') G(a, \varphi, a, \varphi'), \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

$$\frac{d}{d\varphi} G(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') = \cos(\varphi - \varphi') \frac{d}{d\varphi} G(a, \varphi, a, \varphi') -$$

$$-\sin(\varphi - \varphi')G(a, \varphi, a, \varphi'), \quad (3.2.19)$$

$$a \sin(\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial r} G(a, \varphi, a, \varphi') = [1 - \cos(\varphi - \varphi')] \frac{\partial}{\partial \varphi} G(a, \varphi, a, \varphi'), \quad (3.2.20)$$

тогда интегриродифференциальное уравнение для функции $f(\varphi)$ (3.2.13) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\varphi} - i\nu \right) \left(\frac{d}{d\varphi} - i\mu \right) \int_{-\theta}^{\theta} G(a, \varphi, a, \varphi') f(\varphi') d\varphi' + \\ + k^2 a^2 \int_{-\theta}^{\theta} G(a, \varphi, a, \varphi') \cos(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' = 0, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

где

$$\nu = (h + k) a \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.2.22)$$

$$\mu = (h - k) a \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.2.23)$$

Спектральный параметр h сложным образом входит в уравнение (3.2.21), так как его ядро уравнения зависит от поперечного волнового числа κ :

$$G(a, \varphi, a, \varphi') = \frac{i}{4} H_0^{(2)} \left(2\kappa a \left| \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right| \right). \quad (3.2.24)$$

В квазистатическом приближении ядро (3.2.24) имеет вид

$$G(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{i\gamma\kappa a}{2} \right) + G_0(\varphi - \varphi'), \quad (3.2.25)$$

где

$$G_0(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|. \quad (3.2.26)$$

Уравнение (3.2.21) можно применять и к замкнутому цилиндру ($\theta = \pi$). Тогда вместо условия (3.2.17) от функции $f(\varphi)$ следует потребовать периодичности: $f(-\pi) = f(\pi)$. В этом случае решение уравнения (3.2.21) можно искать в виде

$$f(\varphi) = \exp(-im\varphi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2.27)$$

Используя теорему сложения

$$H_0^{(2)} \left(2\kappa a \left| \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right| \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(\kappa a) J_n(\kappa a) \exp[in(\varphi' - \varphi)], \quad (3.2.28)$$

из (3.2.21) получим известное дисперсионное уравнение [55]:

$$\left(h + k + \frac{m}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) \left(h - k + \frac{m}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) =$$

$$= k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \frac{H_{m-1}^{(2)}(\kappa a) J_{m-1}(\kappa a) + H_{m+1}^{(2)}(\kappa a) J_{m+1}(\kappa a)}{2H_m^{(2)}(\kappa a) J_m(\kappa a)}. \quad (3.2.29)$$

Покажем, что из уравнения (3.2.21) предельным переходом $\theta \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$ можно получить интегродифференциальное уравнение для собственных токов анизотропно проводящей ленты.

С помощью формулы

$$\cos(\varphi - \varphi') = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2} \quad (3.2.30)$$

преобразуем уравнение (3.2.21) к виду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{d\varphi} - i\tilde{\nu} \right) \left(\frac{d}{d\varphi} - i\tilde{\mu} \right) \int_{-\theta}^{\theta} H_0^{(2)} \left(2\kappa a \left| \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right| \right) f(\varphi') d\varphi' - \\ & - 2k^2 a^2 \int_{-\theta}^{\theta} \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} H_0^{(2)} \left(2\kappa a \left| \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right| \right) f(\varphi') d\varphi' = 0, \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

где

$$\tilde{\nu} = h a \operatorname{tg} \alpha + \frac{\kappa a}{\cos \alpha}, \quad \tilde{\mu} = h a \operatorname{tg} \alpha - \frac{\kappa a}{\cos \alpha}. \quad (3.2.32)$$

Пусть $\theta \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$, так что

$$a\theta \rightarrow b, \quad (3.2.33)$$

где $2b$ - ширина ленты. Перейдем в (3.2.31) к новым переменным: $y = a\varphi$, $y' = a\varphi'$, $g(y) = f(\varphi)$.

Учитывая, что второе слагаемое в (3.2.31) стремится к нулю, получим:

$$\left(\frac{d}{dy} - iu \right) \left(\frac{d}{dy} - iv \right) \int_{-b}^b H_0^{(2)}(\kappa|y' - y|) g(y') dy' = 0, \quad (3.2.34)$$

где

$$u = h \operatorname{tg} \alpha + \frac{\kappa}{\cos \alpha}, \quad v = h \operatorname{tg} \alpha - \frac{\kappa}{\cos \alpha}. \quad (3.2.35)$$

Функцию $g(y)$ необходимо подчинить условиям:

$$g(-b) = g(b) = 0 \quad (3.2.36)$$

Задача (3.2.34) - (3.2.36) описывает волны, распространяющиеся вдоль анизотропно проводящей ленты [84].

Таким образом, предельные случаи уравнения (3.2.21) $\theta \rightarrow \pi$ и $\theta \rightarrow 0$ приводят к известным результатам.

3.3. Аналитическое решение в случае малых углов подъема и узкой щели

Во второй главе исследованы резонансные явления при рассеянии плоской волны на анизотропно проводящем цилиндре, параметры которого удовлетворяют условиям

$$ka \ll 1, \left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right| \gg 1, \operatorname{tg} \alpha \ll 1. \quad (3.3.1)$$

Как известно, резонансы при рассеянии на цилиндрических объектах возникают, если эти объекты поддерживают слабо вытекающие волны, то есть комплексные волны, поперечные волновые числа которых $\kappa = \kappa' + i\kappa''$ лежат вблизи отрезка $(0, k)$ вещественной полуоси:

$$0 < \kappa' < k, |\kappa''| \ll \kappa'. \quad (3.3.2)$$

Эти волновые числа соответствуют быстрым волнам (собственным и несобственным) с малыми радиационными потерями. С их наличием связаны резонансные явления в задачах дифракции (в частности, резкое увеличение поперечника рассеяния). Предполагая, что выполнены условия (3.3.1), (3.3.2), получим дисперсионное уравнение для волновых чисел собственных волн анизотропного цилиндра.

В первом слагаемом уравнения (3.2.21) используем квазистатическое приближение для функции Грина (3.2.25)-(3.2.26). Во втором слагаемом уравнения (3.2.21) воспользуемся упрощением

$$G(\varphi' - \varphi) \cos(\varphi' - \varphi) \approx -\frac{1}{4\pi}, \quad (3.3.3)$$

состоящим в сохранении лишь нулевой гармоники в разложении ядра в ряд Фурье. Это позволяет правильно описать свойства квазистатической волны, у которой в разложении тока доминирует фурье-гармоника с индексом $m = 0$. В результате уравнение (3.2.21) приобретает вид

$$\left(\frac{d}{d\varphi} - i\nu \right) \left(\frac{d}{d\varphi} - i\mu \right) \int_{-\theta}^{\theta} G_0(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' - \frac{\beta \nu \mu}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi = 0, \quad (3.3.4)$$

где

$$\beta = \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{k^2}{\kappa^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad (3.3.5)$$

а ядро G_0 определяется по формуле (3.2.26). Тогда дисперсионное уравнение может быть получено в аналитической форме. В приближении (3.3.3) задача (3.2.21) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \int_{-\theta}^{\theta} G_0(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' = -\frac{\beta}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi + A \exp(i\nu\varphi) + B \exp(i\mu\varphi) \\ f(\pm\theta) = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Постоянные A и B в (3.3.6) не являются произвольными, они вместе с решением уравнения $f(\varphi)$ должны обеспечить обращение в нуль тока на краях ленты. В общем случае решение уравнения

$$\int_{-\theta}^{\theta} G_0(\varphi - \varphi') f(\varphi') d\varphi' = F(\varphi) \quad (3.3.7)$$

имеет особенности на краях интервала вида $f(\varphi) \approx 1/\sqrt{\theta^2 - \varphi^2}$. Для того, чтобы решение уравнения (3.3.7) обращалось на концах интервала в нуль, нужно, чтобы правая часть удовлетворяла двум соотношениям [93]:

$$2 \int_{-\theta}^{\theta} \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi = \frac{1}{\ln \sin \frac{\theta}{2}} \int_{-\theta}^{\theta} F(\varphi) \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi \quad (3.3.8)$$

$$\int_{-\theta}^{\theta} \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi = 0 \quad (3.3.9)$$

Решение уравнения (3.3.7) обладает свойством:

$$\int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\ln \sin \frac{\theta}{2}} \int_{-\theta}^{\theta} F(\varphi) \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi \quad (3.3.10)$$

Применяя к задаче (3.3.6) формулы (3.3.8) - (3.3.10), получим искомое дисперсионное уравнение. Подставляя в (3.3.8) - (3.3.10)

$$F(\varphi) = -\frac{\beta}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi + A \exp(i\nu\varphi) + B \exp(i\mu\varphi), \quad (3.3.11)$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi = & -\frac{1}{\ln \sin \frac{\theta}{2}} \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi + \\ & + \frac{1}{\ln \sin \frac{\theta}{2}} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{A \cos \nu\varphi \cos \frac{\varphi}{2} + B \cos \mu\varphi \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

$$2 \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\nu A \sin \nu\varphi \sin \frac{\varphi}{2} + B \mu \sin \mu\varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi = - \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi, \quad (3.3.13)$$

$$\int_{-\theta}^{\theta} \frac{\nu A \cos \nu \varphi \cos \frac{\varphi}{2} + B \mu \cos \mu \varphi \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\varphi = 0. \quad (3.3.14)$$

Воспользуемся формулами (2.2.37)-(2.2.38), получим:

$$\begin{aligned} A[P_{-\nu}(\cos \theta) + P_{\nu}(\cos \theta)] + B[P_{-\mu}(\cos \theta) + P_{\mu}(\cos \theta)] = \\ = \frac{1}{\pi} \left(\ln \sin \frac{\theta}{2} + \beta \right) \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

$$\begin{aligned} \nu A[P_{-\nu}(\cos \theta) - P_{\nu}(\cos \theta)] + \mu B[P_{-\mu}(\cos \theta) - P_{\mu}(\cos \theta)] = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

$$\nu A[P_{-\nu}(\cos \theta) + P_{\nu}(\cos \theta)] + \mu B[P_{-\mu}(\cos \theta) + P_{\mu}(\cos \theta)] = 0, \quad (3.3.17)$$

где $P_{\nu}(\cos \theta)$ - полиномы Лежандра. Исключая из полученной системы уравнений неизвестные A , B , и $\int_{-\theta}^{\theta} f(\varphi) d\varphi$, получаем искомое дисперсионное уравнение:

$$2 \left(\beta + \ln \sin \frac{\theta}{2} \right) \left[\frac{P_{-\nu}(\cos \theta) - P_{\nu}(\cos \theta)}{P_{-\nu}(\cos \theta) + P_{\nu}(\cos \theta)} - \frac{P_{-\mu}(\cos \theta) - P_{\mu}(\cos \theta)}{P_{-\mu}(\cos \theta) + P_{\mu}(\cos \theta)} \right] + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu} = 0 \quad (3.3.18)$$

Упростим дисперсионное уравнение (3.3.18), предполагая, что выполнены условия (3.3.1), (3.3.2). В этом случае $|\nu| \ll 1$, $|\mu| \ll 1$, и, следовательно

$$\begin{aligned} P_{-\nu}(\cos \theta) + P_{\nu}(\cos \theta) &\approx 2 \\ P_{-\nu}(\cos \theta) - P_{\nu}(\cos \theta) &\approx -4\nu \ln \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Из (3.3.18) и (3.3.19) с использованием (3.2.22), (3.2.23) и (3.3.5) получим

$$1 + 2(\kappa a)^2 \ln \cos \frac{\theta}{2} - 4(\kappa a)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \ln \cos \frac{\theta}{2} \ln \left(\frac{i\gamma \kappa a}{2} \right) = 0 \quad (3.3.20)$$

Это уравнение следует рассматривать в комплексной плоскости κa с разрезом, проведенным из точки $\kappa a = 0$ по мнимой положительной полуоси. При этом следует выбрать ту ветвь многозначной функции $\ln \left(\frac{i\gamma \kappa a}{2} \right)$, которая принимает вещественные значения на мнимой отрицательной полуоси. Так определенная функция обладает свойством

$$\left[\ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right) \right]^* = \ln \left(-\frac{i\gamma \kappa^* a}{2} \right). \quad (3.3.21)$$

Применяя операцию комплексного сопряжения к уравнению (3.3.20), и используя свойство (3.3.21) получаем

$$1 + 2(ka)^2 \ln \cos \frac{\theta}{2} - 4(\kappa^* a)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \ln \cos \frac{\theta}{2} \ln \left(-\frac{i\gamma \kappa^* a}{2} \right) = 0 \quad (3.3.22)$$

Поэтому комплексные корни уравнения (3.3.20) всегда парные: ka и $-\kappa^* a$. Это общее свойство открытых волноводов без тепловых потерь (см., например, [94]). Соответственно, продольные волновые числа образуют четверки $h, h^*, -h, -h^*$.

Уравнение (3.3.20) имеет корни $\kappa = \kappa' + i\kappa''$, соответствующее как собственным ($\kappa'' < 0$), так и несобственным ($\kappa'' > 0$) волнам. Поля собственных волн экспоненциально убывают на радиальной бесконечности, а поля несобственных волн - экспоненциально возрастают (см. (3.1.5)).

Легко видеть, что при выполнении условия

$$ka \sqrt{2 \left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right|} > 1 \quad (3.3.23)$$

уравнение (3.3.20) имеет корень, соответствующий медленной волне: $\operatorname{Re} \kappa = 0$, $\operatorname{Im} \kappa < 0$.

Если выполнено более сильное условие

$$ka \sqrt{2 \left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right|} \gg 1, \quad (3.3.24)$$

что соответствует очень узкой щели, то в уравнении (3.3.20) можно пренебречь первым слагаемым:

$$(ka)^2 = 2(\kappa a)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \ln \left(\frac{i\gamma ka}{2} \right). \quad (3.3.25)$$

Это уравнение совпадает с уравнением для анизотропного цилиндра без щели (16) при $m = 0$ и $|\kappa a| \ll 1$.

Если выполнено неравенство

$$ka \sqrt{2 \left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right|} < 1, \quad (3.3.26)$$

то уравнение (3.3.20) имеет комплексный корень, соответствующий вытекающей волне. Представим этот комплексный корень в показательной форме

$$ka = \rho \exp(i\psi) \quad (3.3.27)$$

Приравнивая нулю мнимую часть уравнения (3.3.20), получим связь между модулем ρ и аргументом ψ искомого корня в виде

$$\rho = \frac{2}{\gamma} \exp \left[- \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{ctg} 2\psi \right]. \quad (3.3.28)$$

Это уравнение описывает траекторию, по которой корень перемещается в комплексной плоскости ka при изменении частоты (рис. 3.1). Траектория касается вещественной оси в точке $ka = 0$, при этом

$$ka \sqrt{2 \left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right|} = 1 \quad (3.3.29)$$

С уменьшением частоты траектория попадает в первый квадрант комплексной плоскости. На частоте, определяемой из уравнения

$$1 + 2(ka)^2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \ln \frac{\gamma ka}{2} \right) = 0 \quad (3.3.30)$$

имеем $k' = k$. Уравнения (3.3.29) и (3.3.30) задают границы полосы частот k_1 и k_2 , где существует вытекающая волна. При изменении частоты угол между направлением высвечивания вытекающей волны и осью цилиндра изменяется от 0 (см. уравнение (3.3.29)) до $\pi/2$ (см. уравнение (3.3.30)). На рис. 3.1 показана траектория движения корня уравнения (3.3.20) в комплексной плоскости ka .

Нижняя частота отсечки вытекающей волны в отличие от верхней частоты зависит от угла подъема α . При малых углах подъема относительная ширина полосы мала:

$$\frac{\delta k}{k} \approx \operatorname{tg}^2 \alpha \left| \ln \frac{\gamma ka}{2} \right|. \quad (3.3.31)$$

Это свойство вытекающей волны можно использовать для частотного сканирования луча в антенных приложениях.

Во второй главе показано, что при нормальном падении плоской волны на анизотропно проводящий цилиндр с узкой продольной щелью на частоте, определяемой уравнением (3.3.30), имеет место резонанс. Таким образом, этот резонанс может быть объяснен свойствами волн, направляемых цилиндром.

В [86] показано, что в металлическом цилиндре с узкой продольной щелью $\left(\left| \ln \cos \frac{\theta}{2} \right| \gg 1 \right)$ в области частот (3.3.23) существует квазистатическая щелевая волна, причем на граничной частоте (3.3.29) волна высвечивается под прямым углом к оси цилиндра. Медленных волн в металлическом цилиндре нет. Видно, что свойства волн анизотропно проводящего и металлического цилиндра существенно различаются.

Выводы

1. Круглый цилиндр с продольной щелью, поверхность которого обладает свойством анизотропной проводимости вдоль винтовых линий с фиксированным углом подъема предложен и исследован в качестве замедляющей структуры. Получено интегральное уравнение для собственных токов и его аналитическое решение для случая малых углов подъема винтовых линий проводимости.
2. Показано, что в предельных случаях дисперсионное и интегродифференциальное уравнения сводятся к соответствующим задачам для сплошного анизотропно проводящего цилиндра и анизотропно проводящей ленты.
3. Определен диапазон частот, в котором существуют медленные и вытекающие волны для случая цилиндра с малым углом подъема линий проводимости. При изменении частоты угол между направлением высвечивания вытекающей волны и осью цилиндра изменяется от 0 до $\pi/2$.
4. Установлена связь между слабо вытекающими волнами и обнаруженными во второй главе резонансами рассеяния в задаче дифракции плоской волны.
5. Показано существенное различие между волновыми свойствами анизотропно проводящего и металлического цилиндра.

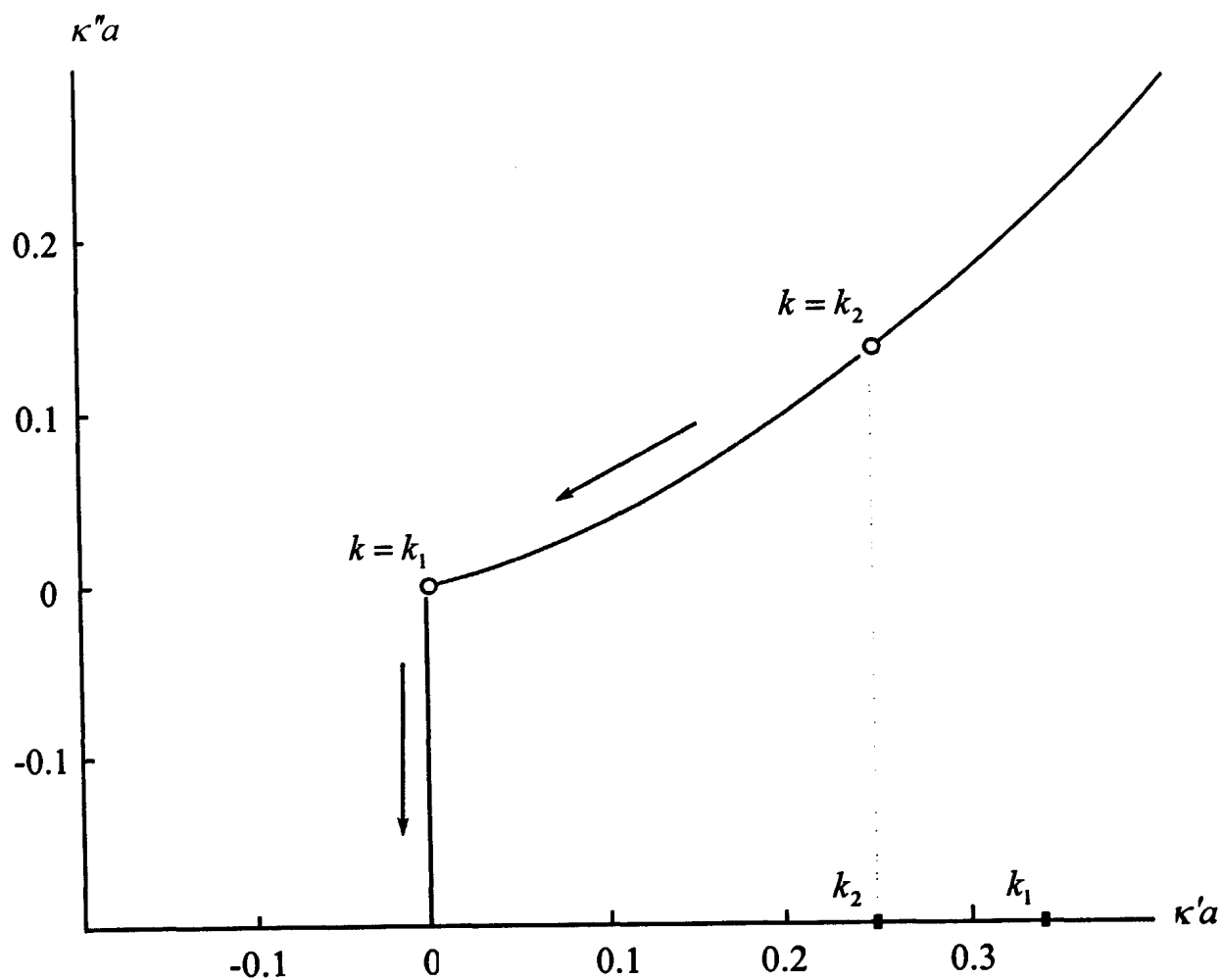


Рис. 3.1. Траектория в комплексной плоскости κ поперечного волнового числа для волны, найденной в квазистатическом приближении. Стрелкой показано направление возрастания частоты k . Слабо вытекающая волна существует в области частот (k_2, k_1) .

Приложение 1

Для рассеивателей, не поглощающих и не выделяющих энергию, справедлива оптическая теорема [90], которая позволяет выразить полную рассеянную мощность через значение диаграммы рассеяния в направлении распространения падающей волны. Пусть компоненты E_z^0 и H_z^0 в падающей плоской волне имеют вид:

$$\begin{aligned} E_z^0 &= A_E \exp[-i\kappa r \cos(\varphi - \varphi_0) - ihz], \\ H_z^0 &= A_H \exp[-i\kappa r \cos(\varphi - \varphi_0) - ihz]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В плоскости интегрирования $z = \text{const}$ окружим ленту контуром S . Поскольку волна является цилиндрической, вместо векторов Герца можно использовать для описания электромагнитного поля скалярные потенциалы u , v , [3], которые вне S удовлетворяют уравнению Гельмгольца, а при $\kappa r \rightarrow \infty$ представляются в виде суммы плоской волны

$$\vec{E}_0 = \vec{n} \exp[-i\kappa r \cos(\varphi - \varphi_0) - ihz], \quad (1.2)$$

расходящейся цилиндрической волны

$$E_z^s \approx \frac{\Phi_z^E(\varphi)}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-i\kappa r - ihz), \quad H_z^s \approx \frac{\Phi_z^H(\varphi)}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-i\kappa r - ihz). \quad (1.3)$$

Здесь $\kappa = k \sin \theta_0$, $h = k \cos \theta_0$, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число в свободном пространстве. Опуская множитель $\exp(-ihz)$, получаем

$$E_z = \kappa^2 u, \quad H_z = \kappa^2 v, \quad (1.4)$$

$$u \approx A_E \exp(-i\kappa r \cos(\varphi - \varphi_0)) + \frac{\Phi_z^E(\varphi)}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-i\kappa r), \quad \kappa r \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

$$v \approx A_H \exp(-i\kappa r \cos(\varphi - \varphi_0)) + \frac{\Phi_z^H(\varphi)}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-i\kappa r), \quad \kappa r \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

$$E_\varphi = ik \frac{\partial v}{\partial r} - ih \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = -ih \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - ik \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (1.7)$$

или в случае произвольного контура

$$E_s = ik \frac{\partial v}{\partial \vec{N}} - ih \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}, \quad H_s = -ih \frac{\partial v}{\partial \vec{s}} - ik \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}, \quad (1.8)$$

где \vec{N} есть нормаль к контуру S , \vec{s} направлен по касательной к S . Вычислим вектор Пойтинга

$$\begin{aligned} E_s H_z^* - E_z H_s^* &= ik\kappa^2 v^* \frac{\partial v}{\partial \vec{N}} - ih\kappa^2 u \frac{\partial v}{\partial \vec{s}} - ih\kappa^2 u \frac{\partial v}{\partial \vec{s}} - ik\kappa^2 u \frac{\partial u^*}{\partial \vec{N}} = \\ &= ik\kappa^2 v^* \frac{\partial v}{\partial \vec{N}} - ik\kappa^2 u \frac{\partial u^*}{\partial \vec{N}} - ih\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \vec{s}} (v^* u), \end{aligned}$$

поэтому

$$\oint_S (E_s H_z^* - E_z H_s^*) d\bar{s} = ik\kappa^2 \oint_S v^* \frac{\partial v}{\partial \bar{N}} d\bar{s} - ik\kappa^2 \oint_S u \frac{\partial u^*}{\partial \bar{N}} d\bar{s}, \quad (1.9)$$

или

$$\operatorname{Re} \oint_S (E_s H_z^* - E_z H_s^*) d\bar{s} = k\kappa^2 \left(\operatorname{Im} \oint_S v^* \frac{\partial v}{\partial \bar{N}} d\bar{s} + \operatorname{Im} \oint_S u \frac{\partial u^*}{\partial \bar{N}} d\bar{s} \right). \quad (1.10)$$

Поскольку лента не выделяет энергии, то выражение (1.10), имеющее смысл усредненного потока энергии через поверхность, охватывающую ленту, равно тождественно нулю, следовательно

$$\operatorname{Im} \oint_S v^* \frac{\partial v}{\partial \bar{N}} d\bar{s} + \operatorname{Im} \oint_S u \frac{\partial u^*}{\partial \bar{N}} d\bar{s} \equiv 0. \quad (1.11)$$

Каждая из функций u , v удовлетворяет следующим условиям (1.12) - (1.14):

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} \approx ik \left\{ \cos(\varphi - \varphi_0) A^* \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)] + \frac{\Phi_z(\varphi)}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-ikr) \right\}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \oint_S u \frac{\partial u^*}{\partial \bar{N}} d\bar{s} &= \operatorname{Im} \oint_S u \frac{\partial u^*}{\partial \bar{N}} r d\varphi = \\ &= \operatorname{Re} \oint_S \left[\cos(\varphi - \varphi_0) |A|^2 + \frac{|\Phi_z(\varphi)|^2}{\kappa r} + A \Phi_z^* \exp(\chi) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\varphi - \varphi_0) \frac{A^* \Phi_z(\varphi)}{\sqrt{\kappa r}} \exp(-\chi) \right] \kappa r d\varphi, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $\chi = ikr[1 - \cos(\varphi - \varphi_0)]$, а контур \bar{S} представляет собой окружность, радиус которой r стремится к бесконечности (начало координат находится в области, охватываемой контуром S). Запишем соотношение (1.4.11) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\Phi_z(\varphi)| d\varphi &= \operatorname{Im} \oint_S u \frac{\partial u^*}{\partial \bar{N}} ds - \\ &- \sqrt{\kappa r} \operatorname{Re} A^* \oint_S [1 + \cos(\varphi - \varphi_0)] \Phi_z(\varphi) \exp(-\chi) d\varphi, \end{aligned}$$

или, вычисляя этот интеграл при $\kappa r \rightarrow \infty$ методом стационарной фазы:

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_z(\varphi)| d\varphi = \operatorname{Im} \oint_S u \frac{\partial u^*}{\partial \bar{N}} ds - 2 \sqrt{2\pi \operatorname{Re} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \Phi_z(\varphi_0) A^* \right]}. \quad (1.14)$$

Из (1.14), учитывая (1.11), получаем соотношение

$$\int_0^{2\pi} \left[|\Phi_z^E(\varphi)|^2 + |\Phi_z^H(\varphi)|^2 \right] d\varphi =$$

$$= -2\sqrt{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}} \left[A_E^* \Phi_z^E(\varphi_0) + A_H^* \Phi_z^H(\varphi_0) \right] \right\}. \quad (1.15)$$

Таким образом, соотношение (1.15) является следствием закона сохранения энергии, записанном в виде (1.11). В [90] приводится аналогичное соотношение для двумерной скалярной задачи в случае плоских экранов.

Приложение 2

Покажем, что выполняются следующие тождества:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi [P_{-n}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta)] = 1, \quad |\varphi| < \theta, \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n}(\cos\theta) + P_n(\cos\theta)] = 0, \quad |\varphi| < \theta, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \{ [P_{-n-1}(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta)] + [P_{-n+1}(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)] \} = \\ = 2 \cos \varphi - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad |\varphi| < \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi \{ [P_{-n-1} + P_{n+1}] + [P_{-n+1} + P_{n-1}] \} = 2 \sin \varphi, \quad |\varphi| < \theta. \quad (2.4)$$

Известно следующее интегральное представление для полиномов Лежандра при неотрицательных значениях индекса n [92]:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Положим $n \geq 1$ и вычислим $P_{-n}(\cos\theta) + P_n(\cos\theta)$. Имеем:

$$P_{-n}(\cos\theta) + P_n(\cos\theta) = P_{n-1}(\cos\theta) + P_n(\cos\theta) \quad (2.6)$$

Подставив в (2.6) представление (2.5), получим

$$P_{-n}(\cos\theta) + P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\varphi \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Аналогично получим

$$P_{-n}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta) = -\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos n\varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Введем на полном интервале $-\pi < \varphi < \pi$ четную функцию $s(\varphi)$ формулой

$$s(\varphi) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}, & \theta < \varphi < \pi \\ 0, & |\varphi| < \theta \\ \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}, & -\pi < \varphi < -\theta \end{cases} \quad (2.9)$$

Из (2.5) и (2.9) следует формула

$$\int_{-\pi}^{\pi} s(\varphi) d\varphi = 2 \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi = 2\pi P_0(\cos \theta) = 2\pi. \quad (2.10)$$

Любая четная функция $s(\varphi)$ разлагается в ряд Фурье вида:

$$s(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \int_{-\pi}^{\pi} s(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad |\varphi| < \pi. \quad (2.11)$$

Подставляя в (2.11) выражение (2.9) и учитывая формулы (2.8) и (2.10), получим (2.1).

Аналогично, введем на полном интервале $-\pi < \varphi < \pi$ нечетную функцию $t(\varphi)$:

$$t(\varphi) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}, & \theta < \varphi < \pi \\ 0, & |\varphi| < \theta \\ -\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}, & -\pi < \varphi < -\theta \end{cases} \quad (2.12)$$

Любая нечетная функция $t(\varphi)$ разлагается в ряд

$$t(\varphi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi \int_{-\pi}^{\pi} t(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad |\varphi| < \pi \quad (2.13)$$

Подставляя в (2.13) формулу (2.12) и учитывая (2.7), получим (2.2).

Покажем, что из формулы (2.1) следует (2.3). Для упрощения записи выражений будем в следующих ниже доказательствах обозначать $P_n = P_n(\cos \theta)$. Преобразуем левую часть (2.3):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \{ [P_{-n-1} - P_{n+1}] + [P_{-n+1} - P_{n-1}] \} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi [P_{-n-1} - P_{n+1}] + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi [P_{-n+1} - P_{n-1}] \end{aligned}$$

В первой сумме сделаем подстановку

$$\cos n\varphi = \cos(n+1)\varphi \cos \varphi + \sin(n+1)\varphi \sin \varphi, \quad (2.14)$$

а во второй сумме – подстановку

$$\cos n\varphi = \cos(n-1)\varphi \cos \varphi - \sin(n-1)\varphi \sin \varphi. \quad (2.15)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi [P_{-n-1} - P_{n+1}] + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi [P_{-n+1} - P_{n-1}] = \\ = \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n+1)\varphi (P_{-n-1} - P_{n+1}) + \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n+1)\varphi (P_{-n-1} - P_{n+1}) + \\ + \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n-1)\varphi (P_{-n+1} - P_{n-1}) - \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n-1)\varphi (P_{-n+1} - P_{n-1}) = \\ = \cos \varphi \left\{ 2 \sum_{n=2}^{\infty} \cos n\varphi (P_{-n} - P_n) + \cos \varphi (P_{-1} - P_1) \right\} - \sin^2 \varphi (P_{-1} - P_1) \end{aligned}$$

С учетом того, что $P_{-1} = 1$, $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, а так же с учетом (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \{ [P_{-n-1} - P_{n+1}] + [P_{-n+1} - P_{n-1}] \} = \\ = 2 \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi (P_{-n} - P_n) - (1 - \cos \theta) = 2 \cos \varphi - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (2.3).

Следствием формулы (2.2) является соотношение (2.4). Для доказательства преобразуем левую часть формулы (2.4):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi \{ [P_{-n-1} + P_{n+1}] + [P_{-n+1} + P_{n-1}] \} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n-1} + P_{n+1}] + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n+1} + P_{n-1}] \end{aligned}$$

В первой сумме сделаем подстановку

$$\sin n\varphi = \sin(n+1)\varphi \cos \varphi - \cos(n+1)\varphi \sin \varphi, \quad (2.16)$$

а во второй сумме – подстановку

$$\sin n\varphi = \sin(n-1)\varphi \cos \varphi + \cos(n-1)\varphi \sin \varphi. \quad (2.17)$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n-1} + P_{n+1}] + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n+1} + P_{n-1}] = \\
 & = \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n+1)\varphi (P_{-n-1} + P_{n+1}) - \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n+1)\varphi (P_{-n-1} + P_{n+1}) + \\
 & + \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n-1)\varphi (P_{-n+1} + P_{n-1}) + \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n-1)\varphi (P_{-n+1} + P_{n-1}) = \\
 & = \cos \varphi \left\{ 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sin n\varphi (P_{-n} + P_n) + \sin \varphi (P_{-1} + P_1) \right\} + \sin \varphi \{ 2P_0 + \cos \varphi (P_{-1} + P_1) \} = \\
 & = \cos \varphi \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi (P_{-n} + P_n) - \sin \varphi (P_{-1} + P_1) \right\} + \sin \varphi \{ 2P_0 + \cos \varphi (P_{-1} + P_1) \}
 \end{aligned}$$

С учетом (2.2) и того, что $P_0 = 1$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n-1} + P_{n+1}] + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi [P_{-n+1} + P_{n-1}] = 2 \sin \varphi ,$$

что совпадает с правой частью формулы (2.4).

Список литературы.

1. М. А. Леонтович. Исследования распространения радиоволн. - М.: Изд-во АН СССР, 1948.
2. Schelkunoff S. A.// Bell Syst. Tech. J., vol.17, pp.17-48, Jan. 1938.
3. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. - М.: Наука, 1966.
4. Amari S., Vahldieck R., Bornemann, J. in 1998 URSI International Symposium on Signal, Systems, and Electronics (Pisa, 29 September – 2 October 1998). P. 482.
5. P. J. B. Clarricoats, A. D. Olver. Corrugated Horns for Microwave Antennas. - Peter Peregrinus Ltd., London, UK, 1984.
6. Olver A.D.// Electronics & Communication Engineering Journal, 1992. V. 4. № 1. P. 4.
7. Gentili, G.G., Nesti R., Pelosi G., Natale V. // Electronics Letters, 2000. V. 36. № 6. P. 486.
8. Терешин О.Н., Седов В.М., Чаплин А.Ф. Синтез антенн на замедляющих структурах. – М.: Связь, 1980.
9. Панченко Б.А., Нефедов Е.И. Микрополосковые антенны. - М.: Радио и связь, 1986.
10. James J.R., Hall P.S. Wood C. Microstrip Antennas: Theory and Design. - New York: Peregrinus, 1984.
11. Филиппов В.С., Пономарев Л.И., Гринев А.Ю. и др. под ред. Воскресенского. А.Ю. Антенны и устройства СВЧ. Проектирование фазированных антенных решеток. – М.: Радио и связь, 1994.
12. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973.
13. Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н. и др. Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями. Методы конструктивного синтеза./ Под ред. Каценеленбаума Б.З., Сивова А.Н. - М.: Наука, 1989.
14. Нефедов Е.И., Сивов А.Н. Электродинамика периодических структур. - М.: Наука, 1977.
15. Сивов А.Н., Чуприн А.Д., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 8-9. С. 1276.
16. Sivov A.N., Chuprin A.D., Shatrov A.D.// Proc. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ 94) (Kharkov, September 7-10, 1994). P. 403.
17. Guglielmi, M.; Jackson, D.R.// IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1991. V. 39. № 10. P. 1479.
18. Kobayashi K., Miura K. // IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1989. V. 37. № 4. P. 459.

19. Kriezis E.E., Chrissoulidis D.P. // IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1993. V. 41. № 11. P. 1473.
20. Manara, G.; Nepa, P.; Pelosi, G.// IEEE Trans. Antennas and Propagation, 2000. V. 48. № 5. P. 790.
21. Chuprin A.D., Parker E.A., Shatrov A.D., Sivov A.N., Solosin V.S., Zubov A.S., Langley R.J. // IEE Proc. Microwaves, Antennas and Propagation, 1998. V. 145. № 5. P. 411.
22. Senior, T.B.A., Legault, S.R. in Antennas and Propagation Society International Symposium (Montreal, 13-18 July, 1997). P. 1784.
23. Nefedov Y. I., Fialkovskiy A. T.// Radio Eng. Electron. Phy., 1972. V.17, № 6, P.887.
24. Nepa, P.; Manara, G.; Armogida, A.// IEEE Trans. Antennas and Propagation. 2001. V. 49. № 1. P. 106.
25. Rojas R. G.// IEEE Trans. Antennas Propagation. 1988. V. 36, № 7. P. 956.
26. Manara G., Nepa P., Pelosi G.// Electronics Letters, 1996.V. 32, № 13. P.1179.
27. Pelosi, G., Manara, G., Nepa. P. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1998. V. 46. № 4. P. 579.
28. Климов А.В., Петров Б.М., Семенихин А.И.// Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1985. Т. 28. № 2. С. 74.
29. Manara, G.; Monorchio, A.; Pelosi, G.; Coccioli, R. in Antennas and Propagation Society International Symposium (Newport Beach, June 18-23, 1995). Vol.1. P. 14.
30. Габриэлян Д.Д., Звезда М.Ю.// Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 8. С. 875.
31. Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 1. С. 28.
32. Lindell I et al. Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media. Artech House, 1994.
33. Svogel J., Michielssen E., Mittra, R. in Proc. of 3rd International Workshop on Chiral, Bi-isotropic, and Bi-anisotropic Media. 1994. P. 89.
34. С.А. Третьяков. //Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 10. С. 1457.
35. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982.
36. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов. - М.: УРСС, 2001.
37. Bahr A.J., Clausing K.R. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1994. Vol. 42. № 12. P. 1592.
38. Mariotte, F.; Tretyakov, S.A.; Sauviac, B.// IEEE Antennas and Propagation Magazine. 1996. Vol. 38. № 2, P. 22.
39. Tretyakov S.A. et al.// IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1996. V. 44. № 7. P. 1006.

40. Шевченко В.В.// Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40. № 12. С. 1777.
41. Kostin M.V. Shevchenko V.V. in *Advances in Complex Electromagnetic Materials* (Eds. A. Priou, S. Tretyakov, A. Vinogradov) (Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publ., 1997).
42. Jaggard. D. et al.// *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1989. V. 37. № 11. P. 1447.
43. Третьяков С.А., Харина Т.Г., Сочава А.А. //Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2001. № 2 (24).
44. Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.//Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 5. С. 517.
45. Шатров А.Д. //Радиотехника. 1999. № 4. С. 1168.
46. Korshunova E.N., Sivov A.N., Shatrov A.D. in *Proc. of IVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory* (Lviv, 20-23 September, 1999), P. 165.
47. Yeah S.H., Kong J.A.// *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 1991. № 5. P. 701.
48. Каценеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д. // Успехи физических наук. 1997. Т. 167. № 11. С. 1201.
49. Loukos G., Vardaxoglou J.C. // *Electronics Letters*, 1995. V. 31. № 10. P. 778.
50. Коршунова Е.Н. Прибытько М.П., Сивов А.Н. и др.// Зарубежная радиоэлектроника. 1997. № 8. С. 44.
51. Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.//Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 12. С. 1.
52. Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 8. С. 911.
53. Casey J.P., Bansal R.// *Radio Science*. 1998. Т. 23. № 6. С. 1141.
54. Bahr A.J., Clausing K.R. // *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1994. Vol. 42. № 12. P. 1592.
55. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны*. – М.: Радио и связь, 1988.
56. Terado N. And Kagoshima K. // *Electronics Letters*, 1991, Vol. 27, № 12, pp. 1108-1109.
57. Nakano H., Mimaki H., Yamauchi J. // *Electronics Letters*, 1991, Vol. 27, № 17, pp. 1568-1569.
58. Shatrov A.D. Sivov A.N. Chuprin A.D.// *Electronics Letters*. 1994. Vol. 30. № 19. P. 1558.
59. Прибытько М.П., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 12.
60. Shatrov A.D., Nikitin I.P. in *Proc. of the Second International Symposium of Trans Black Sea Region on Applied Electromagnetism*, 2000. (Xanthi, 27-29 June, 2000). P. 76.
61. Chen C.L.// *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1996. V. 14. № 3. P. 283.

62. Uhm H.S. in 1996 IEEE International Conference on Plasma Science (Boston, 3-5 June 1996). P. 105.
63. Сивов А. Н., Чуприн А. Д., Шатров А.Д. //Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39 № 10 С. 1534.
64. Chuprin A.D., Shatrov A.D., Sivov A.N. in Proc. of 24 European Microwave Conference (Cannes, 5-8 September, 1994).
65. Прибытько М.П., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 1. С. 23.
66. Прибытько М.П., Шатров А.Д.// Электромагнитные волны & электронные системы. 1998. Т. 3. № 2. С. 59.
67. Chuprin A.D., Shatrov A.D., Sivov A.N. in Proc. of 24th European Microwave Conference. 1994. P. 596.
68. Носич А. И., Шестопапов В.П.// Доклады АН СССР. 1977. Т. 234. № 1. С. 53.
69. Nakano H., Takeda H, Kitamura Y., Mimaki H., Yamauchi J. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1992. V. 40. № 3. P. 279.
70. Сивов А.Н., Чуприн А.Д., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 12. С. 1981.
71. Chuprin A.D., Shatrov A.D., Sivov A.N. in Proc. of 15th International Symposium on Electromagnetic Theory (St. Petersburg, May 23-26, 1995). P. 242.
72. Sivov A.N., Chuprin A.D., Shatrov A.D.// Electromagnetic Waves and Electronic Systems. 1996. Vol. 1. № 1. P. 79.
73. Chuprin A.D., Shatrov A.D., Sivov A.N. in Proc. of International Conference on Chiral Bi-isotropic and Bi-anisotropic Media (Penn. St. University, 11-14 October, 1995).
74. Сивов А.Н., Чуприн А.Д., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 5. С. 539.
75. Сивов А.Н., Чуприн А.Д., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 8. С. 918.
76. Сивов А.Н., Чуприн А.Д., Шатров А.Д.// Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. № 1. С. 74.
77. Chuprin A.D., Shatrov A.D., Sivov A.N. in Proc. of 11 International Microwave Conference MIKON-96 (Warsaw, 27-30 May, 1996).
78. Chuprin. A. Et al., in Proc. of 6th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ-96) (Lviv, 10-13 September, 1996). P. 529.
79. Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 10. С. 1157.
80. Аплеталин В.Н., Малышкин П.А., Солосин В.С., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 12. С. 1426.

81. Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1998, Т. 43 № 2 С. 153.
82. Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 12. С. 1431.
83. Korshunova E.N., Korshunov I.P., Sivov A.N., Shatrov A.D. in Proc. of 3rd Workshop on Electromagnetic and Light Scattering. Theory and Applications (Bremen, March 16-17, 1998). P. 141.
84. Коршунова Е.Н., Коршунов Н. П., Сивов А. Н., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1998, Т.43 № 8. С. 915.
85. Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 9. С. 1085.
86. Велиев Э.И., Носич А.И., Шестопапов В.П.// Радиотехника и электроника. 1977. № 3. С. 466.
87. Аплеталин В.Н., Малышкин П.А., Солосин В.С., Шатров А.Д.// Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 1. С. 33.
88. Kazantsev Yu.N., Apletalin V.N., Solosin V.S., Zubov A.S.// Journal of Radioelectronics. 2000. № 4.
89. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982.
90. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.Ж Мир, 1964.
91. Прудников А. П., Брычков Ю. А. Маричев О. И. Специальные функции. Интегралы и ряды. М.: Наука 1983.
92. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
93. Шестопапов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971.
94. Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1969.