Министерство Российской Федерации
по связи и информатизации

Московский технический университет
связи и информатики

На правах рукописи

Ларионччиков Роман Сергеевич

УДК 517.5

Некоторые аналоги формулы Планшереля–Ротаха для классических ортогональных многочленов

Специальность 01.01.01 – "Математический анализ"

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель –
доктор физико–математических наук
профессор П.К. Суетин

Москва-2003

Выражаю глубокую признательность всем, кто помог при подготовке данной рукописи и способствовал продвижению моих научных познаний в области оргональных многочленов. Особую благодарность хочется выразить моим родителям, Сергею Михайловичу и Вере Никитичне за моральную поддержку; научному руководителю профессору Суетину Павлу Кондратьевичу за воспитательную работу; научному руководителю на мехмате МГУ профессору Гаврилову Валериану Ивановичу и преподавателю мехмата МГУ Субботину Алексею Владимировичу за чуткое внимание к моей дипломной работе; профессору Аптекареву Александру Ивановичу, профессору Осиленкеру Борису Петровичу и доктору физико-математических наук Сорокину Владимиру Николаевичу за согласие в написании отзыва на данную рукопись; моему преподавателю математики в школе Хакимуллину Евгению Робертовичу за помощь в подготовке к защите диссертации; профессору Лившицу Михаилу Исааковичу за полезное общение на математические темы; редакции журнала "Математические заметки"; библиотекарям МГУ, МТУСИ, РГБ и ГПНТБ, которых считаю за соавторов этого труда, который без их помощи был бы невозможен. Пусть простят меня мои учителя школы N 693, мехмата МГУ и МТУСИ; мои родные в Москве, Харькове, Белгороде, Париже, других городах и весях; профессора и доценты Ученого Совета МГИЭМа, где защищалась диссертационная работа — всех Вас так много, что боюсь кого-нибудь не упомнить. Спасибо всем, кого забыл здесь отметить и без кого этот труд не состоялся бы.

Автор

Данная работа поддержана РФФИ, проекты N 01-01-00051 и 04-01-00192

Содержание

Введение

Пусть на интервале (a, b) определена весовая функция $h(x)$ [8]. Тогда существует система ортонормированных многочленов

$$\widehat{B}_0(x), \widehat{B}_1(x), \widehat{B}_2(x), \ldots , \widehat{B}_n(x), \ldots , \tag{1}$$

т.е. таких, для которых выполняются условия

$$\int\limits_a^b h(x)\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_m(x)dx = \delta_{nm},$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

В теории ортогональных многочленов рассматривается случай, когда функция $h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона. Тогда многочлены (1) называются классическими [8].

Одной из ключевых задач, стоящих на пересечении теории ортогональных многочленов и теории специальных функций, является задача вычисления значения многочлена в произвольной точке на интервале ортогональности. Решение данного вопроса имеет следующие применения:

1) исследование различных видов сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\widehat{B}_n(x), \text{ где } a_n = \int\limits_a^b h(x)f(x)\widehat{B}_n(x)dx, x \in (a, b); \tag{2}$$

2) вычисление значений ряда (2) в произвольной точке на интервале (a, b);

3) изучение асимптотики коэффициентов Фурье a_n;

4) определение условий ограниченности многочленов $\widehat{B}_n(x)$ в отдельной точке, или на некотором множестве внутри (a, b), или на всем сегменте ортогональности.

Возникает задача об асимптотическом поведении последовательности (1) при возрастании номера n. Для исследования асимптотических свойств ортогональных многочленов применяются различные специальные методы и приемы [7].

Асимптотические свойства классических ортогональных многочленов подробно исследуются методом Лиувилля–Стеклова, который называется также методом интегро–дифференциальных уравнений. В случае, когда для ортогональных многочленов имеют место интегральные представления, применяется метод перевала. Метод Дарбу основан на производящих функциях. Наиболее универсальным является метод Г. Сеге, который применяется в самых общих случаях.

К настоящему времени с помощью этих и других методов получено много результатов по асимптотическим свойствам ортогональных многочленов. Наиболее важные результаты получили П. Лаплас, Гейне, Мелер, Дарбу, Стилтьес, Хильб, Г. Сеге, Фейер, Перрон, Планшерель, Ротах, Ватсон. Большая часть их утверждений относится к классическим ортогональным многочленам.

В 1929–м году Планшерель и Ротах [17] с помощью метода перевала получили новые асимптотические формулы для многочленов Чебышева–Эрмита. Стандартизованные многочлены Чебышева–Эрмита могут быть определены по формуле

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, \tag{3}$$

где n – степень многочлена. Планшерель и Ротах доказали следующее.

Теорема 1. *Пусть ε и ω – фиксированные положительные* *числа. Справедливы следующие соотношения:*

(a) при $x = (2n+1)^{1/2}\cos\varphi$, $\varepsilon \le \varphi \le \pi - \varepsilon$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}(n!)^{\frac{1}{2}}(\pi n)^{-\frac{1}{4}}(\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\{ \sin\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)(\sin 2\varphi - 2\varphi) + \frac{3\pi}{4}\right] + O(n^{-1}) \right\}; \quad (4)$$

(b) при $x = (2n+1)^{1/2}\operatorname{ch}\varphi, \varepsilon \le \varphi \le \omega$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}-\frac{3}{4}}(n!)^{\frac{1}{2}}(\pi n)^{-\frac{1}{4}}(\operatorname{sh}\varphi)^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)(2\varphi - \operatorname{sh} 2\varphi)\right][1 + O(n^{-1})]; \quad (5)$$

(c) при $x = (2n+1)^{1/2} - 2^{-1/2}3^{-1/3}n^{-1/6}t$, t *– ограниченное комплексное число,*

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = 3^{\frac{1}{3}}\pi^{-\frac{3}{4}}2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}(n!)^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{12}}\left\{A(t) + O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\right\}, \quad (6)$$

где $A(t)$ *– функция Эйри, определяемая по формуле*

$$A(t) = \frac{\pi}{3}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^{3\nu}}{\nu!\Gamma\left(\nu+\frac{2}{3}\right)} + \frac{\pi}{3}\frac{x}{3}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^{3\nu}}{\nu!\Gamma\left(\nu+\frac{4}{3}\right)}. \quad (7)$$

В формулах (4)–(6) оценка остаточного члена равномерна.

Многочлены (3) удовлетворяют уравнению

$$y''_{xx} + (2n+1-x^2)y = 0. \quad (8)$$

Формулы (4), (5) и (6) характеризуют поведение многочленов (3) вне и вблизи точки поворота $x = \sqrt{2n+1}$ дифференциального уравнения (8).

Стандартизованные многочлены Чебышева–Лагерра могут быть определены по формуле

$$L_n(x;\alpha) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right)^{(n)},$$

где n – степень многочлена. В 1934-м году Меклин [15] применил метод перевала, рассматривая данные многочлены в случае $\alpha = 0$. Позднее Г.Сеге рассмотрел случай произвольного α [7] и доказал нижеприводимое утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > -1, \alpha \in \mathbb{R}$, ε и ω – фиксированные положительные числа. Справедливы следующие соотношения:*

(a) при $x = (4n + 2\alpha + 2)\cos^2\varphi$, $\varepsilon \le \varphi \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon n^{-1/2}$

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x;\alpha) = (-1)^n (\pi \sin\varphi)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \times \\ \times \left\{ \sin\left[\left(n + \frac{\alpha+1}{2} \right)(\sin 2\varphi - 2\varphi) + \frac{3\pi}{4} \right] + (nx)^{-\frac{1}{2}} O(1) \right\}; \quad (9)$$

(b) при $x = (4n + 2\alpha + 2)\operatorname{ch}^2\varphi, \varepsilon \le \varphi \le \omega$

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x;\alpha) = \frac{1}{2}(-1)^n (\pi \operatorname{sh}\varphi)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \times \\ \times \exp\left[\left(n + \frac{\alpha+1}{2} \right)(2\varphi - \operatorname{sh} 2\varphi) \right] [1 + O(n^{-1})]; \quad (10)$$

(c) при $x = 4n + 2\alpha + 2 - 2\left(\frac{2n}{3}\right)^{1/3} t$, t – ограниченное комплексное число,

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x;\alpha) = (-1)^n \pi^{-1} 2^{-\alpha-\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} \left\{ A(t) + O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right) \right\}, \qquad (11)$$

где $A(t)$ – функция Эйри (7).

Во всех этих формулах оценка остаточного члена равномерна.

В дальнейшем Сковгор [12, 19] и Эрдейи [11] получили обобщения для формул (6) и (11). Ортонормированные многочлены Чебышева–Эрмита и Чебышева–Лагерра определяются соответственно по формулам [8]

$$\widehat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\sqrt{\pi}2^n}}$$

и

$$\widehat{L}_n(x;\alpha) = (-1)^n \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}} L_n(x;\alpha).$$

Было доказано следующее

Теорема 3. *([19, 12, 10])*

$$H_n((2n+1)^{1/2}x) = \\ = (2\pi)^{\frac{1}{2}}(2n+1)^{n/2+1/6} \exp\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\right] \times \\ \times |\phi_1'|^{-1/2}\left\{\mathrm{Ai}(-(2n+1)^{2/3}\phi_1) + \right. \\ \left. + O\left(\frac{\widetilde{\mathrm{Ai}}(-(2n+1)^{2/3}\phi_1)}{n(1+x^2)}\right)\right\} \quad (12)$$

равномерно на промежутке

$$-1 < a \le x < \infty$$

при $n \to \infty$. *Здесь*

$$\frac{2}{3}\phi_1^{\frac{3}{2}}(x) = \int_x^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \text{ при } a \le x \le 1,$$

$$\frac{2}{3}(-\phi_1(x))^{\frac{3}{2}} = \int_1^x (t^2-1)^{\frac{1}{2}} dt \text{ при } 1 \le x < \infty,$$

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt \quad (13)$$

— *интеграл Эйри,*

$$\widetilde{\mathrm{Ai}}(x) = \begin{cases} \mathrm{Ai}(x), & \text{если } x \ge 0, \\ (|\mathrm{Ai}(x)|^2 + |\mathrm{Bi}(x)|^2)^{1/2}, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \left\{ e^{tx-\frac{1}{3}t^3} + \sin\left(tx + \frac{1}{3}t^3\right)\right\} dt. \quad (15)$$

Для многочленов Чебышева–Лагерра аналог теоремы 3 выглядит следующим образом

Теорема 4. *([11, 10]) Пусть* $0 < a = a(n, \alpha) \le x, n \ge n_0, \alpha > 0$*. Тогда*

$$L_n(x;\alpha) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\pi}{-\phi_2'}\right)^{1/2} \times \\ \times 2^{-N/2+1/2} N^{N/4+1/6} e^{-N/4} x^{-(\alpha+1)/2} e^{x/2} \times \\ \times \left\{\mathrm{Ai}(-N^{2/3}\phi_2) + O\left[\frac{1}{x}\widetilde{\mathrm{Ai}}(-N^{2/3}\phi_2)\right]\right\}, \quad (16)$$

где $N = 4n + 2\alpha + 2, t = x/N, 0 < t < \infty$*,*

$$\phi_2(t)\left[\phi_2'(t)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t} - 1\right),$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \left[\frac{3}{4}\left(\arccos t^{1/2} - (t - t^2)^{1/2}\right)\right]^{2/3} & \text{при } 0 < t \le 1, \\ -\left[\frac{3}{4}\left((t^2 - t)^{1/2} - \operatorname{arch} t^{1/2}\right)\right]^{2/3} & \text{при } t > 1, \end{cases}$$

а для $Ai(x)$ *и* $\widetilde{Ai}(x)$ *справедливы (13)–(15).*

Применяя известные соотношения [13, 12]

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}\left[1 + O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right], \\ z \to \infty, -\pi < \arg z < \pi,$$

$$\mathrm{Ai}(-z) = \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right], z > 0, z \to \infty,$$

к (12) и (16), получим формулы (4), (5) и (9), (10) соответственно с более точными областями определения и оценками остаточных членов. В частности, имеет место следующее утверждение

Теорема 5. *1) Пусть* $0 < \theta \le \pi/2$. *Тогда*

$$H_n((2n+1)^{1/2}\cos\theta) = \\ = 2^{\frac{1}{2}}(2n+1)^{\frac{n}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\exp\left(\frac{2n+1}{4}\cos 2\theta\right)\times \\ \times\left\{\cos\left[\frac{2n+1}{4}(2\theta-\sin 2\theta)-\frac{\pi}{4}\right]+O(n^{-1}\theta^{-3})\right\}.$$

2) Пусть $\theta > 0$. *Тогда*

$$H_n((2n+1)^{1/2}\operatorname{ch}\theta) = \\ = (2\operatorname{sh}\theta)^{-\frac{1}{2}}(2n+1)^{\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{2n+1}{4}\left(2\theta+e^{-2\theta}\right)\right]\times \\ \times\left[1+O\left(n^{-1}\operatorname{arsh}^{-3}\frac{2\theta}{3}\right)\right].$$

Недостатком теорем 1–5 является отсутствие численных оценок на остаточные члены. В данной диссертационной работе выводятся формулы (4) и (5) и даются численные оценки на остаточные члены. Кроме того, приводятся аналоги для производных от правых частей (4) и (5) вместе с соответствующими численными оценками на остаточные члены.

Методика получения асимптотических формул, рассматриваемых в данной работе, заключается в следующем. Классические ортогональные многочлены с точностью до некоторого функционального множителя удовлетворяют дифференциальному уравнению вида

$$y''_{xx} - Q(x,\lambda)y = 0, \tag{17}$$

где x принадлежит некоторому промежутку из $\mathbb{R}$, λ – параметр, зависящий от степени многочлена. Уравнение (17) эквивалентно некоторой системе интегральных уравнений, к которой может быть применен принцип сжимающих отображений [4]. Этот принцип дает численные оценки для собственных функций интегрального оператора, которые могут быть использованы для оценок частных решений y_1 и y_2 уравнения (17). Пусть y_1 и y_2 линейно независимы. Любое решение уравнения (17) согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений представимо в виде $C_1y_1+C_2y_2$, где C_1, C_2 – коэффициенты [6]. Это представление с соответствующим образом подобранными коэффициентами C_1 и C_2 дает асимптотические формулы для рассматриваемых многочленов.

В первой главе даются оценки для частных решений уравнения (17). Рассматривается случай $Q(x,\lambda) \neq 0$ ($Q(x,\lambda) = 0 \Rightarrow x$ – точка поворота (17)). Пусть

$$\delta(x,\lambda,Q) = \frac{1}{8}\frac{Q''(x,\lambda)}{(Q(x,\lambda))^{3/2}} - \frac{5}{32}\frac{(Q'(x,\lambda))^2}{(Q(x,\lambda))^{5/2}},$$

$$\xi(x_0,x,\lambda) = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{Q(t,\lambda)}dt,$$

$$\rho_1(x,\lambda,Q) = \int\limits_{x}^{b} |\delta(t,\lambda,Q)|dt,$$

$$\gamma_1(\lambda) = (1 - 2\rho_1(a,\lambda,Q))^{-1},$$

где $x \in [a,b], \lambda \in \Lambda, \Lambda$ – множество параметров.

Лемма 1.1. *Пусть* $\forall\lambda \in \Lambda$ $Q(x,\lambda)$ *– комплекснозначная функция,* $Q''(x,\lambda)$ *непрерывна при* $x \in [a,b]$ *и*

$$Q(x,\lambda) \neq 0, x \in [a,b].$$

Пусть на $[a,b]$ *можно выделить ветвь* $\sqrt{Q}$*, такую, что*

$$\Re e\sqrt{Q(x,\lambda)} \geq 0, x \in [a,b], \tag{18}$$

и выполнено условие

$$\rho_1(a,\lambda,Q) < \frac{1}{2}.$$

Тогда $\forall\lambda \in \Lambda$ *уравнение (17) имеет решение* $y(x, \lambda)$, *такое,что при* $x \in [a, b]$

$$|y(x,\lambda) - Q^{-1/4}(x,\lambda)\exp(-\xi(x_0,x,\lambda))| \leq \\ \leq 4\gamma_1(\lambda)|Q(x,\lambda)|^{-1/4}\exp(-\Re e\xi(x_0,x,\lambda))\rho_1(x,\lambda,Q), \quad (19)$$

$$|y'(x,\lambda) + Q^{1/4}(x,\lambda)\exp(-\xi(x_0,x,\lambda))| \leq \\ \leq |Q(x,\lambda)|^{1/4}\exp(-\Re e\xi(x_0,x,\lambda))(4\gamma_1(\lambda)\rho_1(x,\lambda,Q) + \\ + \frac{1}{4}|Q'(x,\lambda)||Q(x,\lambda)|^{-3/2}(1 + 4\gamma_1(\lambda)\rho_1(x,\lambda,Q))). \quad (20)$$

Ветвь $\sqrt{Q}$ *в формулах (19), (20) выбрана в соответствии с (18),* $x_0 \in [a, b]$.

Ветвь $\sqrt[4]{Q}$ *выбирается из соотношения*

$$\sqrt[4]{Q} = \sqrt{\sqrt{Q}}.$$

Здесь же формулируется и доказывается аналог этой леммы для бесконечного промежутка. Пусть $x \in [1, +\infty)$,

$$\rho_2(x,\lambda,Q) = \int_x^{+\infty} |\delta(t,\lambda,Q)|dt,$$

$$\gamma_2(\lambda) = (1 - 2\rho_2(1,\lambda,Q))^{-1},$$

Имеет место

Лемма 1.2. *Пусть* $\forall\lambda \in \Lambda$ $Q(x,\lambda)$ – *комплекснозначная функция, причем* $Q''(x,\lambda)$ *непрерывна на* $[1, +\infty)$ *и*

$$Q(x,\lambda) \neq 0, x \in [1, +\infty).$$

Пусть на $[1, +\infty)$ *можно выделить ветвь функции корня* $\sqrt{Q}$, *такую, что*

$$Re\sqrt{Q(x,\lambda)} \geq 0, x \in [1, +\infty), \quad (21)$$

и выполнено условие

$$\rho_2(1,\lambda,Q) < \frac{1}{2}.$$

Тогда $\forall\lambda \in \Lambda$ *уравнение (17) имеет решение* $y(x,\lambda)$, *такое, что при* $x \in [1,+\infty)$ *справедливы следующие оценки*

$$|y(x,\lambda) - Q^{-1/4}(x,\lambda)\exp(-\xi(1,x,\lambda))| \leq \\ \leq 4\gamma_2(\lambda)|Q(x,\lambda)|^{-1/4}\exp(-Re\xi(1,x,\lambda))\rho_2(x,\lambda,Q) \quad (22)$$

и

$$|y'(x,\lambda) + Q^{1/4}(x,\lambda)\exp(-\xi(1,x,\lambda))| \leq \\ \leq |Q(x,\lambda)|^{1/4}\exp(-Re\xi(1,x,\lambda))(4\gamma_2(\lambda)\rho_2(x,\lambda,Q) + \\ + \frac{1}{4}|Q'(x,\lambda)||Q(x,\lambda)|^{-3/2}(1 + 4\gamma_2(\lambda)\rho_2(x,\lambda,Q))). \quad (23)$$

Ветвь $\sqrt{Q}$ *в формулах (22), (23) выбрана в соответствии с (21).*

Ветвь $\sqrt[4]{Q}$ *выбирается из соотношения*

$$\sqrt[4]{Q} = \sqrt{\sqrt{Q}}.$$

Вышеприведенные леммы являются развитием метода последовательных приближений, применяемого в теории дифференциальных уравнений [2].

Во второй главе рассматривается возможность применения этих лемм для многочленов Чебышева–Эрмита и, в частности, выводятся формулы (4) и (5). Доказываются следующие теоремы.

Пусть

$$A(s,n) = \frac{10s}{4(2n+1-s^2)^{3/2} - 5s}, B(s,n) = \frac{s}{2(2n+1-s^2)^{3/2}}.$$

Теорема 2.1. *(Случай $|x| < \sqrt{2n+1}$.) ([26], [23]) При условиях $n \geq 2, s \geq 0$,*

$$s^2 + \left(\frac{5}{4}s\right)^{2/3} < 2n+1, \tag{24}$$

$$|(B(s,n)+1)(A(s,n)+1)^2 - 1| < 1 \tag{25}$$

справедливы следующие асимптотические формулы:

1)

$$e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_n \frac{1}{\sqrt[4]{2n+1-s^2}} \times$$
$$\times \left[\cos\Big(\int\limits_0^s \sqrt{2n+1-\eta^2}\,d\eta - \frac{\pi n}{2}\Big) + q_1(s,n)\right]\frac{1+\varepsilon_1(n)}{1+p(s,n)}, \tag{26}$$

где

$$K_n = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{2n+1}{2n}} \text{ при } n = 2m, \\ \sqrt[4]{\frac{2n}{2n+1}} \text{ при } n = 2m+1. \end{cases}$$

$$|\varepsilon_1(n)| \leq \begin{cases} (e^{1/(2n)} - 1)(e^{1/(4n)} + 1)/2 \text{ при } n = 2m, \\ e^{\frac{1}{n-1}}(e^{1/(4n)} + 1)/2 - 1 \text{ при } n = 2m+1, \end{cases}$$

$$|p(s,n)| \leq (B(s,n)+1)(A(s,n)+1)^2 - 1,$$

$$|q_1(s,n)| \leq (B(s,n)+1)(A(s,n)+1)^2 - 1 \text{ при } n = 2m,$$

$$|q_1(s,n)| \leq (A(s,n)+1)^2 - 1 \text{ при } n = 2m+1.$$

2)

$$\left[e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s)\right]' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_n \sqrt[4]{2n+1-s^2} \times$$
$$\times \left[-\sin\Big(\int\limits_0^s \sqrt{2n+1-\eta^2}\,d\eta - \frac{\pi n}{2}\Big) + q_2(s,n)\right]\frac{1+\varepsilon_1(n)}{1+p(s,n)}, \tag{27}$$

$$|q_2(s,n)| \le (B(s,n)+1)^2(A(s,n)+1)^2 - 1 \text{ \textit{при} } n = 2m,$$

$$|q_2(s,n)| \le (B(s,n)+1)(A(s,n)+1)^2 - 1 \text{ \textit{при} } n = 2m+1.$$

3)

$$se^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}K_{n-1}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt[4]{2n-1-s^2}} \times$$
$$\times \Big[-\sin\Big(\int\limits_0^s \sqrt{2n-1-\eta^2}d\eta - \frac{\pi n}{2}\Big) + q_1(s,n-1)\Big]\frac{1+\varepsilon_1(n-1)}{1+p(s,n-1)} -$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_n\sqrt[4]{2n+1-s^2} \times$$
$$\times \Big[-\sin\Big(\int\limits_0^s \sqrt{2n+1-\eta^2}d\eta - \frac{\pi n}{2}\Big) + q_2(s,n)\Big]\frac{1+\varepsilon_1(n)}{1+p(s,n)}. \quad (28)$$

Область определения формулы (28) ограничена условиями (24) и (25) с заменой в них n на $n-1$ ($n \ge 3$).

С помощью формулы [8]

$$\widehat{H}_n(-s) = (-1)^n\widehat{H}_n(s) \quad (29)$$

формулы (26), (27) и (28) могут быть видоизменены для отрицательных s.

Теорема 2.2. *(Случай $|x| > \sqrt{2n+1}$.) ([24]) При $n \ge 1$ справедливы следующие асимптотические формулы:*

1)$e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sqrt[4]{s^2-(2n+1)}}e^{-\frac{s}{2}\sqrt{s^2-(2n+1)}+\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{s+\sqrt{s^2-(2n+1)}}{\sqrt{2n+1}}\right)} \times$$
$$\times \frac{1+\alpha(s,2n+1)}{(1+\alpha(+\infty,2n+1))(1+\varepsilon_2(n))}, \quad (30)$$

где $s \in \left(\sqrt{2n+1+(2(2n+1))^{1/3}}, +\infty\right)$, *а члены* $\alpha(s, 2n+1)$, $\alpha(+\infty, 2n+1)$ *и* $\varepsilon_2(n)$ *играют роль погрешностей и для них справедливо следующее:*

а) для каждого фиксированного n *предел*

$$\alpha(+\infty, 2n+1) = \lim_{s\to+\infty} \alpha(s, 2n+1)$$

существует и конечен ;

б) выполнены оценки

$$|\alpha(s,\lambda)| \le \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{(s^2-\lambda)^{3/2}-\sqrt{2}\lambda^{1/2}}, \text{ где } s \in \left(\sqrt{\lambda+(2\lambda)^{1/3}}, \sqrt{2\lambda}\right), \\ \frac{2\sqrt{2}}{\lambda-\sqrt{2}}, \text{ где } s \ge \sqrt{2\lambda}; \end{cases}$$

$$|\varepsilon_2(n)| \le \frac{e^{\frac{9}{32(2n+1)}}(e^{\frac{1}{4n}}+1)}{2} - 1.$$

2) $\left[e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s)\right]'_s =$

$$= -\frac{\sqrt[4]{s^2-(2n+1)}}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{s}{2}\sqrt{s^2-(2n+1)}+\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{s+\sqrt{s^2-(2n+1)}}{\sqrt{2n+1}}\right)} \times$$

$$\times \frac{1+\beta(s,2n+1)}{(1+\alpha(+\infty,2n+1))(1+\varepsilon_2(n))}, \quad (31)$$

где $s \in \left(\sqrt{(2n+1)+(2(2n+1))^{1/3}}, +\infty\right)$ *и*

$$|\beta(s,\lambda)| \le \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{(s^2-\lambda)^{3/2}-\sqrt{2}\lambda^{1/2}} + \frac{\lambda^{1/2}}{\sqrt{2}(s^2-\lambda)^{3/2}}\left(\frac{(s^2-\lambda)^{3/2}+\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{(s^2-\lambda)^{3/2}-\sqrt{2}\lambda^{1/2}}\right), \\ \qquad \text{где } s \in \left(\sqrt{\lambda+(2\lambda)^{1/3}}, \sqrt{2\lambda}\right), \\ \frac{5\lambda+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\lambda(\lambda-\sqrt{2})}, \\ \qquad \text{где } s \ge \sqrt{2\lambda}. \end{cases}$$

Применение известной формулы [8, 7]

$$\widehat{H}'_n(s) = \sqrt{2n}\widehat{H}_{n-1}(s), \forall s \in \mathbb{R},$$

к (30) и (31) дает новую асимптотическую формулу. Она и формулы (30) и (31) с помощью формулы (29) могут быть видоизменены для случая отрицательных s.

Третья глава отводится для многочленов Якоби [8]

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]^{(n)},$$
$$x \in (-1,1), \alpha > -1, \beta > -1. \quad (32)$$

С помощью леммы 1.1 доказывается следующая теорема.

$$A = \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{4}, B = \frac{\frac{1}{4}-\beta^2}{4},$$

$$N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \alpha > -1, \beta > -1,$$

$$Q(\cos\theta, N) = -\left[\frac{A}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{B}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + N^2\right],$$

$$I(\theta) = I(\theta,n,\alpha,\beta) = \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{|Q(\cos\theta,N)|}d\varphi. \quad (33)$$

Теорема 3.1. *([22]) Пусть $0 < \varepsilon < \pi/2$. Тогда $\exists n_1 = n_1(\varepsilon,\alpha,\beta)$, $\forall n \geq n_1$ на отрезке $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ справедливы следующие формулы*

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n(\cos\theta;\alpha,\beta) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{|Q(\cos\theta,N)|}}\left[C_1(n)\left\{\cos I(\theta) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + C_2(n)\left\{\sin I(\theta) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}\right], \quad (34)$$

$$\left[\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}P_n(\cos\theta;\alpha,\beta)\right]'_\theta =$$

$$= \sqrt[4]{|Q(\cos\theta,N)|}\left[C_1(n)\left\{-\sin I(\theta)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\,C_2(n)\left\{\cos I(\theta)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}\right], \quad (35)$$

где

$$C_1(n) = 2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}\left[P_n(0;\alpha,\beta)\sqrt[4]{|Q(0,N)|}\left(1+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left\{\frac{\alpha-\beta}{2}P_n(0;\alpha,\beta)-P'_n(0;\alpha,\beta)\right\}\frac{1}{\sqrt[4]{|Q(0,N)|}}O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right], \quad (36)$$

$$C_2(n) = 2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}\left[\left\{\frac{\alpha-\beta}{2}P_n(0;\alpha,\beta)-P'_n(0;\alpha,\beta)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\sqrt[4]{|Q(0,N)|}}\left(1+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+P_n(0;\alpha,\beta)\sqrt[4]{|Q(0,N)|}O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]. \quad (37)$$

Оценки в формулах (34) и (35) являются равномерными по $\theta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$. *Оценки в формулах (34) – (37) не являются равномерными по* ε.

Далее в этой главе выводится точное выражение в элементарных функциях для интеграла (33).

Обозначим t_1 и t_2 – корни многочлена

$$-N^2t^2+2(A-B)t+2(A+B)+N^2,$$

причем $t_1 < t_2$. Пусть

$$x(t) = \sqrt{\frac{t_2-t}{t-t_1}},$$

$$\Phi(\theta) = \operatorname{arctg} x(\cos\theta) - \operatorname{arctg} x(0),$$

$$\varphi_1(\theta) = -\frac{1}{4}\sqrt{-(1+t_1)(1+t_2)}\Bigg[\ln\left|\frac{x(\cos\theta) - \sqrt{\frac{1+t_2}{-1-t_1}}}{x(\cos\theta) + \sqrt{\frac{1+t_2}{-1-t_1}}}\right| - \\ - \ln\left|\frac{x(0) - \sqrt{\frac{1+t_2}{-1-t_1}}}{x(0) + \sqrt{\frac{1+t_2}{-1-t_1}}}\right|\Bigg],$$

$$\varphi_2(\theta) = \frac{1}{4}\sqrt{(1-t_1)(t_2-1)}\Bigg[\ln\left|\frac{x(\cos\theta) - \sqrt{\frac{t_2-1}{1-t_1}}}{x(\cos\theta) + \sqrt{\frac{t_2-1}{1-t_1}}}\right| - \\ - \ln\left|\frac{x(0) - \sqrt{\frac{t_2-1}{1-t_1}}}{x(0) + \sqrt{\frac{t_2-1}{1-t_1}}}\right|\Bigg],$$

$$\psi_1(\theta) = -\frac{\sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}}{2}\Bigg[\operatorname{arctg}\Big\{\sqrt{\frac{1+t_1}{1+t_2}}x(\cos\theta)\Big\} - \\ - \operatorname{arctg}\Big\{\sqrt{\frac{1+t_1}{1+t_2}}x(0)\Big\}\Bigg],$$

$$\psi_2(\theta) = -\frac{\sqrt{(1-t_1)(1-t_2)}}{2}\Bigg[\operatorname{arctg}\Big\{\sqrt{\frac{1-t_1}{1-t_2}}x(\cos\theta)\Big\} - \\ - \operatorname{arctg}\Big\{\sqrt{\frac{1-t_1}{1-t_2}}x(0)\Big\}\Bigg].$$

Теорема 3.2. $\forall\varepsilon > 0,\ \varepsilon \in (0, \pi/2),\ \exists n_2 = n_2(\varepsilon, \alpha, \beta), \forall n \geq n_2$

справедливы следующие формулы

$$I(\theta) = \begin{cases} 2N\left[\Phi(\theta) + \varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)\right] \ \textit{при}\ \alpha^2+\beta^2 < 1/2, \\ 2N\left[\Phi(\theta) + \psi_1(\theta) + \psi_2(\theta)\right] \ \textit{при}\ \alpha^2+\beta^2 > 1/2, \\ N\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \ \textit{при}\ \alpha^2 = \beta^2 = 1/4, \\ 2N\left[\Phi(\theta) + \varphi_1(\theta) + \psi_2(\theta)\right] \ \textit{при}\ \alpha^2+\beta^2 = 1/2, |\alpha| > |\beta|, \\ 2N\left[\Phi(\theta) + \psi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)\right] \ \textit{при}\ \alpha^2+\beta^2 = 1/2, |\alpha| < |\beta|, \end{cases}$$

где $\theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

Отмечается, что в случаях многочленов Чебышева I рода ($\alpha = \beta = -1/2$) и многочленов Чебышева II рода ($\alpha = \beta = 1/2$) формула (34) приводит к определениям этих многочленов на интервале $(-1, 1)$:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

и

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

соответственно [8].

Отдельно рассматривается частный случай многочленов Якоби — многочлены Лежандра ($\alpha = \beta = 0$ в (32)). Для них оказывается возможным вывести явные формулы для коэффициентов $C_1(n)$ и $C_2(n)$.

Пусть

$$\rho_n(\theta) = \frac{|\pi - 2\theta|}{64\left(n+\frac{1}{2}\right)^5 \sin^6\theta}\left(1 + 6\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right),$$

$$\alpha_n(\theta) = \frac{4\rho_n(\theta)}{1 - 2\rho_n(\theta)},$$

$$\beta_n(\theta) = \alpha_n(\theta) + \frac{1}{8\sin^3\theta}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-3}(1 + \alpha_n(\theta))$$

Теорема 3.3. *([25]) При условиях* $\rho_n(\theta) < 1/2, n \geq 2$ *и*

$$|\alpha_n(\theta)| + |\beta_n(\theta)| + |\alpha_n(\theta)\beta_n(\theta)| < 1,$$

где $\theta \in (0, \pi)$, *справедливы формулы*

$$\text{1) } (\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}} \times$$

$$\times \left(\cos\left[\operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\left(\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta} - |\cos\theta|}{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta} + |\cos\theta|} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{2n+1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta}}{(2n+1)|\cos\theta|} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{\pi n}{2}\right] + R_n(\theta)\right)\frac{1 + \varepsilon(n)}{1 + \Phi_n(\theta)},$$

где

$$|\varepsilon(n)| \leq \begin{cases} \frac{(e^{1/(2m)} - 1)}{4}\left(1 + 3e^{1/(8m)} + e^{5/(8m)}\right) \text{ при } n = 2m, \\ e^{1/(8m)}(e^{1/(2m)} - 1) + \frac{1}{16m}\left(e^{1/(2m+1)} + 3\right) \times \\ \times \left(e^{5/(8m)} - e^{1/(8m)} + 1\right) \text{ при } n = 2m + 1, \end{cases}$$

$$|R_n(\theta)| \leq \begin{cases} \alpha_n(\theta) + \beta_n(\theta) + \alpha_n(\theta)\beta_n(\theta) \text{ при } n = 2m, \\ 2\alpha_n(\theta) + \alpha_n^2(\theta) \text{ при } n = 2m + 1, \end{cases}$$

$$|\Phi_n(\theta)| \leq \alpha_n(\theta) + \beta_n(\theta) + \alpha_n(\theta)\beta_n(\theta),$$

$$\text{2) } \left[(\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta)\right]'_\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \times$$

$$\times \left(-\sin\left[\operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\left(\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta} - |\cos\theta|}{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta} + |\cos\theta|} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{2n+1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta}}{(2n+1)|\cos\theta|} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{\pi n}{2}\right] + S_n(\theta)\right)\frac{1 + \varepsilon(n)}{1 + \Phi_n(\theta)},$$

где

$$|S_n(\theta)| \le \begin{cases} 2\beta_n(\theta) + \beta_n^2(\theta) \ \text{\textit{при}}\ n = 2m, \\ \alpha_n(\theta) + \beta_n(\theta) + \alpha_n(\theta)\beta_n(\theta) \ \text{\textit{при}}\ n = 2m+1. \end{cases}$$

В четвертой главе рассматривается применение леммы 1.2 для случая многочленов Чебышева–Лагерра. Для них выводится асимптотическая формула, описывающая поведение этих многочленов для больших значений переменной.

Обозначим

$$E(s,\lambda) = \begin{cases} \frac{s^3}{4\lambda(s^2-\lambda)^{3/2}} + \frac{1}{4\lambda^3}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\left[17 + \frac{s^3}{(s^2-\lambda)^{3/2}}\right] \\ \hfill \text{при } |\alpha| > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{12675\lambda}\left[488 + \frac{2584 s^3}{\left(s^2 - \frac{65}{64}\lambda\right)^{3/2}}\right] + \frac{3}{4}\left(\frac{64}{65}\right)^3 \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^3}\left[8 + \frac{s^3}{\left(s^2-\frac{65}{64}\lambda\right)^{3/2}}\right] \\ \hfill \text{при } |\alpha| < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$E(+\infty,\lambda) = \lim_{s\to+\infty} E(s,\lambda),$$

$$I_1(s) = \frac{\sqrt{D}\zeta_7(s^2)}{2(\zeta_7^2(s^2)-1)} - \frac{\lambda}{4}\ln\left|\frac{\zeta_7(s^2)+1}{\zeta_7(s^2)-1}\right| - \frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}K(\zeta_7(s^2)),$$

$$D = D(\lambda,\alpha) = \lambda^2 - 4\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right),$$

$$\zeta_7(t) = \zeta_7(t,\lambda,\alpha) = \sqrt{\frac{t - \frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}}{t - \frac{\lambda+\sqrt{D}}{2}}},$$

$$K(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda+\sqrt{D}}{\lambda-\sqrt{D}}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}}{y+\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}}\right|, & \alpha^2 - 1/4 > 0, \\ \sqrt{\frac{\sqrt{D}+\lambda}{\sqrt{D}-\lambda}}\operatorname{arctg}\left(y\sqrt{\frac{\sqrt{D}+\lambda}{\sqrt{D}-\lambda}}\right), & \alpha^2 - 1/4 < 0. \end{cases}$$

Теорема 4.1. *([27]) Если* $n \geq 1, \alpha > -1, \alpha^2 \neq \frac{1}{4}, \left|\alpha^2 - \frac{1}{4}\right| \leq 1, s^2 > \frac{65}{64}\lambda, \lambda = 4n + 2\alpha + 2, E(s,\lambda) < 1/2$, *то справедливы формулы*

1) $e^{-s^2/2} s^{\alpha+1/2} \widehat{L}_n(s^2;\alpha) =$

$$= \frac{D^{\lambda/8}}{2^{\lambda/2} e^{\lambda/4}} \frac{1}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}} \frac{1}{\sqrt[4]{s^2 - \lambda + \frac{\alpha^2 - 1/4}{s^2}}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{\sqrt{D} - \lambda}{2} K(1)\right) \exp\left(-I_1(s)\right) \frac{1 + \alpha(s,\lambda)}{1 + \alpha(+\infty,\lambda)},$$

где

$$|\alpha(s,\lambda)| \leq \frac{4E(s,\lambda)}{1 - 2E(s,\lambda)}, |\alpha(+\infty,\lambda)| \leq \frac{4E(+\infty,\lambda)}{1 - 2E(+\infty,\lambda)},$$

2) $$\left[e^{-s^2/2} s^{\alpha+1/2} \widehat{L}_n(s^2;\alpha)\right]_s' = -\frac{D^{\lambda/8}}{2^{\lambda/2} e^{\lambda/4}} \frac{\sqrt[4]{s^2 - \lambda + \frac{\alpha^2 - 1/4}{s^2}}}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{\sqrt{D} - \lambda}{2} K(1)\right) \exp\left(-I_1(s)\right) \frac{1 + \beta(s,\lambda)}{1 + \alpha(+\infty,\lambda)},$$

где

$$|\beta(s,\lambda)| \leq \frac{4E(s,\lambda)}{1 - 2E(s,\lambda)} + \frac{1}{2s} \frac{s^2 - \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{s^2}}{\left(s^2 - \lambda + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{s^2}\right)^{3/2}} \frac{1 + 2E(s,\lambda)}{1 - 2E(s,\lambda)}.$$

Замечание 4.1. *Пользуясь формулой [8]*

$$\left[\widehat{L}_n(s;\alpha)\right]_s' = \sqrt{n} \widehat{L}_{n-1}(s;\alpha+1), \alpha > -1, n \in \mathbb{N}, \tag{38}$$

из теоремы 4.1 можно получить асимптотические формулы для любых α *таких, что* $\alpha > -1$ *и* $\alpha \neq -\frac{3}{2} + m$, *где* $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 4.2. *Формула [8]*

$$s\left[\widehat{L}_n(s;\alpha)\right]_s' = n\widehat{L}_n(s;\alpha) + \sqrt{(n+\alpha)n} \widehat{L}_{n-1}(s;\alpha) \tag{39}$$

с использованием результатов теоремы 4.1 дает новые асимптотические формулы.

Замечание 4.3. *Асимптотические формулы для исключенных случаев $\alpha = -\frac{3}{2} + m$, где $m \in \mathbb{N}$, могут быть получены с помощью результатов теорем 2.1 и 2.2, формул (38) и (39) и формул [8]*

$$\widehat{H}_{2n}(x) = \widehat{L}_n(x^2; -1/2),$$

$$\widehat{H}_{2n+1}(x) = x\widehat{L}_n(x^2; 1/2).$$

Этот случай замечателен тем, что в отличие от других параметров α здесь имеются асимптотические формулы в начале координат.

В заключение главы дается асимптотика для коэффициента $K(1)$ вместе с численными оценками на ее остаточный член.

В статье [20] сформулированы восемь нерешенных задач из теории классических ортогональных многочленов. Три задачи для многочленов Чебышева–Эрмита и Чебышева–Лагерра формулируются следующим образом:

Задача 1. Найти последовательность $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ максимального роста такую, что выполнено неравенство

$$\left|\widehat{H}_n(x)\right| e^{-x^2/2} \le \frac{C_1}{n^{1/4}}, x \in [-A_n, A_n]. \tag{40}$$

Задача 2. Найти наименьшее ω, для которого справедливо неравенство

$$\frac{\left|\widehat{H}_n(x)\right|}{1+|x|^\omega} e^{-x^2/2} \le \frac{C_2(\omega)}{n^{1/4}}, x \in \mathbb{R}.$$

Задача 3. Найти последовательность $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ максимального роста такую, что выполнено неравенство

$$x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{2}} \left|\widehat{L}_n(x;\alpha)\right| \le \frac{C_3(\alpha)}{n^{1/4}}, \alpha > -1/2, x \in [0, B_n]. \tag{41}$$

В задачах имеется в виду, что $C_1, C_2(\omega), C_3(\alpha)$ – некоторые константы, не зависящие от n.

Эти задачи связаны с вопросом сходимости в точке на прямой ряда Фурье по соответствующим многочленам. Пусть

$$S_n(x; f) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \widehat{H}_k(x) \tag{42}$$

– частичная сумма ряда Фурье $f(x)$ по многочленам Чебышева-Эрмита,

$$a_k(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) \widehat{H}_k(x) dx$$

– коэффициент Фурье по ортонормальной системе $\{\widehat{H}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда справедлива формула [8]

$$f(x) - S_n(x; f) = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \Big(a_n(\phi_x) \widehat{H}_{n+1}(x) - a_{n+1}(\phi_x) \widehat{H}_n(x) \Big), \tag{43}$$

где

$$\phi_x(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

– вспомогательная функция.

Если доказать, что при фиксированном $x \in \mathbb{R}$

$$\widehat{H}_n(x) = O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right), \tag{44}$$

$$a_n(\phi_x) = O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right), \tag{45}$$

то, как видно из формулы (43), можно будет утверждать об ограниченности в точке x остаточного члена ряда Фурье (42). Решение задач 1 и 2 дало бы ответ на вопрос, при каких x и $f(x)$ возможны соответственно неравенства (44) и (45).

В монографии [8] доказывалось, что (40) справедливо при

$$A_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} (2n+1)^{1/6}$$

и давалась оценка $\omega \leq 5/2$. Для многочленов Чебышева–Лагерра там же [8] неравенство (41) доказывалось для $B_n = n^{3/11}$. В дальнейшем было доказано [14], что $\exists n_0, n_0 > 0, g_1, 0 < g_1 < 1, \forall n > n_0$ при $B_n = 4g_1 n$ справедливо (41). В качестве следствия из этого результата доказывалось, что $\exists n_1, n_1 > 0, g_2, 0 < g_2 < 1, \forall n > n_1$ при $A_n = g_2\sqrt{2n}$ справедливо (40).

В пятой главе дается полное решение задач 1–3 [21]. Доказывается следующее.

Теорема 5.1. *Неравенство (41) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{B_n}{n} < 4.$$

Следствие 5.1. *Неравенство (40) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{A_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{2}.$$

В пятой главе также доказывается, что $\omega = 1/3$.

1 Основная лемма

Для вывода асимптотических формул необходимо сформулировать и доказать две леммы. Эти утверждения содержат оценки для приближенных формул решений дифференциального уравнения второго порядка. Область определения является промежутком на $\mathbb{R}$. Рассматриваются два случая: конечного отрезка и бесконечного полуотрезка. Фактически выводятся те же формулы, что и с помощью первого шага ВКБ-метода [9]. Ценность этих предложений заключается в получении непосредственных оценок для остаточных членов асимптотических формул. Рассмотрим уравнение

$$y''_{xx} - Q(x,\lambda)y = 0, \tag{1.1}$$

где $y = y(x,\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, Λ – некоторое множество параметров (далее $\Lambda = \boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{N}$).

Введем обозначения:

$$\delta(x,\lambda,Q) = \frac{1}{8}\frac{Q''(x,\lambda)}{(Q(x,\lambda))^{3/2}} - \frac{5}{32}\frac{(Q'(x,\lambda))^2}{(Q(x,\lambda))^{5/2}}, \tag{1.2}$$

$$\xi(x_0,x,\lambda) = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{Q(t,\lambda)}dt, \tag{1.3}$$

$$\rho_1(x,\lambda,Q) = \int\limits_{x}^{b} |\delta(t,\lambda,Q)|dt, \tag{1.4}$$

$$\gamma_1(\lambda) = (1 - 2\rho_1(a,\lambda,Q))^{-1}. \tag{1.5}$$

Сейчас мы рассматриваем случай конечного отрезка $x \in [a,b]$.

Лемма 1.1. *Пусть* $\forall\lambda \in \Lambda\; Q(x,\lambda)$ *– комплекснозначная функция,* $Q''(x,\lambda)$ *непрерывна при* $x \in [a,b]$ *и*

$$Q(x,\lambda) \neq 0, x \in [a,b]. \tag{1.6}$$

Пусть на $[a,b]$ *можно выделить ветвь* $\sqrt{Q}$, *такую, что*

$$\Re e\sqrt{Q(x,\lambda)} \geq 0, x \in [a,b], \tag{1.7}$$

и выполнено условие

$$\rho_1(a,\lambda,Q) < \frac{1}{2}. \tag{1.8}$$

Тогда $\forall\lambda \in \Lambda$ *уравнение (1.1) имеет решение* $y(x,\lambda)$, *такое,что при* $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} &|y(x,\lambda) - Q^{-1/4}(x,\lambda)\exp(-\xi(x_0,x,\lambda))| \leq \\ &\qquad \leq 4\gamma_1(\lambda)|Q(x,\lambda)|^{-1/4}\exp(-\Re e\xi(x_0,x,\lambda))\rho_1(x,\lambda,Q), \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} &|y'(x,\lambda) + Q^{1/4}(x,\lambda)\exp(-\xi(x_0,x,\lambda))| \leq \\ &\qquad \leq |Q(x,\lambda)|^{1/4}\exp(-\Re e\xi(x_0,x,\lambda))\Big(4\gamma_1(\lambda)\rho_1(x,\lambda,Q) + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{4}|Q'(x,\lambda)||Q(x,\lambda)|^{-3/2}(1 + 4\gamma_1(\lambda)\rho_1(x,\lambda,Q))\Big). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ветвь $\sqrt{Q}$ *в формулах (1.9), (1.10) выбрана в соответствии с (1.7),* $x_0 \in [a,b]$.

Ветвь $\sqrt[4]{Q}$ *выбирается из соотношения*

$$\sqrt[4]{Q} = \sqrt{\sqrt{Q}}.$$

Для компактности изложения в большинстве случаев обозначения переменных у функций опускаются. Например, вместо $Q(x,\lambda)$ пишется просто Q, а вместо $\xi(x_0,x,\lambda)$ – ξ.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$. Сведем уравнение (1.1) к системе первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Сделаем преобразование

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = X(x) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

где

$$X(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{Q} - \frac{Q'}{4Q} & -\sqrt{Q} - \frac{Q'}{4Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{a} & \tilde{b} \end{pmatrix}.$$

Ищем $X^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{c} & \tilde{d} \\ \tilde{e} & \widetilde{f} \end{pmatrix}$, где

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{a} & \tilde{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c} & \tilde{d} \\ \tilde{e} & \widetilde{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

отсюда

$$\begin{cases} \tilde{c} + \tilde{e} = 1 \\ \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{e} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{e} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{a} - \tilde{b}} \\ \tilde{c} = -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{b}} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \tilde{d} + \widetilde{f} = 0 \\ \tilde{a}\tilde{d} + \tilde{b}\widetilde{f} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{f} = -\frac{1}{\tilde{a} - \tilde{b}} \\ \tilde{d} = \frac{1}{\tilde{a} - \tilde{b}}. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$X^{-1}(x) = \frac{1}{\tilde{a} - \tilde{b}} \begin{pmatrix} -\tilde{b} & 1 \\ \tilde{a} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{Q}} \begin{pmatrix} \sqrt{Q} + \frac{Q'}{4Q} & 1 \\ \sqrt{Q} - \frac{Q'}{4Q} & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = X^{-1}(x) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Найдем матрицу $A(x)$ такую, что

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = A(x) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Сначала вычислим производные компонент матрицы $X^{-1}(x)$, полагая по определению

$$X^{-1}(x) = (k_{ij}(x)), D(x) = (k'_{ij}(x)),\ i = 1,2; j = 1,2.$$

$$D(x) = \left(\frac{1}{2Q^{1/2}} \begin{pmatrix} Q^{1/2} + \frac{Q'}{4Q} & 1 \\ Q^{1/2} - \frac{Q'}{4Q} & -1 \end{pmatrix} \right)' =$$

$$= -\frac{Q'}{4Q^{3/2}} \begin{pmatrix} Q^{1/2} + \frac{Q'}{4Q} & 1 \\ Q^{1/2} - \frac{Q'}{4Q} & -1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2Q^{1/2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Q^{-1/2}Q' + \frac{Q''Q-(Q')^2}{4Q^2} & 0 \\ \frac{1}{2}Q^{-1/2}Q' - \frac{Q''Q-(Q')^2}{4Q^2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{Q''}{8Q^{3/2}} - \frac{3(Q')^2}{16Q^{5/2}} & -\frac{Q'}{4Q^{3/2}} \\ -\frac{Q''}{8Q^{3/2}} + \frac{3(Q')^2}{16Q^{5/2}} & \frac{Q'}{4Q^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (1.11), (1.12), (1.13), (1.14), получаем

$$A(x) = D(x)X(x) + X^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & 0 \end{pmatrix} X(x).$$

Считаем отдельно каждое слагаемое:

$$D(x)X(x) = \begin{pmatrix} \frac{Q''}{8Q^{3/2}} - \frac{3(Q')^2}{16Q^{5/2}} & -\frac{Q'}{4Q^{3/2}} \\ -\frac{Q''}{8Q^{3/2}} + \frac{3(Q')^2}{16Q^{5/2}} & \frac{Q'}{4Q^{3/2}} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Q^{1/2} - \frac{Q'}{4Q} & -Q^{1/2} - \frac{Q'}{4Q} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{Q''}{8Q^{3/2}} - \frac{(Q')^2}{8Q^{5/2}} - \frac{Q'}{4Q} & \frac{Q''}{8Q^{3/2}} - \frac{(Q')^2}{8Q^{5/2}} + \frac{Q'}{4Q} \\ -\frac{Q''}{8Q^{3/2}} + \frac{(Q')^2}{8Q^{5/2}} + \frac{Q'}{4Q} & -\frac{Q''}{8Q^{3/2}} + \frac{(Q')^2}{8Q^{5/2}} - \frac{Q'}{4Q} \end{pmatrix}.$$

$$X^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & 0 \end{pmatrix} X(x) = \frac{1}{2Q^{1/2}} \begin{pmatrix} Q^{1/2} + \frac{Q'}{4Q} & 1 \\ Q^{1/2} - \frac{Q'}{4Q} & -1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Q^{1/2} - \frac{Q'}{4Q} & -Q^{1/2} - \frac{Q'}{4Q} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{Q'}{4Q^{3/2}} & Q^{-1/2} \\ 1 - \frac{Q'}{4Q^{3/2}} & -Q^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{1/2} - \frac{Q'}{4Q} & -Q^{1/2} - \frac{Q'}{4Q} \\ Q & Q \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q^{1/2}(2 - \frac{(Q')^2}{16Q^3}) & -Q^{1/2}(\frac{Q'}{2Q^{3/2}} + \frac{(Q')^2}{16Q^3}) \\ -Q^{1/2}(\frac{Q'}{2Q^{3/2}} - \frac{(Q')^2}{16Q^3}) & Q^{1/2}(-2 + \frac{(Q')^2}{16Q^3}) \end{pmatrix}.$$

Складывая, получаем:

$$A(x) = \frac{Q''}{8Q^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{(Q')^2}{8Q^{5/2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{Q'}{4Q} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + Q^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{Q'}{4Q} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(Q')^2}{32Q^{5/2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= Q^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{Q'}{4Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \Big(\frac{Q''}{8Q^{3/2}} - \frac{5(Q')^2}{32Q^{5/2}} \Big) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, используя (1.2) и (1.14),

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \left(Q^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{Q'}{4Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \delta(x,\lambda,Q) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Определим u_j, $j = 1, 2$, из соотношений

$$v_j = Q^{-1/4}(x,\lambda) \exp(-\xi(x_0, x, \lambda)) u_j, j = 1, 2. \quad (1.16)$$

Учитывая определение (1.3), из дифференцирования формулы (1.16) следует:

$$v_j' = (-\frac{1}{4} Q^{-5/4} Q' - Q^{-1/4} Q^{1/2}) \exp(-\xi) u_j +$$
$$+ Q^{-1/4} \exp(-\xi) u_j'. \quad (1.17)$$

Подставляя (1.16) и (1.17) в (1.15) и сокращая на $Q^{-1/4}\exp(-\xi)$, получим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \left(2Q^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta(x,\lambda,Q) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} u_1(x,\lambda) = \int\limits_b^x \exp(2\xi(t,x,\lambda)) \delta(t,\lambda,Q)(u_1(t,\lambda) + u_2(t,\lambda)) dt \\ u_2(x,\lambda) = 1 - \int\limits_b^x \delta(t,\lambda,Q)(u_1(t,\lambda) + u_2(t,\lambda)) dt. \end{cases} \quad (1.19)$$

Дифференцируя первое уравнение, получаем, используя (1.3):

$$u_1' = 2\sqrt{Q} \int\limits_b^x \exp(2\xi(t,x,\lambda)) \delta(u_1 + u_2) dt + \delta(u_1 + u_2)$$

Подставляя в полученное равенство вместо интеграла в правой части u_1 (возможность такой подстановки следует из первого уравнения системы (1.19)), получим ни что иное, как первое уравнение системы (1.18). Продифференцировав второе уравнение (1.19), мы получим второе уравнение системы (1.18). Таким образом, любое решение системы (1.19), непрерывное на [a,b], является решением системы (1.18).

Можем записать (1.19) в операторной форме

$$U = U_0 + \Theta U, \tag{1.20}$$

где $U = (u_1, u_2)$, $U_0 = (0, 1)$ и Θ – интегральный оператор ,

$$\Theta : C([a, b]) \times C([a, b]) \to C([a, b]) \times C([a, b]).$$

К уравнению (1.20) можно применить принцип сжимающих отображений.

Рассмотрим $C([a, b]) \times C([a, b])$ – банахово пространство вектор-функций $U(x) = (u_1(x), u_2(x))$ с нормой

$$\|U\| = \max_{i=1,2}(\max_{x\in[a,b]}|u_i(x)|).$$

В первом из уравнений (1.19) мы имеем $t \geq x$,так что $\Re e\xi(t, x, \lambda) \leq 0$ в силу (1.7). Следовательно, для $U = (u_1, u_2) \in C([a, b]) \times C([a, b])$ получаем из (1.19)

$$|(\Theta U)_j(x, \lambda)| \leq 2\|U\|\rho_1(x, \lambda, Q) \ \forall x \in [a, b], \ j = 1, 2. \tag{1.21}$$

Из этой оценки и (1.8) следует, что

$$\|\Theta\| < 1.$$

Поэтому к уравнению (1.20) можно применить принцип сжимающих отображений [4], и это уравнение имеет решение $U = (u_1, u_2)$ такое, что $\|U\| \leq \gamma_1(\lambda)$, где $\gamma_1(\lambda)$ определяется из (1.5). Действительно, из (1.21):

$$\|\Theta U\| \leq 2\|U\|\rho_1,$$

а для неподвижной точки U

$$U = U_0 + \Theta U,$$

поэтому, так как $U_0 = (0, 1)$,

$$\|U\| - 1 \leq \|U - U_0\| \leq 2\|U\|\rho_1,$$

т.е.

$$\|U\| \leq (1 - 2\rho_1)^{-1}.$$

Из равенства

$$u_j = (U_0 + \Theta U)_j,\ j = 1, 2,$$

и (1.21) получаем

$$\begin{aligned} |u_1(x, \lambda)| &\leq 2\gamma_1(\lambda)\rho_1(x, \lambda, Q), \\ |u_2(x, \lambda) - 1| &\leq 2\gamma_1(\lambda)\rho_1(x, \lambda, Q). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Решение U в силу замечаний, сделанных ранее, является решением системы дифференциальных уравнений (1.18). Используя замены (1.12) и (1.16), можем получить решение исходного уравнения (1.11), для которого, в силу тех же замен и неравенств (1.22), справедливы оценки, приводимые в лемме. □

Аналог этой леммы содержится в [2]. Его существенным отличием является формулировка для интервала (a,b). Для доказательства в этом случае следует заменить пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C[a, b]$ на пространство непрерывных и ограниченных на интервале (a, b) функций $M(a, b)$.

Оценки, подобные приведенным в лемме, имеют место и для бесконечного полуинтервала $[1, +\infty)$.

Пусть

$$\rho_2(x, \lambda, Q) = \int\limits_x^{+\infty} |\delta(t, \lambda, Q)| dt, \tag{1.23}$$

$$\gamma_2(\lambda) = (1 - 2\rho_2(1, \lambda, Q))^{-1}. \tag{1.24}$$

Имеет место

Лемма 1.2. *Пусть* $\forall\lambda \in \Lambda\ Q(x,\lambda)$ – *комплекснозначная функция, причем* $Q''(x,\lambda)$ *непрерывна на* $[1,+\infty)$ *и*

$$Q(x,\lambda) \neq 0, x \in [1,+\infty). \tag{1.25}$$

Пусть на $[1,+\infty)$ *можно выделить ветвь функции корня* $\sqrt{Q}$, *такую, что*

$$Re\sqrt{Q(x,\lambda)} \geq 0, x \in [1,+\infty), \tag{1.26}$$

и выполнено условие

$$\rho_2(1,\lambda,Q) < \frac{1}{2}. \tag{1.27}$$

Тогда $\forall\lambda \in \Lambda$ *уравнение (1.1) имеет решение* $y(x,\lambda)$, *такое, что при* $x \in [1,+\infty)$ *справедливы следующие оценки*

$$\begin{aligned} &|y(x,\lambda) - Q^{-1/4}(x,\lambda)\exp(-\xi(1,x,\lambda))| \leq \\ &\qquad \leq 4\gamma_2(\lambda)|Q(x,\lambda)|^{-1/4}\exp(-Re\xi(1,x,\lambda))\rho_2(x,\lambda,Q) \end{aligned} \tag{1.28}$$

и

$$\begin{aligned} &|y'(x,\lambda) + Q^{1/4}(x,\lambda)\exp(-\xi(1,x,\lambda))| \leq \\ &\qquad \leq |Q(x,\lambda)|^{1/4}\exp(-Re\xi(1,x,\lambda))(4\gamma_2(\lambda)\rho_2(x,\lambda,Q) + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{4}|Q'(x,\lambda)||Q(x,\lambda)|^{-3/2}(1 + 4\gamma_2(\lambda)\rho_2(x,\lambda,Q))). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Ветвь $\sqrt{Q}$ *в формулах (1.28), (1.29) выбрана в соответствии с (1.26).*

Ветвь $\sqrt[4]{Q}$ *выбирается из соотношения*

$$\sqrt[4]{Q} = \sqrt{\sqrt{Q}}.$$

Доказательство. Пользуясь преобразованиями (1.12), (1.16), сведем уравнение (1.1) к системе первого порядка (1.18).

Заменим эту систему системой интегральных уравнений

$$\begin{cases} u_1(x,\lambda) = \int\limits_{+\infty}^{x} \exp(2\xi(t,x,\lambda))\delta(t,\lambda,Q)(u_1(t,\lambda)+u_2(t,\lambda))dt \\ u_2(x,\lambda) = 1 - \int\limits_{+\infty}^{x} \delta(t,\lambda,Q)(u_1(t,\lambda)+u_2(t,\lambda))dt. \end{cases}$$

или в операторной форме

$$U = U_0 + \Theta U, \tag{1.30}$$

где $U = (u_1, u_2)$, $U_0 = (0,1)$ и Θ-интегральный оператор ,

$$\Theta : C_b([1,+\infty)) \times C_b([1,+\infty)) \to C_b([1,+\infty)) \times C_b([1,+\infty)).$$

Так как $C_b([1,+\infty)) \times C_b([1,+\infty))$ – банахово пространство вектор-функций $U(x) = (u_1(x), u_2(x))$ с нормой

$$\|U\| = \max_{i=1,2}\left(\max_{x\in[1,+\infty)}|u_i(x)|\right)$$

и выполнено условие

$$\|\Theta\| < 1,$$

получаемое аналогично лемме 1.1 из условия (1.27), применяем к системе (1.30) принцип сжимающих отображений. Проводя те же рассуждения что и при доказательстве леммы 1.1, с небольшими изменениями (вместо ρ_1 и γ_1 следует поставить ρ_2 и γ_2), получим требуемые неравенства (1.28) и (1.29). $\square$

2 Формула Планшереля–Ротаха для функций Чебышева–Эрмита

Многочлены Чебышева–Эрмита – это множество классических ортогональных многочленов, определенных на всей числовой прямой. Этот факт говорит о том, что здесь мы имеем дело с наиболее интересным и в то же время наиболее сложным случаем среди всех классических ортогональных многочленов.

Полиномы Чебышева–Эрмита являются ортогональными на $\mathbb{R}$ с весом e^{-s^2} и определяются по формуле [8]

$$\widehat{H}_n(s) = \frac{(-1)^n e^{s^2}(e^{-s^2})^{(n)}}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

В теории функций и прикладных задачах широкое применение имеют так называемые функции Чебышева–Эрмита $e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s)$, в терминах которых будут сформулированы дальнейшие результаты. Как известно, эти функции удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению второго порядка [8]

$$w''_{ss}(s, \lambda) + (\lambda - s^2)w(s, \lambda) = 0, \lambda = 2n + 1, \tag{2.2}$$

что позволяет говорить о возможности применения лемм 1.1 и 1.2 главы I. Оказывается, с их помощью могут быть получены известные формулы Планшереля–Ротаха, выведенные еще в 1929 году [17] и являющиеся частным случаем более общего результата, приписываемого Сковгору [12], [19].

Важно заметить, что [8]

$$\widehat{H}_n(-s) \equiv (-1)^n \widehat{H}_n(s), \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.*}$$

что позволяет рассматривать многочлены лишь на полуинтервале $[0, +\infty)$, а затем, с помощью данной формулы, распространить результаты для отрицательных s.

Далее будут рассмотрены два случая: конечного промежутка, когда $0 \le s < \sqrt{\lambda}$, и полубесконечного интервала, когда $s > \sqrt{\lambda}$. В первом случае докажем следующую теорему

Пусть

$$A(s,n) = \frac{10s}{4(2n+1-s^2)^{3/2} - 5s}, B(s,n) = \frac{s}{2(2n+1-s^2)^{3/2}}.$$

Теорема 2.1. *При условиях $n \ge 2, s \ge 0$,*

$$s^2 + \left(\frac{5}{4}s\right)^{2/3} < 2n+1, \tag{2.3}$$

$$|(B(s,n)+1)(A(s,n)+1)^2 - 1| < 1 \tag{2.4}$$

справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\text{1) } e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_n \frac{1}{\sqrt[4]{2n+1-s^2}} \times$$
$$\times \left[\cos\Big(\int\limits_0^s \sqrt{2n+1-\eta^2}d\eta - \frac{\pi n}{2}\Big) + q_1(s,n)\right] \frac{1+\varepsilon_1(n)}{1+p(s,n)}, \tag{2.5}$$

где

$$K_n = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{2n+1}{2n}} \ \text{при } n = 2m, \\ \sqrt[4]{\frac{2n}{2n+1}} \ \text{при } n = 2m+1, \end{cases}$$

$$|\varepsilon_1(n)| \le \begin{cases} (e^{1/(2n)} - 1)(e^{1/(4n)} + 1)/2 \ \text{при } n = 2m, \\ e^{\frac{1}{n-1}}(e^{1/(4n)} + 1)/2 - 1 \ \text{при } n = 2m+1, \end{cases}$$

$$|p(s,n)| \le (B(s,n)+1)(A(s,n)+1)^2 - 1, \tag{2.6}$$

$$|q_1(s,n)| \le (B(s,n)+1)(A(s,n)+1)^2 - 1 \ \text{при } n = 2m, \tag{2.7}$$

$$|q_1(s,n)| \le (A(s,n)+1)^2 - 1 \text{ } при \ n = 2m+1. \qquad (2.8)$$

2) $$\Big[e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s)\Big]'_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_n \sqrt[4]{2n+1-s^2} \times$$
$$\times \Big[-\sin\Big(\int\limits_0^s \sqrt{2n+1-\eta^2}\,d\eta - \frac{\pi n}{2}\Big) + q_2(s,n)\Big]\frac{1+\varepsilon_1(n)}{1+p(s,n)}, \quad (2.9)$$

$$|q_2(s,n)| \le (B(s,n)+1)^2(A(s,n)+1)^2 - 1 \text{ } при \ n = 2m,$$

$$|q_2(s,n)| \le (B(s,n)+1)(A(s,n)+1)^2 - 1 \text{ } при \ n = 2m+1.$$

3) $$se^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_{n-1} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt[4]{2n-1-s^2}} \times$$
$$\times \Big[-\sin\Big(\int\limits_0^s \sqrt{2n-1-\eta^2}\,d\eta - \frac{\pi n}{2}\Big) + q_1(s,n-1)\Big]\frac{1+\varepsilon_1(n-1)}{1+p(s,n-1)} -$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_n \sqrt[4]{2n+1-s^2} \times$$
$$\times \Big[-\sin\Big(\int\limits_0^s \sqrt{2n+1-\eta^2}\,d\eta - \frac{\pi n}{2}\Big) + q_2(s,n)\Big]\frac{1+\varepsilon_1(n)}{1+p(s,n)}, \quad (2.10)$$

где $n \ge 3$. Область определения формулы (2.10) ограничена условиями (2.3) и (2.4) с заменой в них n на $n-1$.

С помощью формулы (2.$*$) формулы (2.5), (2.9) и (2.10) могут быть видоизменены для отрицательных s.

Доказательство. Сделаем замену переменной в (2.2) $x = \frac{s}{\sqrt{\lambda f_1(\lambda)}}$, $y(x,\lambda) = w(s,\lambda)$, где $f_1 = f_1(\lambda)$ – некоторая функция от параметра λ такая, что для $\Psi_1(\lambda) = \lambda^{2/3}(1 - f_1(\lambda))$ выполнены следующие условия

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \Psi_1(\lambda) = +\infty,$$

$$0 < \Psi_1(\lambda) < \lambda^{2/3}\ \forall \lambda \in \mathbb{N}.$$

Из уравнения (2.2) получаем

$$y''_{xx}(x,\lambda) - \lambda^2 f_1(\lambda)(f_1(\lambda)x^2 - 1)y(x,\lambda) = 0, x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{f_1(\lambda)}}\right).$$

Рассмотрим это уравнение на отрезке $[0,1]$ и применим к нему лемму 1.1.

Так как в рассматриваемом случае

$$Q(x,\lambda) = \lambda^2 f_1(\lambda)(f_1(\lambda)x^2 - 1) < 0\ \forall x \in [0,1]\ \forall \lambda \in \mathbb{N},$$

то можно выделить две ветви корня таких, что выполнено (1.7): первая удовлетворяет условию $\underset{(b_1)}{\sqrt{-a}} = \imath \underset{(m)}{\sqrt{a}}$ при $a > 0$, $\underset{(m)}{\sqrt{a}}$ – главная ветвь корня, вторая — $\underset{(b_2)}{\sqrt{-a}} = -\imath \underset{(m)}{\sqrt{a}}$ при $a > 0$. Далее под знаком корня будет подразумеваться главная ветвь, а возможность выбора одной из ветвей (b_1) или (b_2) будет отмечаться знаком $\pm$.

Используя оценки леммы, несложно получить следующие асимптотические формулы для двух частных решений уравнения (2.2):

$$\widehat{w}_{1,2}(s,\lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda - s^2}} \exp\left(\mp\imath \int\limits_{\sqrt{\lambda f_1(\lambda)}}^{s} \sqrt{\lambda - \eta^2}d\eta\right)(1 + \alpha_{1,2}(s,\lambda)), \tag{2.11}$$

где $s \in [0, \sqrt{\lambda f_1(\lambda)}]$, $\lambda \geq \lambda_0$. Для их производных справедливо

$$\widehat{w}'_{1,2}(s,\lambda) = \mp\imath \sqrt[4]{\lambda - s^2} \exp\left(\mp\imath \int\limits_{\sqrt{\lambda f_1(\lambda)}}^{s} \sqrt{\lambda - \eta^2}d\eta\right) \times$$
$$\times (1 + \beta_{1,2}(s,\lambda)), \tag{2.12}$$

где $s \in [0, \sqrt{\lambda f_1(\lambda)}]$, $\lambda \geq \lambda_0$. Имеют место оценки:

$$|\alpha_{1,2}(s,\lambda)| \leq \frac{4\rho_1(0,\lambda,Q)}{1 - 2\rho_1(0,\lambda,Q)},$$

$$|\beta_{1,2}(s,\lambda)| \le \frac{4\rho_1(0,\lambda,Q)}{1-2\rho_1(0,\lambda,Q)} + \frac{|Q'|}{4|Q|^{3/2}}\left(1+\frac{4\rho_1(0,\lambda,Q)}{1-2\rho_1(0,\lambda,Q)}\right),$$

где

$$\frac{|Q'|}{|Q|^{3/2}} = \frac{2\lambda^2 f_1^2(\lambda)x}{\left(\lambda^2 f_1(\lambda)(1-f_1(\lambda)x^2)\right)^{3/2}} = \frac{2s}{(\lambda-s^2)^{3/2}},$$

$$\rho_1(0,\lambda,Q) = \int\limits_0^1 \frac{f_1^{1/2}(\lambda)}{\lambda}\frac{(-\frac{3}{8}f_1(\lambda)x^2-\frac{1}{4})}{(1-f_1(\lambda)x^2)^{5/2}} \le \frac{5f_1^{1/2}(\lambda)}{8\lambda}\times$$
$$\times\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-f_1(\lambda)x^2)^{5/2}}dx \le \frac{5f_1^{1/2}(\lambda)}{8\Psi_1^{3/2}(\lambda)}. \quad (2.13)$$

Определитель Вронского решений (2.11) имеет вид:

$$W = \imath(2+\alpha_1(s,\lambda)+\beta_2(s,\lambda)+\alpha_2(s,\lambda)+\beta_1(s,\lambda)+$$
$$+\alpha_1(s,\lambda)\beta_2(s,\lambda)+\alpha_2(s,\lambda)\beta_1(s,\lambda)).$$

Необходимым и достаточным условием линейной независимости решений (2.11) является $W \ne 0$. Найдем $\lambda_1 \ge \lambda_0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda_1$:

$$|\alpha_1(s,\lambda)+\beta_2(s,\lambda)+\alpha_2(s,\lambda)+\beta_1(s,\lambda)+$$
$$+\alpha_1(s,\lambda)\beta_2(s,\lambda)+\alpha_2(s,\lambda)\beta_1(s,\lambda)| < 2. \quad (2.14)$$

Воспользуемся тем фактом, что любое решение дифференциального уравнения второго порядка представимо в виде линейной комбинации двух частных решений [6]. Ищем асимптотическую формулу для функций Чебышева–Эрмита в виде

$$e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) = C_1(n)\widehat{w}_1(s,2n+1) + C_2(n)\widehat{w}_2(s,2n+1). \quad (2.15)$$

Рассмотрим систему для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases} C_1(n)\widehat{w}_1(0,2n+1) + C_2(n)\widehat{w}_2(0,2n+1) = \widehat{H}_n(0), \\ C_1(n)\widehat{w}_1'(0,2n+1) + C_2(n)\widehat{w}_2'(0,2n+1) = \widehat{H}_n'(0). \end{cases} \quad (2.16)$$

Известно, что [8], [7]:

$$\widehat{H}_{2m}(0)=(-1)^m\frac{\sqrt{2m!}}{m!2^m\pi^{1/4}},\widehat{H}'_{2m}(0)=0,$$
$$\widehat{H}_{2m+1}(0)=0,\widehat{H}'_{2m+1}(0)=(-1)^m\frac{\sqrt{(2m+1)!}}{m!2^{m-1/2}\pi^{1/4}},$$
$$m\in\{0\}\cup\mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Найдем асимптотические формулы для $\widehat{H}_{2m}(0)$ и $\widehat{H}'_{2m+1}(0)$. Для этого придется воспользоваться следующими оценками:

$$m!=\sqrt{2\pi}m^{m+1/2}e^{-m}(1+r_1(m)),\ \text{где}\ 0<r_1(m)<e^{1/(4m)}-1, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{1+x}=1+r_2(x),0<x<1,\ \text{где}\ -x<r_2(x)<0, \quad (2.19)$$

$$\sqrt{1+x}=1+r_3(x),0<x<1,\ \text{где}\ 0<r_3(x)<x/2. \quad (2.20)$$

Первая из них — формула Стирлинга [5], две другие — следствие теоремы об оценке ряда Лейбница, примененное к соответствующим рядам Тейлора. Пользуясь ими, получим

$$\widehat{H}_{2m}(0)=(-1)^m\frac{\sqrt{(2\pi)^{1/2}(2m)^{2m+1/2}e^{-2m}(1+r_1(2m))}}{(2\pi)^{1/2}m^{m+1/2}e^{-m}(1+r_1(m))2^m\pi^{1/4}}=$$
$$=(-1)^m\frac{2^{1/4}}{\pi^{1/2}(2m)^{1/4}}\frac{\sqrt{1+r_1(2m)}}{1+r_1(m)}=(-1)^m\frac{2^{1/4}}{\pi^{1/2}(2m)^{1/4}}(1+a_1(m)). \quad (2.21)$$

Из (2.19) и (2.20)

$$\sqrt{1+r_1(2m)}=1+r_4(m),\ \text{где}\ 0<r_4(m)<\frac{e^{1/(8m)}-1}{2},$$

$$\frac{1}{1+r_1(m)}=1+r_5(m),\ \text{где}\ 1-e^{1/(4m)}<r_5(m)<0.$$

Заметим, что
$$\frac{e^{1/(8m)}-1}{2} < e^{1/(4m)} - 1 \forall m \in \mathbb{N},$$
следовательно
$$|a_1(m)| = |r_4(m) + r_5(m) + r_4(m)r_5(m)| \leq \\ \leq \max\{|r_4(m)|, |r_5(m) + r_4(m)r_5(m)|\} \leq \\ \leq (e^{1/(4m)} - 1)\frac{e^{1/(8m)}+1}{2}. \quad (2.22)$$
Более подробно остановимся на $\widehat{H}'_{2m+1}(0)$. Справедливо
$$\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^m = \left(\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{2m}\right)^{1/2} = e^{1/2}(1+r_6(2m))^{1/2}, \qquad (2.23)$$
где согласно [5] имеем
$$0 > r_6(n) = \frac{1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots-e}{e} \geq \\ \geq -\frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{1+2+\ldots+(k-1)}{n}}{e} = -\frac{1}{2ne}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(k-2)!} = -\frac{1}{2n}. \quad (2.24)$$
Второе неравенство в (2.24) доказывается методом математической индукции. Из (2.23) следует
$$\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^m = e^{1/2}(1+r_7(m)), \qquad (2.25)$$
где согласно формуле Тейлора для функции $\sqrt{1+x}$ в точке $x=0$
$$0 \geq r_7(m) = -\frac{|r_6(2m)|}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}|r_6(2m)|^k \geq \\ \geq -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|r_6(2m)|^k \geq -\frac{1}{8m+2}.$$

Используя (2.20) и (2.25), получаем

$$\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^{m+1/2} = e^{1/2}(1 + r_8(m)),$$
$$\text{где } |r_8(m)| \le \max\left\{\left|r_3\left(\frac{1}{2m}\right)\right|, \left|r_7(m) + r_7(m) r_3\left(\frac{1}{2m}\right)\right|\right\} \le \frac{1}{4m}. \tag{2.26}$$

Применяя (2.18)–(2.20), (2.26) к выражению $\widehat{H}'_{2m+1}(0)$ (2.17), получим

$$\widehat{H}'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{(2m+1)^{1/4} 2^{3/4}}{\pi^{1/2} e^{1/2}} \left(\frac{2m+1}{2m}\right)^{m+1/2} \frac{\sqrt{1 + r_1(2m+1)}}{1 + r_1(m)} =$$
$$= (-1)^m \frac{(2m+1)^{1/4} 2^{3/4}}{\pi^{1/2}} (1 + a_2(m)), \tag{2.27}$$

где

$$|a_2(m)| \le \left(1 + \frac{1}{4m}\right)\left(1 + \frac{e^{\frac{1}{8m+4}} - 1}{2}\right) e^{\frac{1}{4m}} - 1 \le$$
$$\le e^{\frac{1}{2m}} \frac{e^{\frac{1}{8m+4}} + 1}{2} - 1. \tag{2.28}$$

Вернемся к системе (2.16). Применяя формулы Крамера, получим асимптотические выражения для коэффициентов $C_1(n)$, $C_2(n)$. Подставляя их в (2.15), получим (2.5).

Допустим, что

$$\sqrt{\lambda - \lambda^{1/3}} > s > 0. \tag{2.29}$$

Найдем такое ε, что $\frac{2}{3} > \varepsilon > 0$ и

$$s = \sqrt{\lambda(1 - \lambda^{-2/3+\varepsilon})}$$

и положим

$$\Psi_1(\lambda) = \lambda^{\varepsilon} = \lambda^{-1/3}(\lambda - s^2)$$

При данном $\Psi_1(\lambda)$ формула (2.5) определена на отрезке $[0, \sqrt{\lambda f_1(\lambda)}] = [0, s]$. Необходимым условием для справедливости (2.5) является условие (1.8) леммы 1.1, которое, согласно (2.13), может быть заменено на условие

$$\rho_1(0, \lambda, Q) \leq \frac{5 f_1^{1/2}(\lambda)}{8 \Psi_1^{3/2}(\lambda)} < \frac{1}{2},$$

что эквивалентно (2.3).

Нетрудно доказать, что из условия (2.3) при $n \geq 2$ следует левое неравенство в (2.29).

Еще одним необходимым условием является (2.14). Используя оценки для $\alpha_{1,2}(s, \lambda)$ и $\beta_{1,2}(s, \lambda)$, можно наложить вместо него условие (2.4).

Неравенства (2.6)-(2.8) выполняются и при $s = 0$. Для этого достаточно усмотреть в формулах (2.11) и (2.12) существование пределов

$$\lim_{s \to 0} \alpha_i(s, \lambda) \text{ и } \lim_{s \to 0} \beta_i(s, \lambda), i = 1, 2,$$

при фиксированном λ. Первая часть теоремы доказана полностью.

Аналогично (2.5) с помощью (2.12) выводится формула (2.9).

Остается доказать формулу (2.10). Дифференцируя функции Чебышева-Эрмита, получим

$$\left[e^{-s^2/2} \widehat{H}_n(s) \right]_s' = -s e^{-s^2/2} \widehat{H}_n(s) + e^{-s^2/2} \widehat{H}_n'(s). \tag{2.30}$$

Известно, что [8], [7]:

$$\widehat{H}_n'(s) = \sqrt{2n} \widehat{H}_{n-1}(s). \tag{2.31}$$

Подставляя (2.5), (2.31), (2.9) в (2.30), получим (2.10).

$\square$

Для интеграла в формулах (2.5), (2.9) и (2.10) имеет место явное выражение.

Замечание 2.1. *При* $0 \le s \le \sqrt{\lambda}$, *где* $\lambda > 0$,

$$\int_0^s \sqrt{\lambda - \eta^2} d\eta = \frac{\lambda}{2} \left[\arcsin \frac{s}{\sqrt{\lambda}} + \frac{s}{\lambda}\sqrt{\lambda - s^2} \right].$$

Для бесконечного случая справедлива теорема.

Теорема 2.2. *При* $n \ge 1$ *справедливы следующие асимптотические формулы:*

1) $e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sqrt[4]{s^2 - (2n+1)}} e^{-\frac{s}{2}\sqrt{s^2-(2n+1)} + \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{s+\sqrt{s^2-(2n+1)}}{\sqrt{2n+1}}\right)} \times$$

$$\times \frac{1 + \alpha(s, 2n+1)}{(1 + \alpha(+\infty, 2n+1))(1 + \varepsilon_2(n))}, \quad (2.32)$$

где $s \in \left(\sqrt{2n + 1 + (2(2n+1))^{1/3}}, +\infty\right)$, *а члены* $\alpha(s, 2n+1)$, $\alpha(+\infty, 2n+1)$ *и* $\varepsilon_2(n)$ *играют роль погрешностей и для них справедливо следующее:*

а) для каждого фиксированного n *предел*

$$\alpha(+\infty, 2n+1) = \lim_{s \to +\infty} \alpha(s, 2n+1)$$

существует и конечен ;

б) выполнены оценки

$$|\alpha(s,\lambda)| \le \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{(s^2-\lambda)^{3/2} - \sqrt{2}\lambda^{1/2}}, & \text{где } s \in \left(\sqrt{\lambda + (2\lambda)^{1/3}}, \sqrt{2\lambda}\right), \\ \frac{2\sqrt{2}}{\lambda - \sqrt{2}}, & \text{где } s \ge \sqrt{2\lambda}; \end{cases} \quad (2.33)$$

$$|\varepsilon_2(n)| \le \frac{e^{\frac{9}{32(2n+1)}}(e^{\frac{1}{4n}} + 1)}{2} - 1. \quad (2.34)$$

2) $\left[e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s)\right]'_s =$

$$= -\frac{\sqrt[4]{s^2-(2n+1)}}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{s}{2}\sqrt{s^2-(2n+1)}+\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{s+\sqrt{s^2-(2n+1)}}{\sqrt{2n+1}}\right)} \times$$

$$\times \frac{1+\beta(s,2n+1)}{(1+\alpha(+\infty,2n+1))(1+\varepsilon_2(n))}, \quad (2.35)$$

где $s \in \left(\sqrt{(2n+1)+(2(2n+1))^{1/3}}, +\infty\right)$ *и*

$$|\beta(s,\lambda)| \le \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{(s^2-\lambda)^{3/2}-\sqrt{2}\lambda^{1/2}} + \frac{\lambda^{1/2}}{\sqrt{2}(s^2-\lambda)^{3/2}}\left(\frac{(s^2-\lambda)^{3/2}+\sqrt{2}\lambda^{1/2}}{(s^2-\lambda)^{3/2}-\sqrt{2}\lambda^{1/2}}\right), \\ \qquad \text{где } s \in \left(\sqrt{\lambda+(2\lambda)^{1/3}}, \sqrt{2\lambda}\right), \\ \frac{5\lambda+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\lambda(\lambda-\sqrt{2})}, \\ \qquad \text{где } s \ge \sqrt{2\lambda}. \end{cases} \quad (2.36)$$

Применение формул (2.30) и (2.31) к (2.32) и (2.35) дает новую асимптотическую формулу. Она и формулы (2.32) и (2.35) могут быть видоизменены для случая отрицательных s с помощью формулы (2.).*

Доказательство. Введем вспомогательные функции, которые будут служить в дальнейшем при оценке остаточного члена и ограничении области определения асимптотической формулы. Пусть $\Psi_2 : (0,+\infty) \to (0,+\infty), \Psi_2 = \Psi_2(\lambda)$,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \Psi_2(\lambda) = +\infty, \quad (2.37)$$

$$f_2(\lambda) = 1 + \lambda^{-2/3}\Psi_2(\lambda).$$

Сделаем замену переменной в (2.2):

$$x = \frac{s}{\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}}, y(x,\lambda) = w(s,\lambda).$$

Тогда

$$y''_{xx}(x,\lambda) = w''_{ss}(s,\lambda)\lambda f_2(\lambda),$$

$$\lambda - s^2 = \lambda(1 - f_2(\lambda)x^2)$$

и получим

$$y''_{xx}(x,\lambda) - \lambda^2 f_2(\lambda)(f_2(\lambda)x^2 - 1)y(x,\lambda) = 0, x \in \left(\frac{1}{\sqrt{f_2(\lambda)}}, +\infty\right). \tag{2.38}$$

К этому уравнению применим лемму 1.2. Положим

$$Q(x,\lambda) = \lambda^2 f_2(\lambda)(f_2(\lambda)x^2 - 1),$$

и рассмотрим (2.38) при $x \in [1, +\infty)$. Тогда

$$Q(x,\lambda) > 0,$$

так как $f_2(\lambda) > 1$. В качестве ветви корня выбираем главную ветвь. В рассматриваемом случае, принимая обозначения леммы, имеем

$$\delta(x,\lambda,Q) == \frac{f_2^{1/2}(\lambda)}{\lambda} \frac{(-\frac{3}{8}f_2(\lambda)x^2 - \frac{1}{4})}{(f_2(\lambda)x^2 - 1)^{5/2}},$$

$$\rho_2(1,\lambda,Q) = \int\limits_1^{+\infty} |\delta(t,\lambda,Q)|dt = \frac{f_2^{1/2}(\lambda)}{\lambda} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\frac{3}{8}f_2(\lambda)t^2 + \frac{1}{4}}{(f_2(\lambda)t^2 - 1)^{5/2}}dt.$$

Проводя замену $\zeta_1 = \sqrt{f_2(\lambda)}t$ в интеграле, получим

$$\rho_2(1,\lambda,Q) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\sqrt{f_2(\lambda)}}^{+\infty} \frac{\frac{3}{8}\zeta_1^2 + \frac{1}{4}}{(\zeta_1^2 - 1)^{5/2}} d\zeta_1 =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{8} \int\limits_{\sqrt{f_2(\lambda)}}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta_1^2 - 1)^{3/2}} d\zeta_1 + \frac{5}{8} \int\limits_{\sqrt{f_2(\lambda)}}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta_1^2 - 1)^{5/2}} d\zeta_1\right).$$

Замена

$$\zeta_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta_1^2}}$$

приводит к виду

$$\rho_2(1,\lambda,Q) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{8}\int\limits_{\tilde{x}(\lambda)}^{1} \frac{1}{\zeta_2^2} d\zeta_2 + \frac{5}{8}\int\limits_{\tilde{x}(\lambda)}^{1} \frac{1-\zeta_2^2}{\zeta_2^4} d\zeta_2\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4\tilde{x}(\lambda)} + \frac{5}{24\tilde{x}^3(\lambda)}\right) \leq \frac{1}{4\lambda\tilde{x}^3(\lambda)}, \quad (2.39)$$

где

$$\tilde{x}(\lambda) = \sqrt{1 - \frac{1}{f_2(\lambda)}}.$$

Для того, чтобы можно было применить лемму, надо, чтобы выражение (2.39) было строго меньше $1/2$. Наложим условие:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda\tilde{x}^3(\lambda)} = 0, \quad (2.40)$$

Заметим, что

$$(1+y)^{3/2} = (1+3y+3y^2+y^3)^{1/2} \leq 1 + \sqrt{3}y^{1/2} + \sqrt{3}y + y^{3/2} \leq$$
$$\leq \begin{cases} 1 + 2\sqrt{3} + y^{3/2} & \text{при } 0 \leq y < 1, \\ 1 + (1+2\sqrt{3})y^{3/2} & \text{при } y \geq 1. \end{cases}$$

Отсюда, пользуясь неравенством

$$(1+y)^{3/2} \leq 5 + 5y^{3/2} \ \forall y \geq 0,$$

получим

$$\frac{1}{\lambda\tilde{x}^3(\lambda)} = \frac{f_2^{3/2}(\lambda)}{\lambda(f_2(\lambda)-1)^{3/2}} = \frac{(1+\lambda^{-2/3}\Psi_2(\lambda))^{3/2}}{\Psi_2^{3/2}(\lambda)} \leq \frac{5}{\Psi_2^{3/2}(\lambda)} + \frac{5}{\lambda}.$$

При условии (2.37) $\exists\lambda_2$ такое, что $\forall\lambda \geq \lambda_2$:

$$\rho_2(1, \lambda, Q) \leq \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\Psi_2^{3/2}(\lambda)} + \frac{1}{\lambda}\right) < \frac{1}{2}. \tag{2.41}$$

Тогда уравнение (2.38) согласно лемме имеет решение $y(x, \lambda)$, для которого выполнены неравенства (1.28) и (1.29). Имеем

$$|Q'(x, \lambda)||Q(x, \lambda)|^{-3/2} = \frac{2f_2^{1/2}(\lambda)x}{\lambda(f_2(\lambda)x^2 - 1)^{3/2}}. \tag{2.42}$$

Рассмотрим при фиксированном λ функцию

$$F(x) = \frac{x}{(f_2(\lambda)x^2 - 1)^{3/2}}.$$

Тогда

$$F'(x) = \frac{-2f_2(\lambda)x^2 - 1}{(f_2(\lambda)x^2 - 1)^{5/2}} < 0, \text{при } x \in [1, +\infty).$$

Тем самым, выражение (2.42) можно оценить следующим образом

$$|Q'(x, \lambda)||Q(x, \lambda)|^{-3/2} \leq \frac{2f_2^{1/2}(\lambda)}{\lambda(f_2(\lambda) - 1)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2(1 + \lambda^{-2/3}\Psi_2(\lambda))^{1/2}}{\Psi_2^{3/2}(\lambda)} \leq \frac{2}{\Psi_2^{3/2}(\lambda)} + \frac{2\lambda^{-1/3}}{\Psi_2(\lambda)}. \tag{2.43}$$

Последнее неравенство выполнено в силу неравенства

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \; \forall a, b, a \geq 0, b \geq 0.$$

При выполнении условия (2.37) последнее выражение в (2.43) стремится к 0. Далее

$$\sqrt[4]{Q\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}}, \lambda\right)} = \sqrt[4]{\lambda f_2(\lambda)(s^2 - \lambda)}. \tag{2.44}$$

$$\xi\left(1, \frac{s}{\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}}, \lambda\right) = \int\limits_1^{\frac{s}{\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}}} \sqrt{\lambda^2 f_2(\lambda)(f_2(\lambda)t^2 - 1)}dt =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}}^{s} \sqrt{\eta^2 - \lambda}d\eta, \quad (2.45)$$

откуда для решения уравнения (2.2) получаем формулу при $\lambda \geq \lambda_2$:

$$w(s,\lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda f_2(\lambda)(s^2 - \lambda)}} \exp\left(-\int\limits_{\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}}^{s} \sqrt{\eta^2 - \lambda}d\eta\right) \times$$

$$\times (1 + \alpha(s,\lambda)), \text{где } s \in \left[\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}, +\infty\right) \quad (2.46)$$

и

$$|\alpha(s,\lambda)| \leq \gamma_2(\lambda) \frac{(1 + \lambda^{-2/3}\Psi_2(\lambda))^{3/2}}{\Psi_2^{3/2}(\lambda)}, \quad (2.47)$$

а для его производной

$$w'(s,\lambda) = -\sqrt[4]{\frac{s^2 - \lambda}{\lambda f_2(\lambda)}} \exp\left(-\int\limits_{\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}}^{s} \sqrt{\eta^2 - \lambda}d\eta\right) \times$$

$$\times (1 + \beta(s,\lambda)), \text{где } s \in \left[\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}, +\infty\right) \quad (2.48)$$

и

$$|\beta(s,\lambda)| \leq \gamma_2(\lambda) \left(\frac{(1 + \lambda^{-2/3}\Psi_2(\lambda))^{3/2}}{\Psi_2^{3/2}(\lambda)}\right) +$$

$$+ \frac{(1 + \lambda^{-2/3}\Psi_2(\lambda))^{1/2}}{2\Psi_2^{3/2}(\lambda)} \times$$

$$\times \left(1 + \gamma_2(\lambda) \left(\frac{(1 + \lambda^{-2/3}\Psi_2(\lambda))^{3/2}}{\Psi_2^{3/2}(\lambda)}\right)\right). \quad (2.49)$$

Условие (2.37) на $\Psi_2(\lambda)$ в применении к (2.47) и (2.49) дает

$$\alpha(s,\lambda) \to 0 \text{ и } \beta(s,\lambda) \to 0 \text{ (при } \lambda \to +\infty)$$

равномерно по $s \in [\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}, +\infty)$.

При фиксированном $\lambda, \lambda \geq \lambda_2$, функция $w(s,\lambda)$ будет ограниченной при $s \in [\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}, +\infty)$. Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений $\forall \lambda, \lambda \geq \lambda_2$, существует еще одно решение $u(s,\lambda)$ уравнения (2.2), причем $u(s,\lambda)$ является неограниченным по s (см. [2] лемму 4.1 на стр. 412, которую можно переформулировать для $x \geq 1$ или, что в рассматриваемом здесь случае то же самое, для $s \geq \sqrt{\lambda f_2(\lambda)}$). Решения $w(s,\lambda)$ и $u(s,\lambda)$ линейно независимы.

Согласно известной теореме любое решение дифференциального уравнения (2.2) можно представить в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений [6]. В качестве таковых решений возьмем $w(s, 2n+1)$ и $u(s, 2n+1)$. При фиксированном n:

$$e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) \to 0 \text{ (при } s \to +\infty).$$

Отсюда следует, что

$$e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) = C_n w(s, 2n+1), \tag{2.50}$$

где C_n– некоторая константа. Найдем ее. Из определения $\widehat{H}_n(s)$ вытекает, что

$$\widehat{H}_n(s) = \sqrt{\frac{2^n}{n!\sqrt{\pi}}} s^n + o(s^n)(s \to +\infty).$$

Тогда C_n можно найти по формуле

$$\frac{1}{C_n} = \lim_{s \to +\infty} \frac{e^{s^2/2} w(s, 2n+1)}{s^n 2^{n/2}} \sqrt{n!\sqrt{\pi}}. \tag{2.51}$$

Вычислим сперва интеграл (2.45). Делая замену $\eta = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{ch}\,t$, получим

$$\int\limits_{\sqrt{\lambda f_2(\lambda)}}^{s} \sqrt{\eta^2 - \lambda}\,d\eta = \lambda \int\limits_{\mathrm{arch}\sqrt{f_2(\lambda)}}^{\mathrm{arch}(s/\sqrt{\lambda})} \mathrm{sh}^2\, t dt =$$

$$= \lambda \int\limits_{\mathrm{arch}\sqrt{f_2(\lambda)}}^{\mathrm{arch}(s/\sqrt{\lambda})} \frac{\mathrm{ch}\,2t - 1}{2} dt = \left(\frac{\lambda}{4}\,\mathrm{sh}\,2t - \frac{\lambda}{2} t\right)\Bigg|_{\mathrm{arch}\sqrt{f_2(\lambda)}}^{\mathrm{arch}(s/\sqrt{\lambda})} =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\frac{s^2}{\lambda} - 1} - \sqrt{f_2(\lambda)}\sqrt{f_2(\lambda) - 1}\right) -$$

$$- \frac{\lambda}{2}\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\frac{s^2}{\lambda} - 1}\right) - \ln\left(\sqrt{f_2(\lambda)} + \sqrt{f_2(\lambda) - 1}\right)\right). \quad (2.52)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\mathrm{ch}\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \mathrm{sh}\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

– гиперболические косинус и синус,

$$\mathrm{arch} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)$$

– главная ветвь гиперболического ареакосинуса. В формуле (2.52) и далее $\lambda = 2n + 1$.

Введем обозначение

$$B(\lambda) = \frac{\lambda}{2}\Big(\sqrt{f_2(\lambda)}\sqrt{f_2(\lambda) - 1} - \ln(\sqrt{f_2(\lambda)} + \sqrt{f_2(\lambda) - 1})\Big). \quad (2.53)$$

Далее понадобится также следующая формула

$$\frac{s^2}{2} - \frac{\lambda}{2}\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\frac{s^2}{\lambda} - 1} = \frac{s^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda}{s^2}}\right) =$$

$$= \frac{s^2}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2s^2} + O\left(\frac{1}{s^4}\right)\right)\right) = \frac{\lambda}{4} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$(\lambda \text{ фиксировано, } s \to +\infty). \quad (2.54)$$

Пользуясь формулой Стирлинга (2.18) получаем, что предел (2.51) имеет вид:

$$\frac{1}{C_n} = \lim_{s\to+\infty}\left(\frac{e^{s^2/2}w(s,2n+1)}{s^n 2^{n/2-1/4}}\pi^{1/2}n^{n/2+1/4}e^{-n/2}\right)(1+r_9(n)),$$

$$\text{где } |r_9(n)| \le \frac{|r_1(n)|}{2} \le \frac{e^{\frac{1}{4n}}-1}{2}. \quad (2.55)$$

Подставляя (2.46), (2.52)–(2.54) в (2.55), получаем:

$$\frac{1}{C_n} = \lim_{s\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{s^2}{2}-\frac{\lambda}{2}\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\frac{s^2}{\lambda}-1}+B(\lambda)}}{s^n 2^{n/2-1/4}\lambda^{1/4}f_2^{1/4}(\lambda)\sqrt[4]{s^2-\lambda}\,e^{n/2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}+\sqrt{\frac{s^2}{\lambda}-1}\right)^{\lambda/2}\pi^{1/2}n^{n/2+1/4}(1+\alpha(s,2n+1))\right)\times$$

$$\times(1+r_9(n)) = \lim_{s\to+\infty}\left(\frac{e^{B(\lambda)}\left(\frac{2s}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\pi^{\frac12}\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^{\frac{\lambda}{4}}e^{\frac{\lambda}{4}}}{s^{\frac{\lambda-1}{2}}2^{\frac{\lambda-1}{4}-\frac14}\lambda^{\frac14}f_2^{\frac14}(\lambda)s^{\frac12}e^{\frac{\lambda-1}{4}}}\right)\times$$

$$\times(1+\alpha(+\infty,2n+1))(1+r_9(n)) =$$

$$= \frac{2^{1/2}e^{B(\lambda)}\pi^{1/2}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda/4}}{\lambda^{1/4}f_2^{1/4}(\lambda)e^{-1/4}}(1+\alpha(+\infty,2n+1))(1+r_9(n)). \quad (2.56)$$

Принимая во внимание существование предела (2.51) заметим, что из (2.56) следует утверждение а) теоремы. Имеет место оценка

$$|\alpha(+\infty,2n+1)| \le \gamma_2(\lambda)\frac{(1+\lambda^{-2/3}\Psi_2(\lambda))^{3/2}}{\Psi_2^{3/2}(\lambda)}. \quad (2.57)$$

Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа [5] примененная к функции $\ln(1+x)$, имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+\theta(x)x)^2},\ \text{где } \theta(x)\in(0,1), |x|<1.$$

Отсюда имеем оценку

$$\left|\ln\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda}\right|\le\frac{1}{2\lambda^2}\frac{1}{(1-1/\lambda)^2}\le\frac{9}{8\lambda^2},$$

так как $\lambda=2n+1\ge 3$ при $n\ge 1$. Тогда

$$\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda/4}=e^{\frac{\lambda}{4}\ln\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}=e^{-1/4}(1+r_{10}(n)),$$

где $|r_{10}(n)|\le e^{\frac{9}{32(2n+1)}}-1$. Подставляя в формулу (2.56), получим

$$\frac{1}{C_n}=\frac{(2\pi)^{1/2}e^{B(\lambda)}}{(\lambda f_2(\lambda))^{1/4}}(1+\alpha(+\infty,2n+1))(1+\varepsilon_2(n)), \tag{2.58}$$

где

$$|\varepsilon_2(n)|\le|r_9(n)|+|r_{10}(n)|+|r_9(n)r_{10}(n)|\le \\ \le\frac{e^{\frac{9}{32(2n+1)}}(e^{\frac{1}{4n}}+1)}{2}-1. \tag{2.59}$$

Пользуясь формулой (2.52) и обозначением (2.53), подставляя (2.46) и (2.58) в (2.50), получим (2.32) при $s\in[\sqrt{\lambda+\lambda^{1/3}\Psi_2(\lambda)},+\infty)$, а для $\alpha(s,2n+1)$, $\alpha(+\infty,2n+1)$ и $\varepsilon_2(n)$ справедливы оценки (2.47), (2.57) и (2.59). Формула (2.35) выводится аналогичным образом с помощью (2.48).

Возьмем произвольное $s\in(\sqrt{\lambda+\lambda^{1/3}},\sqrt{2\lambda})$. Тогда $\exists\varepsilon, 0<\varepsilon<\frac{2}{3}, s=\sqrt{\lambda(1+\lambda^{-2/3+\varepsilon})}$. Рассмотрим функцию $\Psi_2(\lambda)=\lambda^{\varepsilon}$, которая удовлетворяет (2.37). Имеем

$$\Psi_2(\lambda)=(s^2-\lambda)\lambda^{-1/3}$$

и в силу (2.47) и (2.49) получаем оценки (2.33) и (2.36), сформулированные для $s\in\left(\sqrt{\lambda+(2\lambda)^{1/3}},\sqrt{2\lambda}\right)$. Условие (1.27) при этом запишем в виде

$$\rho_2(1,\lambda,Q) \leq \frac{(1+\lambda^{-2/3}\Psi_2(\lambda))^{3/2}}{4\Psi_2^{3/2}(\lambda)} = \frac{s^3}{4\lambda(s^2-\lambda)^{3/2}} < \\ < \frac{\lambda^{1/2}}{\sqrt{2}(s^2-\lambda)^{3/2}} < \frac{1}{2},$$

откуда $s > \sqrt{\lambda + (2\lambda)^{1/3}}$. Пусть $s \geq \sqrt{2\lambda}$. Тогда для

$$\Psi_2(\lambda) = \lambda^{2/3}$$

имеют место оценки (2.33) и (2.36) остаточных членов, сформулированные для случая $s \geq \sqrt{2\lambda}$. Здесь условие (1.27) выполняется автоматически:

$$\rho_2(1,\lambda,Q) \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < \frac{1}{2} \text{ при } \lambda = 2n+1 \geq 3.$$

$\square$

3 Аналог формулыИраншереля–Ротаха для многочленов Якоби

Многочленами Якоби опиывается все множество классических ортогональных многочленов, определенных на конечном промежутке. Стандартизованные многочлены Якоби определяются по формуле Родрига [8]

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]^{(n)},$$
$$x \in (-1,1), \alpha > -1, \beta > -1. \quad (3.1)$$

Полиномы (3.1) являются ортогональными на интервале $(-1,1)$ с весом

$$h(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.$$

Известно [8], что функция

$$u(\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n(\cos\theta;\alpha,\beta). \quad (3.2)$$

удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$u'' + \left[\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\frac{1}{4}-\beta^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} + \left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2\right]u = 0. \quad (3.3)$$

Основываясь на этом факте, докажем следующую теорему

Пусть $0 < \varepsilon < \pi/2$,

$$A = \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{4}, B = \frac{\frac{1}{4}-\beta^2}{4},$$

$$N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \alpha > -1, \beta > -1,$$

$$Q(\cos\theta, N) = -\left[\frac{A}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{B}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + N^2\right],$$

$$I(\theta) = I(\theta, n, \alpha, \beta) = \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{|Q(\cos\theta, N)|}d\varphi.$$

Теорема 3.1. *$\exists n_1 = n_1(\varepsilon, \alpha, \beta), \forall n \geq n_1$ на отрезке $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ справедливы следующие формулы*

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n(\cos\theta;\alpha,\beta) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{|Q(\cos\theta, N)|}}\left[C_1(n)\left\{\cos I(\theta) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + C_2(n)\left\{\sin I(\theta) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}\right], \quad (3.4)$$

$$\left[\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n(\cos\theta;\alpha,\beta)\right]_\theta' =$$
$$= \sqrt[4]{|Q(\cos\theta, N)|}\left[C_1(n)\left\{-\sin I(\theta) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + C_2(n)\left\{\cos I(\theta) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}\right], \quad (3.5)$$

где

$$C_1(n) = 2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}\left[P_n(0;\alpha,\beta)\sqrt[4]{|Q(0,N)|}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \right.$$
$$\left. - \left\{\frac{\alpha-\beta}{2}P_n(0;\alpha,\beta) - P_n'(0;\alpha,\beta)\right\}\frac{1}{\sqrt[4]{|Q(0,N)|}}O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right], \quad (3.6)$$

$$C_2(n) = 2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}} \left[\left\{ \frac{\alpha-\beta}{2} P_n(0;\alpha,\beta) - P'_n(0;\alpha,\beta) \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\sqrt[4]{|Q(0,N)|}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + P_n(0;\alpha,\beta)\sqrt[4]{|Q(0,N)|}\, O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]. \tag{3.7}$$

Оценки в формулах (3.4) и (3.5) являются равномерными по $\theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$*. Оценки в формулах (3.4) – (3.7) не являются равномерными по* ε*.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0, \varepsilon \in (0, \pi/2)$, $\alpha > -1, \beta > -1$. Пользуясь замечанием, сделанным относительно корней при доказательстве теоремы 2.1 (см. абзац перед формулой (2.11)), применяем лемму 1.1 на отрезке $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ к формуле (3.3). Пусть $\tilde{n}_0 = \tilde{n}_0(\varepsilon, \alpha, \beta)$ такое, что $\forall n \geq \tilde{n}_0 : Q(\cos\theta, N) < 0$ при $\theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$. Получаем два частных решения уравнения (3.3) :

$$u_{1,2}(\theta;\alpha,\beta) = \frac{1}{e^{\pm\imath\frac{\pi}{4}}\sqrt[4]{|Q(\cos\theta,N)|}} \exp\left(\mp\imath \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{|Q(\cos\varphi,N)|}d\varphi\right) \times$$

$$\times \left(1 + \alpha_{1,2}(\theta;\alpha,\beta)\right), \tag{3.8}$$

где

$$|\alpha_{1,2}(\theta;\alpha,\beta)| \leq \frac{4\rho_1(\varepsilon,N,Q)}{1 - 2\rho_1(\varepsilon,N,Q)}. \tag{3.9}$$

Формулы для производных имеют вид

$$u'_{1,2}(\theta;\alpha,\beta) =$$

$$= -e^{\pm\imath\frac{\pi}{4}}\sqrt[4]{|Q(\cos\theta,N)|} \exp\left(\mp\imath \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{|Q(\cos\varphi,N)|}d\varphi\right) \times$$

$$\times \left(1 + \beta_{1,2}(\theta;\alpha,\beta)\right), \tag{3.10}$$

где

$$|\beta_{1,2}(\theta;\alpha,\beta)| \leq \frac{4\rho_1(\varepsilon,N,Q)}{1-2\rho_1(\varepsilon,N,Q)} + \\ + \frac{1}{4}|Q'||Q|^{-3/2}\left(1+\frac{4\rho_1(\varepsilon,N,Q)}{1-2\rho_1(\varepsilon,N,Q)}\right). \quad (3.11)$$

Формулы (3.8)–(3.11) имеют место при выполнении условия (1.8). Заметим, что

$$\delta(\varepsilon,N,Q) = O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

а

$$\rho_1(\varepsilon,N,Q) = O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

поэтому $\exists n_0 = n_0(\varepsilon,\alpha,\beta), n_0 \geq \tilde{n}_0$, такое, что $\forall n \geq n_0$ условие (1.8) выполнено, и, следовательно, справедливы (3.8) и (3.10). При этом из (3.9) и (3.11) следует, что остаточные члены имеют оценки

$$\alpha_{1,2}(\theta;\alpha,\beta) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \beta_{1,2}(\theta;\alpha,\beta) = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (3.12)$$

равномерно по $\theta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$. Определитель Вронского решений (3.8) имеет вид

$$W_1 = \begin{vmatrix} u_1(\theta;\alpha,\beta) & u_2(\theta;\alpha,\beta) \\ u_1'(\theta;\alpha,\beta) & u_2'(\theta;\alpha,\beta) \end{vmatrix} = \\ = \imath(2+\alpha_1(\theta;\alpha,\beta)+\alpha_2(\theta;\alpha,\beta)+\beta_1(\theta;\alpha,\beta)+\beta_2(\theta;\alpha,\beta)+ \\ + \alpha_1(\theta;\alpha,\beta)\beta_2(\theta;\alpha,\beta)+\alpha_2(\theta;\alpha,\beta)\beta_1(\theta;\alpha,\beta)).$$

В силу (3.12) $\exists n_1 = n_1(\varepsilon,\alpha,\beta), n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1$: $W_1 \neq 0$. Положим

$$\begin{cases} v_1(\theta;\alpha,\beta) = \frac{e^{\imath\frac{\pi}{4}}}{2}u_1(\theta;\alpha,\beta) + \frac{e^{-\imath\frac{\pi}{4}}}{2}u_2(\theta;\alpha,\beta), \\ v_2(\theta;\alpha,\beta) = -\frac{e^{-\imath\frac{\pi}{4}}}{2}u_1(\theta;\alpha,\beta) - \frac{e^{\imath\frac{\pi}{4}}}{2}u_2(\theta;\alpha,\beta). \end{cases} \quad (3.13)$$

Определитель Вронского для нового набора решений равен

$$W_2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} e^{\imath\frac{\pi}{4}} & e^{-\imath\frac{\pi}{4}} \\ -e^{-\imath\frac{\pi}{4}} & -e^{\imath\frac{\pi}{4}} \end{vmatrix} \cdot W_1 = -\frac{\imath W_1}{2}.$$

$v_1(\theta;\alpha,\beta)$ и $v_2(\theta;\alpha,\beta)$ – частные решения уравнения (3.3), а преобразование (3.13) является невырожденным. В силу этого $\forall n \geq n_1$ $v_1(\theta;\alpha,\beta)$ и $v_2(\theta;\alpha,\beta)$ линейно независимы. Для них имеем формулы

$$v_1(\theta;\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt[4]{|Q(\cos\theta, N)|}} \times \\ \times \left[\cos\left(\int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{|Q(\cos\varphi, N)|}d\varphi\right) + \hat{\alpha}_1(\theta;\alpha,\beta)\right]$$

и

$$v_2(\theta;\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt[4]{|Q(\cos\theta, N)|}} \times \\ \times \left[\sin\left(\int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{|Q(\cos\varphi, N)|}d\varphi\right) + \hat{\alpha}_2(\theta;\alpha,\beta)\right],$$

где для остаточных членов справедливы оценки аналогичные (3.12). Применяя известную теорему из теории дифференциальных уравнений [6], можем представить функцию (3.2) в виде линейной комбинации этих решений

$$u(\theta) = C_1(n)v_1(\theta;\alpha,\beta) + C_2(n)v_2(\theta;\alpha,\beta), \tag{3.14}$$

где коэффициенты можно найти из следующего соотношения

$$\begin{cases} C_1(n)v_1\left(\frac{\pi}{2};\alpha,\beta\right) + C_2(n)v_2\left(\frac{\pi}{2};\alpha,\beta\right) = 2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}P_n(0;\alpha,\beta), \\ C_1(n)v_1'\left(\frac{\pi}{2};\alpha,\beta\right) + C_2(n)v_2'\left(\frac{\pi}{2};\alpha,\beta\right) = \\ = 2^{-\frac{\alpha+\beta+3}{2}}(\alpha-\beta)P_n(0;\alpha,\beta) - 2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}P_n'(0;\alpha,\beta), \end{cases} \tag{3.15}$$

которое следует из (3.14). Применяя формулы Крамера к (3.15), находим в точности формулы (3.6) и (3.7). Дифференцируя равенство (3.14), получаем (3.5). Теорема доказана. $\square$

Вычислим интеграл $I(\theta)$, стоящий в асимптотических формулах (3.4) и (3.5). Докажем следующее утверждение

Обозначим t_1 и t_2 – корни многочлена

$$-N^2t^2 + 2(A-B)t + 2(A+B) + N^2, \tag{3.16}$$

причем $t_1 < t_2$. Пусть

$$x(t) = \sqrt{\frac{t_2 - t}{t - t_1}},$$

$$\Phi(\theta) = \operatorname{arctg} x(\cos\theta) - \operatorname{arctg} x(0),$$

$$\varphi_1(\theta) = -\frac{1}{4}\sqrt{-(1+t_1)(1+t_2)}\Bigg[\ln\left|\frac{x(\cos\theta) - \sqrt{\frac{1+t_2}{-1-t_1}}}{x(\cos\theta) + \sqrt{\frac{1+t_2}{-1-t_1}}}\right| - \\ - \ln\left|\frac{x(0) - \sqrt{\frac{1+t_2}{-1-t_1}}}{x(0) + \sqrt{\frac{1+t_2}{-1-t_1}}}\right|\Bigg],$$

$$\varphi_2(\theta) = \frac{1}{4}\sqrt{(1-t_1)(t_2-1)}\Bigg[\ln\left|\frac{x(\cos\theta) - \sqrt{\frac{t_2-1}{1-t_1}}}{x(\cos\theta) + \sqrt{\frac{t_2-1}{1-t_1}}}\right| - \\ - \ln\left|\frac{x(0) - \sqrt{\frac{t_2-1}{1-t_1}}}{x(0) + \sqrt{\frac{t_2-1}{1-t_1}}}\right|\Bigg],$$

$$\psi_1(\theta) = -\frac{\sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}}{2}\Bigg[\operatorname{arctg}\Big\{\sqrt{\frac{1+t_1}{1+t_2}}x(\cos\theta)\Big\} - \\ - \operatorname{arctg}\Big\{\sqrt{\frac{1+t_1}{1+t_2}}x(0)\Big\}\Bigg],$$

$$\psi_2(\theta) = -\frac{\sqrt{(1-t_1)(1-t_2)}}{2}\Bigg[\mathrm{arctg}\{\sqrt{\frac{1-t_1}{1-t_2}}x(\cos\theta)\} -$$

$$- \mathrm{arctg}\{\sqrt{\frac{1-t_1}{1-t_2}}x(0)\}\Bigg].$$

Теорема 3.2. $\forall\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, $\exists n_2 = n_2(\varepsilon, \alpha, \beta), \forall n \geq n_2$, *что на отрезке* $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ *справедливы следующие формулы*

$$I(\theta) = \begin{cases} 2N\left[\Phi(\theta) + \varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)\right] \ \textit{при } \alpha^2+\beta^2 < 1/2, \\ 2N\left[\Phi(\theta) + \psi_1(\theta) + \psi_2(\theta)\right] \ \textit{при } \alpha^2+\beta^2 > 1/2, \\ N\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \ \textit{при } \alpha^2 = \beta^2 = 1/4, \\ 2N\left[\Phi(\theta) + \varphi_1(\theta) + \psi_2(\theta)\right] \\ \quad \textit{при } \alpha^2+\beta^2 = 1/2, |\alpha| > |\beta|, \\ 2N\left[\Phi(\theta) + \psi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)\right] \\ \quad \textit{при } \alpha^2+\beta^2 = 1/2, |\alpha| < |\beta|, \end{cases} \tag{3.17}$$

где $\theta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$.

Доказательство.

$$\int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{\frac{A}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{B}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + N^2}d\theta =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{\frac{-N^2\cos^2\theta + 2(A-B)\cos\theta + 2(A+B) + N^2}{1-\cos^2\theta}}d\theta.$$

Делая замену $t = \cos\theta$, получим

$$I(\theta) = -\int\limits_{\cos\pi/2}^{\cos\theta} \frac{\sqrt{-N^2t^2 + 2(A-B)t + 2(A+B) + N^2}}{1-t^2}dt.$$

Так как $N \neq 0$ при $n \geq 1$, то

$$-N^2t^2 + 2(A-B)t + 2(A+B) + N^2$$

является квадратным трехчленом с двумя различными корнями

$$t_1 = t_1(N) = \frac{-\sqrt{(A-B)^2 + 2N^2(A+B) + N^4} - (B-A)}{N^2},$$

$$t_2 = t_2(N) = \frac{\sqrt{(A-B)^2 + 2N^2(A+B) + N^4} - (B-A)}{N^2}.$$

Рассмотрим пять различных случаев:

1) $A + B > 0$;

2) $A + B < 0$;

3) $A = B = 0$;

4) $A + B = 0, B - A > 0$;

5) $A + B = 0, B - A < 0$.

$\exists n_2 = n_2(\varepsilon, \alpha, \beta) \forall n \geq n_2$ в вышеуказанных случаях соответственно выполнены соотношения

1) $t_1 < -1, t_2 > 1$;

2) $-1 < t_1 < 0, 0 < t_2 < 1$;

3) $t_1 = -1, t_2 = 1$;

4) $t_1 < -1, 0 < t_2 < 1$;

5) $-1 < t_1 < 0, t_2 > 1$.

Считаем, что n_2 выбрано таким образом, что t_1 и t_2 лежат вне отрезка $[\cos(\pi - \varepsilon), \cos\varepsilon]$.

Рассмотрим первый случай.

$$I(\theta) = -N \int\limits_0^{\cos\theta} \frac{\sqrt{(t_2 - t)(t - t_1)}}{1 - t^2} dt. \tag{3.18}$$

Замена переменной

$$x = x(t) = \frac{\sqrt{(t_2 - t)(t - t_1)}}{t - t_1} \tag{3.19}$$

дает равенство

$$I(\theta) = N(t_2 - t_1)^2 \times$$
$$\times \int\limits_{x(0)}^{x(\cos\theta)} \frac{2x^2dx}{(x^2+1)((t_1+1)x^2+t_2+1)((1-t_1)x^2-(t_2-1))}. \quad (3.20)$$

Разлагая дробь под интегралом (3.20) в сумму простейших, получим

$$I(\theta) = 2N \int\limits_{x(0)}^{x(\cos\theta)} \left\{ \frac{1}{x^2+1} - \right.$$
$$- \frac{1}{2}(1+t_1)(1+t_2)\frac{1}{(t_1+1)x^2+t_2+1} +$$
$$\left. + \frac{1}{2}(1-t_1)(t_2-1)\frac{1}{(1-t_1)x^2-(t_2-1)} \right\} dx. \quad (3.21)$$

Это равенство справедливо и в случаях 2), 4), 5). Интегрируя (3.21), получим (3.17) при $|\alpha^2 - 1/4| + |\beta^2 - 1/4| \neq 0$. Случай 3) рассматриваем непосредственно

$$I(\theta) = \int\limits_{\pi/2}^{\theta} N d\theta = N\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Тем самым, теорема доказана. □

Результаты предыдущей главы позволяют назвать формулы (3.4) и (3.5) аналогами формулы Планшереля–Ротаха для многочленов Якоби и их производных.

Следствие 3.1. *В случаях $\alpha = \beta = -1/2$ (многочлены Чебышева I рода) и $\alpha = \beta = 1/2$ (многочлены Чебышева II рода) аналогом формулы Планшереля–Ротаха являются явные формулы для многочленов*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

и

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

соответственно.

Наиболее интересным случаем является $\alpha = \beta = 0$ (многочлены Лежандра). Его следует рассмотреть отдельно.

Известно, что функция

$$u(\theta) = (\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta) = \frac{(1-x^2)^{1/4}}{n!2^n}[(x^2-1)^n]^{(n)}|_{x=\cos\theta} \tag{3.22}$$

удовлетворяет уравнению

$$u''_{\theta\theta} + \left[\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right] u = 0, \theta \in [0, \pi] \tag{3.23}$$

[8].

Будем исследовать наше уравнение на отрезке $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < \pi/2$.

Вычислим интеграл, который встречается в оценках, приведенных в лемме 1.1. Полагая $B = 2n + 1$, имеем

$$\int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2} d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta} + B^2} d\theta =$$

$$= (\text{ Замена } y = \sin\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \int\limits_{1}^{\sin\theta} \sqrt{\frac{1}{y^2} + B^2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= (\text{ Замена } t = y^2) = \frac{1}{4}\operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \int\limits_{1}^{\sin^2\theta} \sqrt{\frac{1+B^2t}{1-t}} \frac{dt}{t} =$$

$$= (\text{ Замена } x(t) = \sqrt{\frac{1+B^2t}{1-t}}) =$$

$$= \operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \int\limits_{+\infty}^{x(\sin^2\theta)} \frac{(B^2+1)x^2}{2(x^2-1)(x^2+B^2)} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \int\limits_{+\infty}^{x(\sin^2\theta)} \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{B^2}{x^2+B^2}\right) dx =$$

$$= \operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \left(\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+B^2\sin^2\theta} - |\cos\theta|}{\sqrt{1+B^2\sin^2\theta} + |\cos\theta|} + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+B^2\sin^2\theta}}{B|\cos\theta|} - \frac{\pi B}{4}\right).$$

В предпоследнем равенстве было использовано разложение на простейшие дроби.

Для рассматриваемого частного случая имеем

$$Q = Q(\theta, n) = -\left[\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right],$$

$$Q' = Q'_\theta(\theta, n) = \frac{\cos\theta}{2\sin^3\theta},$$

$$Q'' = Q''_{\theta\theta}(\theta, n) = -\frac{1+2\cos^2\theta}{2\sin^4\theta},$$

$$\delta(\theta, n, Q) = Q^{-5/2}\left[\frac{1}{8}Q''Q - \frac{5}{32}Q'^2\right] = \left(\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-5/2} \times$$

$$\times \left[\frac{(1+2\cos^2\theta)\left(1+4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\theta\right)}{64\sin^6\theta} - \frac{5}{128}\frac{\cos^2\theta}{\sin^6\theta}\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-5/2} \times$$

$$\times \frac{2 - \cos^2\theta + 8\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\theta + 16\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{128\sin^6\theta}.$$

Заметим, что $\delta(\theta, n, Q) > 0$ при $\theta \in (0, \pi)$. Формулы леммы оцениваются с помощью величины

$$\rho_1(\varepsilon, n, Q) = \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} |\delta(\theta, n, Q)| d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{128 \sin^6 \varepsilon} \left(\frac{1}{4} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-5/2} \times$$

$$\times \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left[2 - \cos^2\theta + 8\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\theta + 4\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta\right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{128 \sin^6 \varepsilon} \left(\frac{1}{4} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-5/2} \times$$

$$\times \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{3}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} + 2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 [3 - 2\cos 2\theta - \cos 4\theta]\, d\theta =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-5/2} \times$$

$$\times \frac{\frac{3}{2}(\pi - 2\varepsilon) + \frac{\sin 2\varepsilon}{2} + 2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \left(3(\pi - 2\varepsilon) + 2\sin 2\varepsilon + \frac{\sin 4\varepsilon}{2}\right)}{128 \sin^6 \varepsilon}.$$

Пользуясь несложными соотношениями

$$\frac{\sin 4\varepsilon}{2} = \sin 2\varepsilon \cos 2\varepsilon \leq \sin 2\varepsilon \text{ и } \sin 2\varepsilon \leq \pi - 2\varepsilon,$$

получим

$$\rho_1(\varepsilon, n, Q) \leq \frac{\pi - 2\varepsilon}{128 \sin^6 \varepsilon \left(n + \frac{1}{2}\right)^5} \left(2 + 12\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Решениями уравнения (3.23) согласно лемме 1.1 будут

$$u_{1,2}(n, \theta) = \frac{1}{e^{\pm\imath\frac{\pi}{4}} \sqrt[4]{|Q|}} \exp\Big(\mp\imath \int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\theta} \sqrt{|Q|} d\theta\Big)(1 + \alpha),$$

их производные

$$u'_{1,2}(n, \theta) = -e^{\pm\imath\frac{\pi}{4}} \sqrt[4]{|Q|} \exp\Big(\mp\imath \int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\theta} \sqrt{|Q|} d\theta\Big)(1 + \beta),$$

где

$$|\alpha| \le \frac{4\rho_1(\varepsilon, n, Q)}{1 - 2\rho_1(\varepsilon, n, Q)}, \tag{3.24}$$

$$|\beta| \le \frac{4\rho_1(\varepsilon, n, Q)}{1 - 2\rho_1(\varepsilon, n, Q)} + \frac{1}{4}|Q'||Q|^{-3/2} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{4\rho_1(\varepsilon, n, Q)}{1 - 2\rho_1(\varepsilon, n, Q)}\right). \tag{3.25}$$

Здесь и далее для упрощения повествования через α и β (без индексов) будут обозначаться любые остаточные члены, имеющие указанные равномерные на сегменте оценки. Оценим $|Q'||Q|^{-3/2}$:

$$|Q'||Q|^{-3/2} = \left| \frac{\cos\theta}{2\sin^3\theta} \left(\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right)^{-3/2} \right| \le$$
$$\le \frac{1}{2\sin^3\varepsilon} \left(\frac{1}{4} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right)^{-3/2} < \frac{1}{2\sin^3\varepsilon} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-3}.$$

Необходимо, чтобы выполнялось условие линейной независимости полученных решений. Тогда, взяв их соответствующие линейные комбинации их и их производных, получим асимптотические формулы для функции (3.22) и ее производной. Определитель Вронского имеет вид:

$$W = 2\imath(1 + \alpha)(1 + \beta).$$

Вместо условия $W \ne 0$ будем рассматривать более сильное

$$|\alpha + \beta + \alpha\beta| < 1. \tag{3.26}$$

которое упрощается с помощью оценок (3.24), (3.25). Положим

$$u(\theta) = C_1(n)u_1(\theta) + C_2(n)u_2(\theta). \tag{3.27}$$

Имеется система для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} C_1(n)u_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+C_2(n)u_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=P_n(0), \\ C_1(n)u_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)+C_2(n)u_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-P_n'(0). \end{cases} \tag{3.28}$$

Известно, что [8]

$$P_{2m+1}(0)=0, P_{2m}(0)=(-1)^m\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2},$$
$$P_{2m+1}'(0)=(-1)^m\frac{(2m+1)!}{(m!)^2 2^{2m}}, P_{2m}'(0)=0.$$

Далее нам потребуются следующие формулы

$$m!=\sqrt{2\pi}m^{m+1/2}e^{-m}(1+r_1(m)),\text{ где } 0<r_1(m)<e^{1/(4m)}-1, \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{1+x}=1+r_2(x), 0<x<1,\text{ где } -x<r_2(x)<0, \tag{3.30}$$

$$(1+x)^p=1+r_3(x), 0<x<1, 0<p<1,\text{ где } 0<r_3(x)<px. \tag{3.31}$$

Первая из них — формула Стирлинга [5], две другие — следствие из теоремы об оценке ряда Лейбница, примененное к соответствующим рядам Тейлора. Пользуясь ими можно получить следующие асимптотики.

$$P_{2m}(0)=(-1)^m\frac{2^{1/2}\pi^{1/2}(2m)^{2m+1/2}e^{-2m}(1+r_1(2m))}{2^{2m}\left(2^{1/2}\pi^{1/2}m^{m+1/2}e^{-m}(1+r_1(m))\right)^2}=$$
$$=\frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi m}}(1+r_1(2m))(1+r_4(m))=\frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi m}}(1+r_5(m)), \tag{3.32}$$

где

$$1-e^{1/(2m)}<-\left(2r_1(m)+r_1^2(m)\right)<r_4(m)<0,$$

$$|r_5(m)| \le \max\{|r_1(2m)|, |r_4(m)|(1+|r_1(2m)|)\} \le$$
$$\le e^{1/(8m)}(e^{1/(2m)}-1).$$

Следовательно,

$$(-1)^m P_{2m}(0)\sqrt[4]{\frac{1}{4}+\left(2m+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\sqrt[4]{\frac{1}{4}+\left(2m+\frac{1}{2}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+\varepsilon(2m)),$$
$$\text{где } |\varepsilon(2m)| \le \frac{(e^{1/(2m)}-1)}{4}\left(1+3e^{1/(8m)}+e^{5/(8m)}\right). \quad (3.33)$$

Аналогично

$$(-1)^m P'_{2m+1}(0)\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{4}+\left(2m+\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)^2}\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{4}+\left(2m+\frac{3}{2}\right)^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+\varepsilon(2m+1)),$$
$$\text{где } |\varepsilon(2m+1)| \le e^{1/(8m)}(e^{1/(2m)}-1)+$$
$$+\frac{1}{16m}\left(e^{1/(2m+1)}+3\right)\left(e^{5/(8m)}-e^{1/(8m)}+1\right), m \in \mathbb{N}. \quad (3.34)$$

Действительно, в силу (3.32)

$$\frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)^2} = \frac{2m+1}{\sqrt{\pi m}}(1+r_5(m)),$$
$$\text{где } |r_5(m)| < e^{1/(8m)}(e^{1/(2m)}-1). \quad (3.35)$$

Далее

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{4}+\left(2m+\frac{3}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \left(1 + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2(2m+1)^2}\right)^{-1/4} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m+1}}(1 + r_6(m)),$$

$$\text{где } \frac{1}{4}(1 - e^{1/(2m+1)}) < r_6(m) < 0 \quad (3.36)$$

согласно (3.30) и (3.31). Кроме того

$$\sqrt{\frac{2m+1}{2m}} = \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{1/2} = 1 + r_7(m), \text{ где } 0 < r_7(m) < \frac{1}{4m} \quad (3.37)$$

согласно (3.31). Объединяя (3.35)–(3.37), получаем (3.34).

Используя формулы Крамера для системы (3.28), получим коэффициенты $C_1(n), C_2(n)$. Подставляя их в формулу (3.27), получим (с учетом условий (1.8) и (3.26)) асимптотические формулы для многочленов Лежандра. Дифференцируя (3.27), получим формулы для их производных.

Для оценки остаточных членов поступим следующим образом. В случае $\theta \in (0, \pi/2)$ полагаем $\varepsilon = \theta$, а в случае $\theta \in (\pi/2, \pi)$ полагаем $\varepsilon = \pi - \theta$. При $\theta = \pi/2$ формулы для многочленов Лежандра сводятся к значениям этих многочленов в начале координат.

Окончательный результат сформулируем в виде теоремы.

Пусть

$$\rho_n(\theta) = \frac{|\pi - 2\theta|}{64\left(n + \frac{1}{2}\right)^5 \sin^6\theta} \left(1 + 6\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right),$$

$$\alpha_n(\theta) = \frac{4\rho_n(\theta)}{1 - 2\rho_n(\theta)},$$

$$\beta_n(\theta) = \alpha_n(\theta) + \frac{1}{8\sin^3\theta}\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-3}(1 + \alpha_n(\theta))$$

Теорема 3.3. *При условиях* $\theta \in (0, \pi), \rho_n(\theta) < 1/2, n \geq 2$ *и*

$$|\alpha_n(\theta)| + |\beta_n(\theta)| + |\alpha_n(\theta)\beta_n(\theta)| < 1$$

справедливы следующие формулы

1) $$(\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}} \times$$

$$\times \Bigg(\cos\Big[\operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\left(\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta} - |\cos\theta|}{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta} + |\cos\theta|} + \right.$$

$$\left. + \frac{2n+1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta}}{(2n+1)|\cos\theta|} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{\pi n}{2}\Big] + R_n(\theta)\Bigg)\frac{1 + \varepsilon(n)}{1 + \Phi_n(\theta)},$$

где

$$|\varepsilon(n)| \leq \begin{cases} \frac{(e^{1/(2m)} - 1)}{4}\left(1 + 3e^{1/(8m)} + e^{5/(8m)}\right) \ \text{при } n = 2m, \\ e^{1/(8m)}(e^{1/(2m)} - 1) + \frac{1}{16m}\left(e^{1/(2m+1)} + 3\right) \times \\ \times \left(e^{5/(8m)} - e^{1/(8m)} + 1\right) \ \text{при } n = 2m + 1, \end{cases}$$

$$|R_n(\theta)| \leq \begin{cases} \alpha_n(\theta) + \beta_n(\theta) + \alpha_n(\theta)\beta_n(\theta) \ \text{при } n = 2m, \\ 2\alpha_n(\theta) + \alpha_n^2(\theta) \ \text{при } n = 2m + 1, \end{cases}$$

$$|\Phi_n(\theta)| \leq \alpha_n(\theta) + \beta_n(\theta) + \alpha_n(\theta)\beta_n(\theta),$$

2) $$\left[(\sin\theta)^{1/2} P_n(\cos\theta)\right]'_\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{1}{4\sin^2\theta} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \times$$

$$\times \Bigg(-\sin\Big[\operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\left(\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta} - |\cos\theta|}{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta} + |\cos\theta|} + \right.$$

$$\left. + \frac{2n+1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 + (2n+1)^2\sin^2\theta}}{(2n+1)|\cos\theta|} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{\pi n}{2}\Big] + S_n(\theta)\Bigg)\frac{1 + \varepsilon(n)}{1 + \Phi_n(\theta)},$$

где

$$|S_n(\theta)| \leq \begin{cases} 2\beta_n(\theta) + \beta_n^2(\theta) \ \textit{при}\ n = 2m, \\ \alpha_n(\theta) + \beta_n(\theta) + \alpha_n(\theta)\beta_n(\theta) \ \textit{при}\ n = 2m+1. \end{cases}$$

4 Новый аналог формулы Планшереля–Ротаха для многочленов Чебышева–Лагерра

Еще одним важным случаем классических ортогональных многочленов являются многочлены Чебышева–Лагерра [8]

$$\widehat{L}_n(s;\alpha) = \frac{(-1)^n s^{-\alpha} e^s}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}} \left(s^{\alpha+n} e^{-s}\right)^{(n)},$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha > -1, \quad (4.1)$$

где $s \in (0, \infty)$. $\widehat{L}_n(s;\alpha)$ – многочлены, ортонормированные с весовой функцей

$$h(s) = s^\alpha e^{-s}.$$

Вспомогательная функция $w = e^{-s^2/2} s^{\alpha+1/2} \widehat{L}_n(s^2;\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [7]

$$w''_{ss} + \left(4n + 2\alpha + 2 - s^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{s^2}\right) w = 0. \quad (4.2)$$

Рассмотрим функцию $Q(s,n,\alpha) = 4n + 2\alpha + 2 - s^2 + \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{s^2}$. Заметим, что в данном случае нельзя вывести асимптотическую формулу в окрестности точки $s = 0$, как это делалось для многочленов Чебышева–Эрмита, в силу особенности функции $Q(s,n,\alpha)$ в этой точке. Исключение составляет случай $|\alpha| = 1/2$, а это как раз и есть рассмотренные ранее функции Чебышева–Эрмита. Попытаемся получить результат для полуинтервалов, содержащих ∞.

Фиксируем произвольное $\alpha > -1$. Введем вспомогательную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такую, что

$$f(\lambda) > 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\lambda = 4n + 2\alpha + 2$. Проведем в (4.2) замену переменной $x =$

$\frac{s}{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}$, $y(x,\lambda) = w(s,\lambda)$. Тогда уравнение примет вид

$$y''_{xx}(x,\lambda) - \lambda^2 f(\lambda)\Big(f(\lambda)x^2 - 1 + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{x^2\lambda^2 f(\lambda)}\Big)y(x,\lambda) = 0. \quad (4.3)$$

К этому уравнению можно применить лемму 1.2 из главы I. Необходимо проверить выполнение условий, сформулированных в лемме. Для данного случая

$$Q(x,\lambda) = \lambda^2 f(\lambda)\left(f(\lambda)x^2 - 1 + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{x^2\lambda^2 f(\lambda)}\right).$$

Будем рассматривать (4.3) на промежутке $[1,\infty)$ с условием

$$Q(x,\lambda) > 0. \quad (4.4)$$

Для выполнения (4.4) достаточно, чтобы при $n \geq 1$

$$f(\lambda) > \frac{65}{64}.$$

Условие (1.26) леммы 1.2 выполняется, если в качестве ветви корня взять главную ветвь. Имеем

$$\delta(x,\lambda,Q) = \frac{1}{\lambda f^{1/2}(\lambda)\left(f(\lambda)x^2 - 1 + \frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{x^2\lambda^2 f(\lambda)}\right)^{5/2}} \times$$
$$\times\left[-\frac{3}{8}f^2(\lambda)x^2 - \frac{1}{4}f(\lambda) + \frac{9}{4}\frac{\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)}{x^2\lambda^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{4}\frac{\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)}{x^4\lambda^2 f(\lambda)} + \frac{1}{8}\frac{\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2}{x^6\lambda^4 f^2(\lambda)}\right]. \quad (4.5)$$

Пусть $\left|\alpha^2 - \frac{1}{4}\right| \leq 1$. Тогда выражение в квадратных скобках в (4.5) строго меньше нуля. Для оценки $\rho_2(1,\lambda,Q)$ сверху можем брать только отрицательные члены в $\delta(x,\lambda,Q)$.

Рассмотрим случай $|\alpha| > 1/2$.

$$\rho_2(1,\lambda,Q) \leq \frac{1}{\lambda f^{1/2}(\lambda)} \int\limits_1^\infty \frac{1}{(f(\lambda)x^2-1)^{5/2}} \times$$
$$\times \left[\frac{3}{8}f^2(\lambda)x^2 + \frac{1}{4}f(\lambda) + \frac{3}{4}\frac{\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)}{x^4\lambda^2 f(\lambda)}\right] dx =$$
$$= \frac{1}{\lambda f^{1/2}(\lambda)} \int\limits_1^\infty \frac{\frac{3}{8}f^2(\lambda)x^2 + \frac{1}{4}f(\lambda)}{(f(\lambda)x^2-1)^{5/2}} dx +$$
$$+ \frac{3}{4\lambda^3 f^{3/2}(\lambda)} \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4(f(\lambda)x^2-1)^{5/2}}.$$

Первое слагаемое было уже разобрано при доказательстве теоремы 2.2. Оно меньше величины

$$\frac{1}{4\lambda\tilde{x}^3(\lambda)},$$

где $\tilde{x}(\lambda)$ определяется по формуле

$$\tilde{x}(\lambda) = \sqrt{1 - \frac{1}{f(\lambda)}}.$$

Заметим, что $\lambda\tilde{x}^3(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\to} \infty$. В интеграле второго слагаемого положим

$$\zeta_3 = \sqrt{f(\lambda)}x. \tag{4.6}$$

Тогда оно равно

$$\frac{3}{4\lambda^3}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) \int\limits_{\sqrt{f(\lambda)}}^\infty \frac{d\zeta_3}{\zeta_3^4(\zeta_3^2-1)^{5/2}}.$$

В данном случае мы имеем дело с биноминальным дифференциалом. Следует провести замену

$$\zeta_4 = \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta_3^2}}.$$

Второе слагаемое в оценке $\rho_2(1,\lambda,Q)$ равно

$$\frac{3}{4\lambda^3}\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\left[\frac{16}{3}+\frac{\tilde{x}^3(\lambda)}{3}-3\tilde{x}(\lambda)-\frac{3}{\tilde{x}(\lambda)}+\frac{1}{3\tilde{x}^3(\lambda)}\right].$$

Таким образом, при $|\alpha|>1/2$

$$\rho_2(1,\lambda,Q)\le\frac{1}{4\lambda\tilde{x}^3(\lambda)}+\frac{3}{4\lambda^3}\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\Big[\frac{16}{3}+\frac{\tilde{x}^3(\lambda)}{3}-3\tilde{x}(\lambda)-$$
$$-\frac{3}{\tilde{x}(\lambda)}+\frac{1}{3\tilde{x}^3(\lambda)}\Big]\le\frac{1}{4\lambda\tilde{x}^3(\lambda)}+\frac{3}{4\lambda^3}\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\Big[\frac{17}{3}+\frac{1}{3\tilde{x}^3(\lambda)}\Big]=$$
$$=\frac{1}{4\lambda\tilde{x}^3(\lambda)}+\frac{1}{4\lambda^3}\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\Big[17+\frac{1}{\tilde{x}^3(\lambda)}\Big].$$

Пусть $|\alpha|<1/2$ и $f(\lambda)\ge 65/64+\delta$, где δ – некоторое положительное число, не зависящее от λ. Используя замечание об оценке $\rho_2(1,\lambda,Q)$ сверху (см. абзац после формулы (4.5)), имеем

$$\rho_2(1,\lambda,Q)\le\frac{1}{\lambda f^{1/2}(\lambda)}\times$$
$$\times\int\limits_1^\infty\frac{1}{\left(f(\lambda)x^2-\frac{65}{64}\right)^{5/2}}\Big[\frac{3}{8}f^2(\lambda)x^2+\frac{1}{4}f(\lambda)+\frac{9}{4}\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2\lambda^2}\Big]dx=$$
$$=\frac{1}{\lambda f^{1/2}(\lambda)}\int\limits_1^\infty\frac{\frac{3}{8}f^2(\lambda)x^2+\frac{1}{4}f(\lambda)}{\left(f(\lambda)x^2-\frac{65}{64}\right)^{5/2}}dx+$$
$$+\frac{9}{4}\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^3 f^{1/2}(\lambda)}\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^2\left(f(\lambda)x^2-\frac{65}{64}\right)^{5/2}}.$$

Делая замену (4.6), получаем в первом слагаемом

$$\frac{f^{1/2}(\lambda)}{\lambda}\int\limits_1^\infty\frac{\frac{3}{8}f(\lambda)x^2+\frac{1}{4}}{\left(f(\lambda)x^2-\frac{65}{64}\right)^{5/2}}dx=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\sqrt{f(\lambda)}}^\infty\frac{\frac{3}{8}\zeta_3^2+\frac{1}{4}}{\left(\zeta_3^2-\frac{65}{64}\right)^{5/2}}d\zeta_3=$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{3}{8}\int\limits_{\sqrt{f(\lambda)}}^{\infty}\frac{d\zeta_3}{\left(\zeta_3^2-\frac{65}{64}\right)^{3/2}}+\frac{323}{512}\int\limits_{\sqrt{f(\lambda)}}^{\infty}\frac{d\zeta_3}{\left(\zeta_3^2-\frac{65}{64}\right)^{5/2}}\right]=$$

$$=\left(\text{Замена } \zeta_5=\left(1-\frac{65}{64}\zeta_3^{-2}\right)^{1/2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1024}{4225}\int\limits_{\tilde{y}(\lambda)}^{1}\frac{d\zeta_5}{\zeta_5^2}+\frac{2584}{4225}\int\limits_{\tilde{y}(\lambda)}^{1}\frac{d\zeta_5}{\zeta_5^4}\right]=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{488}{12675}-\frac{1024}{4225}\frac{1}{\tilde{y}(\lambda)}+\frac{2584}{12675}\frac{1}{\tilde{y}^3(\lambda)}\right]\le\frac{1}{12675\lambda}\left[488+\frac{2584}{\tilde{y}^3(\lambda)}\right],$$

где

$$\tilde{y}(\lambda)=\sqrt{1-\frac{65}{64f(\lambda)}}.$$

Пользуясь теми же заменами, во втором слагаемом получаем

$$\frac{9}{4}\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^3}f^{1/2}(\lambda)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{f(\lambda)x^2\left(f(\lambda)x^2-\frac{65}{64}\right)^{5/2}}=$$

$$=\frac{9}{4}\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^3}\int\limits_{\sqrt{f(\lambda)}}^{\infty}\frac{d\zeta_3}{\zeta_3^2\left(\zeta_3^2-\frac{65}{64}\right)^{5/2}}=$$

$$=\frac{9}{4}\left(\frac{64}{65}\right)^3\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^3}\int\limits_{\tilde{y}(\lambda)}^{1}\frac{(1-\zeta_5^2)^2}{\zeta_5^4}d\zeta_5=$$

$$=\frac{9}{4}\left(\frac{64}{65}\right)^3\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^3}\left[\frac{8}{3}+\frac{1}{3\tilde{y}^3(\lambda)}-\frac{2}{\tilde{y}(\lambda)}-\tilde{y}(\lambda)\right]\le$$

$$\le\frac{3}{4}\left(\frac{64}{65}\right)^3\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^3}\left[8+\frac{1}{\tilde{y}^3(\lambda)}\right].$$

Таким образом, при $|\alpha|<1/2$ имеем

$$\rho_2(1,\lambda,Q)\le\frac{1}{12675\lambda}\left[488+\frac{2584}{\tilde{y}^3(\lambda)}\right]+\frac{3}{4}\left(\frac{64}{65}\right)^3\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^3}\left[8+\frac{1}{\tilde{y}^3(\lambda)}\right].$$

Так как $f(\lambda)\ge 65/64+\delta$, то $\tilde{y}^2(\lambda)\ge\frac{64\delta}{65+64\delta}$, $\lambda\tilde{y}^3(\lambda)\underset{\lambda\to\infty}{\to}\infty$.

На основании проведенных оценок при $\alpha > -1, \left|\alpha^2 - \frac{1}{4}\right| \leq 1, \exists \lambda_0 = \lambda_0(\alpha) \forall \lambda \geq \lambda_0$:

$$\rho_2(1, \lambda, Q) < \frac{1}{2}.$$

Тогда уравнение (4.3) согласно лемме 1.2 имеет решение $y(x, \lambda)$ такое, что выполнены неравенства, фигурирующие в лемме. Имеем

$$|Q'(x,\lambda)||Q(x,\lambda)|^{-3/2} = \frac{2}{\lambda f^{1/2}(\lambda)} \frac{f(\lambda)x - \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{x^3\lambda^2 f(\lambda)}}{\left(f(\lambda)x^2 - 1 + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{x^2\lambda^2 f(\lambda)}\right)^{3/2}}. \tag{4.7}$$

Обозначая

$$A = A(\lambda, \alpha) = \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^2 f(\lambda)},$$

рассмотрим при фиксированных λ и α функцию

$$F(x) = \frac{f(\lambda)x - \frac{A}{x^3}}{\left(f(\lambda)x^2 - 1 + \frac{A}{x^2}\right)^{3/2}}, \text{ где } x \geq 1, f(\lambda) > 65/64, \lambda > 4.$$

При рассматриваемых условиях

$$F'_x(x) = \frac{-2f^2(\lambda)x^2 - f(\lambda) + 10Af(\lambda) \cdot \frac{1}{x^2} - 3A \cdot \frac{1}{x^4}}{\left(f(\lambda)x^2 - 1 + A \cdot \frac{1}{x^2}\right)^{5/2}} < 0. \tag{4.8}$$

Следовательно, функция $F(x)$ достигает максимума в крайней левой точке $x = 1$. Из (4.7) следует

$$|Q'(x,\lambda)||Q(x,\lambda)|^{-3/2} \leq \frac{2}{\lambda f^{1/2}(\lambda)} \frac{f(\lambda) - \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^2 f(\lambda)}}{\left(f(\lambda) - 1 + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^2 f(\lambda)}\right)^{3/2}}.$$

Аналогично проделанному в главе II при доказательстве теоремы 2.2

$$\sqrt[4]{Q\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda f(\lambda)}},\lambda\right)}=\sqrt[4]{\lambda f(\lambda)\left(s^2-\lambda+\frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{s^2}\right)}.$$

$$\xi\left(1,\frac{s}{\sqrt{\lambda f(\lambda)}},\lambda\right)=\int\limits_1^{\frac{s}{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}}\sqrt{\lambda^2 f(\lambda)\left(f(\lambda)t^2-1+\frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{t^2\lambda^2 f(\lambda)}\right)}dt=$$

$$=\int\limits_{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}^{s}\sqrt{\eta^2-\lambda+\frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}}d\eta,$$

откуда для решения уравнения (4.2) получаем формулу

$$w(s,\lambda)=\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda f(\lambda)\left(s^2-\lambda+\frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{s^2}\right)}}\times$$

$$\times\exp\left(-\int\limits_{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}^{s}\sqrt{\eta^2-\lambda+\frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}}d\eta\right)(1+\alpha(s,\lambda)),$$

$$\text{где } s\in[\sqrt{\lambda f(\lambda)},+\infty),\left|\alpha^2-\frac{1}{4}\right|\le 1,$$

$$|\alpha(s,\lambda)|\le\frac{4\rho_2(1,\lambda,Q)}{1-2\rho_2(1,\lambda,Q)},$$

а для ее производной

$$w'(s,\lambda)=-\sqrt[4]{\frac{s^2-\lambda+\frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{s^2}}{\lambda f(\lambda)}}\times$$

$$\times\exp\left(-\int\limits_{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}^{s}\sqrt{\eta^2-\lambda+\frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{\eta^2}}d\eta\right)(1+\beta(s,\lambda)),$$

$$\text{где } s\in[\sqrt{\lambda f(\lambda)},+\infty),\left|\alpha^2-\frac{1}{4}\right|\le 1,$$

$$|\beta(s,\lambda)| \le \frac{4\rho_2(1,\lambda,Q)}{1-2\rho_2(1,\lambda,Q)} + \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda f^{1/2}(\lambda)} \times$$

$$\times \frac{f(\lambda) - \frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{\lambda^2 f(\lambda)}}{\left(f(\lambda) - 1 + \frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{\lambda^2 f(\lambda)}\right)^{3/2}} \left(1 + \frac{4\rho_2(1,\lambda,Q)}{1-2\rho_2(1,\lambda,Q)}\right).$$

Учитывая, что функция $e^{-s^2/2}s^{\alpha+1/2}\widehat{L}_n(s^2;\alpha)$ удовлетворяет (4.2), как и при доказательстве теоремы 2.2 справедливо

$$e^{-s^2/2}s^{\alpha+1/2}\widehat{L}_n(s^2;\alpha) = C_n(\alpha)w(s,\lambda),$$

где $C_n(\alpha)$ — некоторый коэффициент, $\lambda = 4n+2\alpha+2$, $|\alpha^2-1/4| \le 1$, $\alpha^2 \ne 1/4$, $\alpha > -1$, $n \ge 1$, $s \ge \sqrt{\lambda f(\lambda)}$. Старший коэффициент многочлена $\widehat{L}_n(s^2;\alpha)$ равен [8]

$$\frac{1}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}},$$

следовательно, при фиксированных n и α справедлива формула

$$\frac{1}{C_n(\alpha)} = \lim_{s\to\infty} \frac{w(s,\lambda)\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}}{e^{-s^2/2}s^{2n+\alpha+1/2}}.$$

Чтобы найти этот предел, докажем следующее утверждение.

Обозначим

$$D = D(\lambda,\alpha) = \lambda^2 - 4\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right),$$

$$\zeta_7(t) = \zeta_7(t,\lambda,\alpha) = \sqrt{\frac{t - \frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}}{t - \frac{\lambda+\sqrt{D}}{2}}},$$

$$I(s) = I(s,\lambda,\alpha,f) = \int\limits_{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}^{s} \frac{\sqrt{\eta^4 - \lambda\eta^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)}}{\eta} d\eta,$$

$$K(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda+\sqrt{D}}{\lambda-\sqrt{D}}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}}{y+\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}}\right|, & \alpha^2-1/4>0,\\ \sqrt{\frac{\sqrt{D}+\lambda}{\sqrt{D}-\lambda}}\operatorname{arctg}\left(y\sqrt{\frac{\sqrt{D}+\lambda}{\sqrt{D}-\lambda}}\right), & \alpha^2-1/4<0.\end{cases}$$

Утверждение 4.1. *Пусть* $f(\lambda)>65/64, \lambda>4, 0<\left|\alpha^2-\frac{1}{4}\right|\leq 1, \alpha>-1$. *Тогда*

$$I(s)=\sqrt{D}\frac{\zeta_7}{2(\zeta_7^2-1)}-\frac{\lambda}{4}\ln\left|\frac{\zeta_7+1}{\zeta_7-1}\right|-\\ -\frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}K(\zeta_7)\Big|_{\zeta_7(\lambda f(\lambda))}^{\zeta_7(s^2)}, s\geq\sqrt{\lambda f(\lambda)}. \quad (4.9)$$

Доказательство.

$$\int\limits_{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}^{s}\frac{\sqrt{\eta^4-\lambda\eta^2+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)}}{\eta}d\eta=(\zeta_6=\eta^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\lambda f(\lambda)}^{s^2}\frac{\sqrt{\zeta_6^2-\lambda\zeta_6+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)}}{\zeta_6}d\zeta_6=$$

$$=\left(\zeta_7=\frac{\sqrt{\zeta_6^2-\lambda\zeta_6+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)}}{\zeta_6-\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)}}{2}}\right)=$$

$$=-D\int\limits_{\zeta_7(\lambda f(\lambda))}^{\zeta_7(s^2)}\frac{\zeta_7^2d\zeta_7}{(\zeta_7^2-1)^2\left(\zeta_7^2\frac{\lambda+\sqrt{D}}{2}-\frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}\right)}=$$

$$=(\text{ разлагая дробь на простейшие })=$$

$$= -\int\limits_{\zeta_7(\lambda f(\lambda))}^{\zeta_7(s^2)} \left[\frac{\sqrt{D}}{(\zeta_7^2 - 1)^2} - \frac{\lambda - \sqrt{D}}{2} \frac{1}{\zeta_7^2 - 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda - \sqrt{D}}{2} \frac{1}{\zeta_7^2 - \frac{\lambda - \sqrt{D}}{\lambda + \sqrt{D}}} \right] d\zeta_7.$$

Интегрирование в элементарных функциях дает результат. □

Фиксируем n. Из определения $\zeta_7(s^2)$ вытекают формулы

$$\zeta_7^2(s^2) - 1 = \frac{\sqrt{D}}{s^2} + \sqrt{D} \frac{\lambda + \sqrt{D}}{2} \frac{1}{s^4} + O\left(\frac{1}{s^6}\right),$$

$$\zeta_7(s^2) = 1 + \frac{\sqrt{D}}{2s^2} + O\left(\frac{1}{s^4}\right),$$

$$(\zeta_7(s^2) - 1)^{-\lambda/4} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2}\right)^{-\lambda/4} s^{\lambda/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right).$$

Имеем

$$\lim_{s \to \infty} \left(\sqrt{D} \frac{\zeta_7(s^2)}{2(\zeta_7^2(s^2) - 1)} - \frac{s^2}{2} \right) =$$

$$= \lim_{s \to \infty} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{D}}{2s^2} + O\left(\frac{1}{s^4}\right)}{1 + \frac{\lambda + \sqrt{D}}{2s^2} + O\left(\frac{1}{s^4}\right)} \cdot \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2} \right) = -\frac{\lambda}{4}$$

и

$$\lim_{s \to \infty} (\zeta_7(s^2) + 1)^{-\lambda/4} = 2^{-\lambda/4}.$$

Обозначим через $I_1(s)$ значение интеграла (4.9) на верхнем пределе. Получаем

$$\lim_{s \to \infty} \frac{s^{-2n - \alpha - 1/2}}{\sqrt[4]{s^2 - \lambda + \frac{\alpha^2 - 1/4}{s^2}} \exp(I_1(s) - s^2/2)} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{s^{-2n-\alpha-1}\exp\left(\frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}K(\zeta_7(s^2))\right)}{\exp\left(\sqrt{D}\frac{\zeta_7(s^2)}{2(\zeta_7^2(s^2)-1)}-\frac{s^2}{2}\right)\left(\frac{\zeta_7(s^2)+1}{\zeta_7(s^2)-1}\right)^{-\frac{\lambda}{4}}} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{s^{-2n-\alpha-1}\exp\left(\frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}K(1)\right)}{D^{\frac{\lambda}{8}}2^{-\frac{\lambda}{2}}e^{-\frac{\lambda}{4}}}s^{2n+\alpha+1} = \frac{\exp\left(\frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}K(1)\right)}{D^{\frac{\lambda}{8}}}2^{\frac{\lambda}{2}}e^{\frac{\lambda}{4}}.$$

Таким образом,

$$C_n(\alpha) = \frac{D^{\lambda/8}}{2^{\lambda/2}e^{\lambda/4}}\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda f(\lambda)}}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}}\left(\frac{\zeta_7(\lambda f(\lambda))+1}{\zeta_7(\lambda f(\lambda))-1}\right)^{\lambda/4}\times$$

$$\times\exp\Bigg(-\sqrt{D}\frac{\zeta_7(\lambda f(\lambda))}{2(\zeta_7^2(\lambda f(\lambda))-1)}+$$

$$+\frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}[K(\zeta_7(\lambda f(\lambda)))-K(1)]\Bigg)\frac{1}{1+\alpha(+\infty,\lambda)},$$

$$\text{где } \alpha(+\infty,\lambda) = \lim_{s\to+\infty}\alpha(s,\lambda).$$

Теперь можем сформулировать основной результат.

Обозначим

$$E(s,\lambda) = \begin{cases} \frac{s^3}{4\lambda(s^2-\lambda)^{3/2}} + \frac{1}{4\lambda^3}\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\left[17+\frac{s^3}{(s^2-\lambda)^{3/2}}\right] & \text{при } |\alpha| > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{12675\lambda}\left[488+\frac{2584s^3}{\left(s^2-\frac{65}{64}\lambda\right)^{3/2}}\right] + \frac{3}{4}\left(\frac{64}{65}\right)^3\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^3}\left[8+\frac{s^3}{\left(s^2-\frac{65}{64}\lambda\right)^{3/2}}\right] & \text{при } |\alpha| < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$E(+\infty,\lambda) = \lim_{s\to+\infty}E(s,\lambda),$$

$$I_1(s) = \frac{\sqrt{D}\zeta_7(s^2)}{2(\zeta_7^2(s^2)-1)} - \frac{\lambda}{4}\ln\left|\frac{\zeta_7(s^2)+1}{\zeta_7(s^2)-1}\right| - \frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}K(\zeta_7(s^2)),$$

а для функций $D = D(\lambda,\alpha)$, $\zeta_7(t) = \zeta_7(t,\lambda,\alpha)$ и $K(y)$ справедливы обозначения утверждения 4.1.

Теорема 4.1. *Если* $n \geq 1, \alpha > -1, \alpha^2 \neq \frac{1}{4}, \left|\alpha^2 - \frac{1}{4}\right| \leq 1, s^2 > \frac{65}{64}\lambda$, *где* $\lambda = 4n + 2\alpha + 2$,

$$E(s,\lambda) < \frac{1}{2},$$

то справедливы формулы

1) $e^{-s^2/2} s^{\alpha+1/2} \widehat{L}_n(s^2;\alpha) =$

$$= \frac{D^{\lambda/8}}{2^{\lambda/2} e^{\lambda/4}} \frac{1}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}} \frac{1}{\sqrt[4]{s^2 - \lambda + \frac{\alpha^2 - 1/4}{s^2}}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{\sqrt{D} - \lambda}{2} K(1)\right) \exp\left(-I_1(s)\right) \frac{1 + \alpha(s,\lambda)}{1 + \alpha(+\infty,\lambda)},$$

где

$$|\alpha(s,\lambda)| \leq \frac{4E(s,\lambda)}{1 - 2E(s,\lambda)}, |\alpha(+\infty,\lambda)| \leq \frac{4E(+\infty,\lambda)}{1 - 2E(+\infty,\lambda)},$$

2) $\left[e^{-s^2/2} s^{\alpha+1/2} \widehat{L}_n(s^2;\alpha)\right]_s' =$

$$= -\frac{D^{\lambda/8}}{2^{\lambda/2} e^{\lambda/4}} \frac{\sqrt[4]{s^2 - \lambda + \frac{\alpha^2 - 1/4}{s^2}}}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{\sqrt{D} - \lambda}{2} K(1)\right) \exp\left(-I_1(s)\right) \frac{1 + \beta(s,\lambda)}{1 + \alpha(+\infty,\lambda)},$$

где

$$|\beta(s,\lambda)| \leq \frac{4E(s,\lambda)}{1 - 2E(s,\lambda)} + \frac{1}{2s} \frac{s^2 - \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{s^2}}{\left(s^2 - \lambda + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{s^2}\right)^{3/2}} \frac{1 + 2E(s,\lambda)}{1 - 2E(s,\lambda)}.$$

Замечание 4.1. *Пользуясь формулой [8]*

$$\left[\widehat{L}_n(s;\alpha)\right]_s' = \sqrt{n} \widehat{L}_{n-1}(s;\alpha+1), \alpha > -1, n \in \mathbb{N}, \tag{4.10}$$

из теоремы 4.1 можно получить асимптотические формулы для любых α *таких, что* $\alpha > -1$ *и* $\alpha \neq -\frac{3}{2} + m$, *где* $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 4.2. *Формула [8]*

$$s\left[\widehat{L}_n(s;\alpha)\right]'_s = n\widehat{L}_n(s;\alpha) + \sqrt{(n+\alpha)n}\widehat{L}_{n-1}(s;\alpha) \tag{4.11}$$

с использованием результатов теоремы 4.1 дает новые асимптотические формулы.

Замечание 4.3. *Асимптотические формулы для исключенных случаев $\alpha = -\frac{3}{2} + m$, где $m \in \mathbb{N}$, могут быть получены с помощью результатов теорем 2.1 и 2.2, формул (4.10) и (4.11) и формул [8]*

$$\widehat{H}_{2n}(x) = \widehat{L}_n(x^2; -1/2),$$

$$\widehat{H}_{2n+1}(x) = x\widehat{L}_n(x^2; 1/2).$$

Этот случай замечателен тем, что в отличие от других параметров α здесь имеются асимптотические формулы в начале координат.

Замечание 4.4. *Допустимые значения параметра α в теореме 4.1 можно несколько расширить. Ограничение $\left|\alpha^2 - \frac{1}{4}\right| \leq 1$ здесь принято в связи с очевидностью возникающих в этом случае неравенств, которые в данном тексте приводятся на словах (см., например, неравенство (4.8)).*

В заключение главы докажем утверждение, с помощью которого можно судить об асимптотике коэффициента $K(1)$.

Утверждение 4.2. *Если $\alpha > -1, 0 < \left|\alpha^2 - \frac{1}{4}\right| \leq 1, \lambda = 4n + 2\alpha + 2, n \geq 1$, то*

1) при $\alpha^2 - \frac{1}{4} > 0$

$$K(1) = (-1)\left(1 + \tau_1(\lambda)\right), \text{ где } 0 < \tau_1(\lambda) < \frac{\lambda^2 - 2}{3(\lambda^4 - 6\lambda^2 + 2)},$$

2) при $\alpha^2 - \frac{1}{4} < 0$

$$K(1) = \frac{\pi\lambda}{2\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)^{1/2}}\left(1 + \tau_2(\lambda)\right), \ \textit{где} \ |\tau_2(\lambda)| < \frac{2\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)^{1/2}\lambda}{\pi(\lambda^2 - 1)}.$$

Доказательство. Далее воспользуемся рядами Тейлора логарифма и степенной функции

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots , \tag{4.12}$$

$$(1 + x)^\gamma = 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2!}x^2 + \frac{\gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2)}{3!}x^3 + \dots . \tag{4.13}$$

Следующие пять формул являются следствием (4.13):

$$\frac{1}{1 + x} = 1 + r_1(x), \ \text{где} \ -x < r_1(x) < 0 \ \text{при} \ x \in (0, 1), \tag{4.14}$$

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + r_2(x), \ \text{где} \ 0 < r_2(x) < x/2 \ \text{при} \ x \in (0, 1), \tag{4.15}$$

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + r_3(x), \ \text{где} \ -\frac{|x|}{2(1 - |x|)} < r_3(x) < 0 \ \text{при} \ x \in (-1, 0), \tag{4.16}$$

$$1 - (1 + x)^{1/2} = -\frac{x}{2}(1 + r_4(x)),$$
$$\text{где} \ 0 < r_4(x) < \frac{|x|}{2(1 - |x|)} \ \text{при} \ x \in (-1, 0), \tag{4.17}$$

$$(1 + x)^{1/2} - 1 = \frac{x}{2}(1 + r_5(x)), \ \text{где} \ 0 > r_5(x) > -\frac{x}{4} \ \text{при} \ x \in (0, 1). \tag{4.18}$$

Чтобы получить оценки остаточных членов в формулах (4.14), (4.15) и (4.18), следует применить к (4.13) признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда [3]. Для вывода оценок остаточных членов в формулах (4.16) и (4.17) применяется формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Рассмотрим случай $\alpha^2 - 1/4 > 0$. Имеем

$$\frac{\lambda - \sqrt{D}}{\lambda + \sqrt{D}} = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - (4\alpha^2 - 1)}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - (4\alpha^2 - 1)}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2-1}{\lambda^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2-1}{\lambda^2}}} = \\ = \frac{\frac{1}{2}\frac{4\alpha^2-1}{\lambda^2}(1+\varepsilon_1(\lambda))}{2(1+\varepsilon_2(\lambda))} = \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^2}(1+\varepsilon_3(\lambda)), \quad (4.19)$$

где из (4.17) следует оценка

$$0 < \varepsilon_1(\lambda) < \frac{\frac{4\alpha^2-1}{\lambda^2}}{2\left(1 - \frac{4\alpha^2-1}{\lambda^2}\right)} = \frac{4\alpha^2 - 1}{2(\lambda^2 - (4\alpha^2 - 1))},$$

(4.16) дает

$$-\frac{1}{4}\frac{4\alpha^2 - 1}{\lambda^2 - (4\alpha^2 - 1)} < \varepsilon_2(\lambda) < 0,$$

а

$$0 < \varepsilon_3(\lambda) = (1+\varepsilon_1(\lambda))\left(1 + \frac{|\varepsilon_2(\lambda)|}{1 - |\varepsilon_2(\lambda)|}\right) - 1 = \\ = \varepsilon_1(\lambda) + \frac{|\varepsilon_2(\lambda)|}{1 - |\varepsilon_2(\lambda)|} + \varepsilon_1(\lambda)\frac{|\varepsilon_2(\lambda)|}{1 - |\varepsilon_2(\lambda)|} \le \\ \le \frac{4\alpha^2 - 1}{2(\lambda^2 - (4\alpha^2 - 1))} + \frac{\frac{1}{4}(4\alpha^2 - 1)}{\lambda^2 - \frac{5}{4}(4\alpha^2 - 1)} + \\ + \frac{4\alpha^2 - 1}{2(\lambda^2 - (4\alpha^2 - 1))} \cdot \frac{\frac{1}{4}(4\alpha^2 - 1)}{\lambda^2 - \frac{5}{4}(4\alpha^2 - 1)} \le \\ \le \frac{2}{\lambda^2 - 4} + \frac{1}{\lambda^2 - 5} + \frac{2}{\lambda^2 - 4} \cdot \frac{1}{\lambda^2 - 5} = \frac{3}{\lambda^2 - 5}.$$

Согласно (4.15) и (4.19) имеем

$$\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}=\frac{\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^{1/2}}{\lambda}(1+\varepsilon_4(\lambda)),$$

где

$$0<\varepsilon_4(\lambda)<\frac{3}{2\lambda^2-10}.$$

Поэтому, обозначая

$$\kappa(\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}},$$

имеем

$$\ln\left(\frac{1-\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}}{1+\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}}\right)=\ln\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}\right)-\ln\left(1+\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}\right)=$$

$$=\left(-\kappa(\lambda)-\frac{\kappa^2(\lambda)}{2}-\frac{\kappa^3(\lambda)}{3}-\dots\right)-\left(\kappa(\lambda)-\frac{\kappa^2(\lambda)}{2}+\frac{\kappa^3(\lambda)}{3}-\dots\right)=$$

$$=-2\kappa(\lambda)\left(1+\frac{\kappa^2(\lambda)}{3}+\frac{\kappa^4(\lambda)}{5}+\dots\right)=-2\sqrt{\frac{\lambda-\sqrt{D}}{\lambda+\sqrt{D}}}(1+\varepsilon_5(\lambda)),$$

где, используя формулу суммы для бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем оценку

$$0<\varepsilon_5(\lambda)<\frac{1}{3}\frac{\kappa^2(\lambda)}{1-\kappa^2(\lambda)}<\frac{1}{3}\frac{\frac{\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)}{\lambda^2}\left(1+\frac{3}{\lambda^2-5}\right)}{1-\frac{\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)}{\lambda^2}\left(1+\frac{3}{\lambda^2-5}\right)}\le$$

$$\le\frac{1}{3}\frac{\frac{\lambda^2-2}{\lambda^2-5}\frac{1}{\lambda^2}}{1-\frac{\lambda^2-2}{\lambda^2-5}\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{3}\frac{\lambda^2-2}{\lambda^4-6\lambda^2+2}.$$

С помощью этой формулы из определения $K(1)$ вытекает пункт 1) утверждения.

Рассмотрим теперь случай $\alpha^2 - 1/4 < 0$.

$$\frac{\sqrt{D}+\lambda}{\sqrt{D}-\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda^2+(1-4\alpha^2)}+\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(1-4\alpha^2)}-\lambda} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1-4\alpha^2}{\lambda^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1-4\alpha^2}{\lambda^2}}-1} = \frac{2(1+\varepsilon_{10}(\lambda))}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-4\alpha^2}{\lambda^2}(1+\varepsilon_{11}(\lambda))} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\frac{1}{4}-\alpha^2}\left(1+\varepsilon_{12}(\lambda)\right), \quad (4.20)$$

где согласно формулам (4.15) и (4.18) имеем оценки

$$0 < \varepsilon_{10}(\lambda) < \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^2},$$

$$0 > \varepsilon_{11}(\lambda) > -\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^2}.$$

Аналогично тому, как была получена оценка для $\varepsilon_3(\lambda)$, выводим оценку для $\varepsilon_{12}(\lambda)$:

$$0 < \varepsilon_{12}(\lambda) < \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{\left(\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^2}\right)}{1-\left(\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^2}\right)} + \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^2}\cdot\frac{\left(\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^2}\right)}{1-\left(\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)}{\lambda^2-\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)} + \frac{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^2}{\lambda^2-\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)}\frac{1}{\lambda^2} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\left[\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2-1}+\frac{1}{\lambda^2-1}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\right] = \left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\frac{2}{\lambda^2-1}.$$

С помощью формул (4.15) и (4.20) получаем

$$\sqrt{\frac{\sqrt{D}+\lambda}{\sqrt{D}-\lambda}} = \frac{\lambda}{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^{1/2}}\left(1+\varepsilon_{13}(\lambda)\right), \quad (4.21)$$

где

$$0 < \varepsilon_{13}(\lambda) < \left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right) \frac{1}{\lambda^2 - 1}.$$

Справедливо следующее неравенство

$$x \operatorname{ctg} x < 1, \forall x \in (0, \pi). \tag{4.22}$$

Его можно вывести, используя ряды Тейлора для косинуса и синуса. Действительно,

$$x \cos x - \sin x = -\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) x^5 - \dots$$
$$\dots + \dots (-1)^n \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}\right) x^{2n+1} + \dots < 0.$$

Полагая в (4.22) $x = \operatorname{arcctg} y$, имеем

$$0 < \operatorname{arcctg} y < \frac{1}{y} \text{ при } y > 0,$$

а, так как

$$\operatorname{arcctg} y + \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} \forall y \in \mathbb{R},$$

то имеем

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \left(1 + r_6(x)\right), \text{ где } 0 > r_6(x) > -\frac{2}{\pi x}, x \in (0, +\infty).$$

Из этой формулы и (4.21) имеем

$$\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{D} + \lambda}{\sqrt{D} - \lambda}}\right) = \operatorname{arctg} \varepsilon_{14}(\lambda) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \varepsilon_{15}(\lambda)\right), \tag{4.23}$$

где

$$\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)^{1/2}} < \varepsilon_{14}(\lambda),$$

$$0 > \varepsilon_{15}(\lambda) > -\frac{2}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^{1/2}}{\lambda}.$$

Перемножая (4.21) и (4.23), получаем

$$\sqrt{\frac{\sqrt{D}+\lambda}{\sqrt{D}-\lambda}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{D}+\lambda}{\sqrt{D}-\lambda}}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^{1/2}}\left(1+\varepsilon_{13}(\lambda)\right)\frac{\pi}{2}\left(1+\varepsilon_{15}(\lambda)\right) = \frac{\pi\lambda}{2\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^{1/2}}\left(1+\varepsilon_{16}(\lambda)\right),$$

где

$$\varepsilon_{16}(\lambda) = \varepsilon_{13}(\lambda) + \varepsilon_{15}(\lambda) + \varepsilon_{13}(\lambda)\varepsilon_{15}(\lambda).$$

Учитывая, что $\varepsilon_{13}(\lambda) > 0$, $\varepsilon_{15}(\lambda) < 0$, можем записать такое неравенство:

$$|\varepsilon_{16}(\lambda)| \leq \max\left\{|\varepsilon_{15}(\lambda)| + |\varepsilon_{13}(\lambda)\varepsilon_{15}(\lambda)|, |\varepsilon_{13}(\lambda)|\right\}.$$

Из этого неравенства и того, что

$$\frac{2}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^{1/2}}{\lambda} > \left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\frac{1}{\lambda^2-1} \quad \forall\lambda > 4, \tag{4.24}$$

получим вторую часть утверждения.

Утверждение 4.2 доказано полностью. □

5 Весовые оценки для многочленов Чебышева–Эрмита и Чебышева–Лагерра

Эта глава посвящена решению трех задач [20], о которых говорится в заключительной части Введения.

Пусть даны последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$. Пишем

$$a_n \sim b_n,$$

если

$$a_n = b_n(1 + o(1)) \text{ (при } n \to +\infty \text{).}$$

Назовем последовательность $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $B_n \in \mathbb{R}$, $B_n \geq 0$, *допустимой*, если $\exists C_1 = C_1(\alpha), \alpha \geq -1/2$:

$$x^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x/2}\, |\widehat{L}_n(x;\alpha)| \leq \frac{C_1}{n^{1/4}},\ x \in [0, B_n],\ n \in \mathbb{N}.$$

Из результата теоремы 4 Введения и формулы для функции Эйри [13, 12]

$$\mathrm{Ai}(-z) = \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \left[\cos\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right], z > 0, z \to \infty,$$

выводится следующая асимптотическая формула [16]:

$$x^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x/2}\, \widehat{L}_n(x;\alpha) =$$
$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (N - x)^{-1/4} \Big(\cos\Big(\frac{N(2\theta - \sin 2\theta) - \pi}{4}\Big) + R_n(x;\alpha)\Big), \quad (5.1)$$

где $\alpha > -1, N = 4n + 2\alpha + 2$, $\theta = \arccos(x^{1/2} N^{-1/2})$, а для остаточного члена справедливы формулы

$$R_n(x;\alpha) = O\Big(\frac{N^{1/4}\, x^{1/4}}{(N - x)^{3/2}} + \frac{(N - x)^{1/4}}{N^{3/4}\, x^{1/2}}\Big) \text{ при } \alpha \geq 0, \qquad (5.2)$$

и

$$R_n(x;\alpha) = O\Big(\frac{N^{3/4}}{(N-x)^{3/2}\, x^{1/4}} + \frac{(N-x)^{1/4}}{N^{1/4}\, x}\Big) \text{ при } -1 < \alpha < 0, \tag{5.3}$$

обе справедливые при $0 < x \le N-4$.

Заметим, что выражение (5.2) для остаточного члена $R_n(x;\alpha)$ при $\alpha \ge 0$ отличается от выражения (5.3) для остаточного члена $R_n(x;\alpha)$ при $-1 < \alpha < 0$ множителем $\frac{N^{1/2}}{x^{1/2}}$. Таким образом, оценку (5.3) можно рассматривать при любом $\alpha > -1$ в указанной области определения.

Лемма 5.1. *Пусть $\tau \in (0,1)$. Последовательность*

$$B_n = \tau\, N, \ \textit{где } N = 4n + 2\alpha + 2, \tag{5.4}$$

является допустимой.

Доказательство. В силу ранее полученных результатов последовательность $\{B'_n\}_{n\in\mathbb{N}}, B'_n = 1\,\forall n \in \mathbb{N}$, допустима (это следует из результатов параграфа 3 главы VI книги [8]; см. также статью [20]). Теперь оценим функцию $x^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x/2}\, \widehat{L}_n(x;\alpha)$ на отрезке $[1, B_n]$.

Имеем:

$$\frac{N^{3/4}}{(N-B_n)^{3/2}} + \frac{(N-B_n)^{1/4}}{N^{1/4}} \sim (1-\tau)^{1/4},$$

откуда

$$|R_n(x;\alpha)| \le (1-\tau)^{1/4}(1+o(1)) \text{ при } x \in [1, B_n], \alpha \ge -1/2.$$

Следовательно, используя асимптотическую формулу (5.1), получаем:

$$\sup_{x\in[1,B_n]} x^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x/2}\, |\widehat{L}_n(x;\alpha)| \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{N^{1/4}\,(1-\tau)^{1/4}} \Big(1 + (1-\tau)^{1/4}(1+o(1))\Big) \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{2}{n^{1/4}\,(1-\tau)^{1/4}}\,(1+o(1))(\text{при } n \to +\infty),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 5.2. *Пусть* $\alpha > -1$, $g(n)$*– некоторая вещественнозначная функция такая, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = 0, g(n) \ge -1,$

$$B_n = N\,(1+g(n)), \text{ где } N = 4n + 2\alpha + 2.$$

Тогда $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in [0, B_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$*:*

$$x_n^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x_n/2}\, |\widehat{L}_n(x_n;\alpha)| n^{1/4} \to +\infty \quad \text{при } n \to +\infty. \tag{5.5}$$

Доказательство. Допустим сначала, что

$$-\frac{1}{2} < g(n) < 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5.6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |g(n)|\, n^{2/3} = +\infty, \tag{5.7}$$

$$|g(n)| \ge \frac{4}{N},\ n \ge 3. \tag{5.8}$$

Построим последовательность

$$x_n = N(1+\alpha_n g(n)),$$

где $\alpha_n \in [1,2], \alpha_n$ пока не определено, и пусть

$$\theta_n = \arccos(x_n^{1/2} N^{-1/2}).$$

Из определения следует, что $x_n \in (0, B_n]$.
Так как $1 + \alpha_n g(n) \sim 1$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 0. \tag{5.9}$$

Обозначим

$$F(N,\theta)=\frac{N(2\theta-\sin 2\theta)-\pi}{4}.$$

Используя формулу Тейлора для синуса

$$\sin 2\theta = 2\theta - \frac{(2\theta)^3}{3!} + O(\theta^5),\ (\theta\to 0),$$

получаем

$$F(N,\theta) = -\frac{\pi}{4} + N\left(\frac{\theta^3}{3} + O(\theta^5)\right),\ (\theta\to 0). \tag{5.10}$$

Пользуясь соотношением

$$\arccos y = \arcsin\sqrt{1-y^2},$$

справедливым при $y\in[0,1]$, получаем, что

$$\arccos\sqrt{(1+g(n))} = \arcsin\sqrt{-g(n)} \sim \sqrt{-g(n)},$$

где эквивалентность справедлива в силу условия $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = 0$. Аналогично

$$\arccos\sqrt{1+2g(n)} \sim \sqrt{-2g(n)}.$$

Пользуясь асимптотическим разложением (5.10), получаем:

$$\begin{gathered}F(N,\arccos\sqrt{1+2g(n)}) - F(N,\arccos\sqrt{1+g(n)}) = \\ = \frac{N}{3}\Big((-2g(n))^{3/2} - (-g(n))^{3/2}\Big)(1+o(1)) + \\ + O\left(N(-g(n))^{5/2}\right) = \frac{N}{3}(2^{3/2}-1)(-g(n))^{3/2}(1+o(1)), \\ (n\to+\infty).\end{gathered} \tag{5.11}$$

Из условия (5.7) вытекает, что

$$\lim_{n\to+\infty} N(-g(n))^{3/2} = +\infty,$$

откуда следует, что главный член асимптотики (5.11) стремится к $+\infty$, а, значит, и все выражение стремится к $+\infty$ при $n \to +\infty$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$:

$$|F(N, \arccos\sqrt{1+2g(n)}) - F(N, \arccos\sqrt{1+g(n)})| > 2\pi.$$

В силу непрерывности функции $F(N, \arccos\sqrt{1+tg(n)})$ по переменной $t \in [1,2]$ при фиксированном параметре n, где $n \geq n_0$, пользуясь теоремой Больцано о промежуточных значениях, получаем, что $\exists \alpha_n \in [1,2]$ и $\exists h_n \in \mathbb{Z}$:

$$F(N, \arccos\sqrt{1+\alpha_n g(n)}) = 2\pi h_n + \frac{\pi}{4},$$

Положим $\alpha_n = 1$ при $n = 1, ..., n_0 - 1$.

Теперь, когда последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ определена полностью, докажем выполнимость условия (5.5). В силу условия (5.8) можем воспользоваться асимптотической формулой (5.1) на промежутке $(0, B_n]$ при $n \geq 3$, предварительно переписав ее в виде:

$$\begin{aligned}(N\cos^2\theta)^{\alpha/2+1/4}\, e^{-N\cos^2\theta/2}\, \widehat{L}_n(N\cos^2\theta;\alpha) = \\ = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{N^{1/4}\sin^{1/2}\theta}\Bigg(\cos F(N,\theta) + \\ + O\left(\frac{N^{3/4}}{N^{3/2+1/4}\sin^3\theta\cos^{1/2}\theta} + \frac{N^{1/4}\sin^{1/2}\theta}{N^{5/4}\cos^2\theta}\right)\Bigg) = \\ = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{N^{1/4}\sin^{1/2}\theta}\Bigg(\cos F(N,\theta) + \\ + O\left(\frac{1}{N\sin^3\theta\cos^{1/2}\theta} + \frac{\sin^{1/2}\theta}{N\cos^2\theta}\right)\Bigg), n \geq 3. \quad (5.12)\end{aligned}$$

Заметим, что в силу (5.9)

$$\cos\theta_n \sim 1$$

и

$$\sin\theta_n \sim \theta_n = \arccos\sqrt{1+\alpha_n g(n)} \sim \sqrt{-\alpha_n g(n)},$$

откуда

$$N \sin^3 \theta_n \cos^{1/2} \theta_n \sim N\theta_n^3 \sim 4n(-\alpha_n g(n))^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

в силу условия (5.7). Подставляя в асимптотическую формулу (5.12) последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, получаем:

$$x_n^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x_n/2}\, \widehat{L}_n(x_n;\alpha) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{N^{1/4}\sin^{1/2}\theta_n} \cos F(N,\theta_n) \sim$$
$$\sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2^{1/2} n^{1/4}(-\alpha_n g(n))^{1/4}} \cos\left(2\pi h_n + \frac{\pi}{4}\right) \sim$$
$$\sim \frac{1}{\pi^{1/2}\alpha_n^{1/4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{(-g(n))^{1/4} n^{1/4}},$$

откуда следует (5.5) для функции $g(n)$, удовлетворяющей условиям (5.6)–(5.8).

Возьмем теперь произвольную вещественнозначную функцию $g(n)$ такую, что

$$\lim_{n\to+\infty} g(n) = 0.$$

Тогда

$$\exists n_0' \; \forall n \geq n_0' \;:\; |g(n)| + \frac{4}{N^{1/2}} < \frac{1}{2}.$$

Функция

$$\tilde{g}(n) = \begin{cases} -|g(n)| - \frac{4}{N^{1/2}} & \text{при } n \geq n_0', \\ -\frac{1}{3} & \text{при } 1 \leq n < n_0' \end{cases}$$

удовлетворяет условиям (5.6)–(5.8) (с заменой функции $g(n)$ на функцию $\tilde{g}(n)$) и $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{g}(n) = 0$. Отметим, что $-1 < \tilde{g}(n) < g(n)$ $\forall n \geq n_0'$ и в силу доказанного $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$x_n \in [0, N(1+\tilde{g}(n))] \subseteq [0, N(1+g(n))] \text{ при } n \geq n_0',$$

так что выполнено (5.5). Тем самым, лемма доказана полностью. $\square$

Замечание 5.1. *Заменив в формулировке леммы 5.2 условие*

$$\lim_{n\to+\infty} g(n) = 0$$

на условие

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} g(n) = 0,$$

можно указать такую последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ *и* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$,
$x_{n_k} \in [0, B_{n_k}]$, *что*

$$x_{n_k}^{\alpha/2+1/4} e^{-x_{n_k}/2} |\widehat{L}_n(x_{n_k};\alpha)| n_k^{1/4} \to +\infty \quad \text{\textit{при} } k \to +\infty.$$

Теорема 5.1. *Последовательность* $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *допустима тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{B_n}{N} < 1, \text{ \textit{где} } N = 4n + 2\alpha + 2. \tag{5.13}$$

Доказательство. Необходимость.

Допустим, что $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{B_n}{N} \geq 1$. Положим

$$\widetilde{B}_n = \begin{cases} N, & \text{если } B_n \geq N, \\ B_n, & \text{если } B_n < N. \end{cases}$$

Тогда $[0, \widetilde{B}_n] \subseteq [0, B_n]$ и $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{\widetilde{B}_n}{N} = 1$. В силу замечания 5.1 $\exists\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $x_{n_k} \in [0, \widetilde{B}_{n_k}]$:

$$x_{n_k}^{\alpha/2+1/4} e^{-x_{n_k}/2} |\widehat{L}_n(x_{n_k};\alpha)| n_k^{1/4} \to +\infty \text{ при } k \to +\infty. \tag{5.14}$$

Допуская, что $\exists C_2 = const$:

$$x^{\alpha/2+1/4} e^{-x/2} |\widehat{L}_n(x;\alpha)| n^{1/4} \leq C_2 \;\forall x \in [0, B_n] \;\forall n \in \mathbb{N},$$

приходим к противоречию с (5.14).

Достаточность.

Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{B_n}{N} < 1$. Тогда для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$ $\exists m$ $\forall n \geq m$:

$$B_n < (1-\varepsilon)N. \qquad (5.15)$$

При фиксированном n функция $x^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x/2}\, \widehat{L}_n(x;\alpha), \alpha \geq -1/2, n \in \mathbb{N}$, ограничена на $\mathbb{R}$, следовательно, при фиксированном $\alpha \geq -1/2$ все такие функции от $n = 1$ до $n = m-1$ можно ограничить в совокупности одной константой, т.е. $\exists C_3 = const$:

$$x^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x/2}\, |\widehat{L}_n(x;\alpha)| \leq C_3 \;\forall x \in \mathbb{R},\; n = 1, ..., m-1. \qquad (5.16)$$

Так как последовательность $\big\{(1-\varepsilon)N\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ является допустимой согласно лемме 5.1, то, отмечая неравенство (5.15), получаем, что $\exists C_4 = const$:

$$x^{\alpha/2+1/4}\, e^{-x/2}\, |\widehat{L}_n(x;\alpha)| \leq \frac{C_4}{n^{1/4}} \;\forall x \in [0, B_n],\; n \geq m. \qquad (5.17)$$

Из (5.16) и (5.17) следует допустимость последовательности $\big\{B_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Замечание 5.2. *Условие (5.13) эквивалентно условию*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{B_n}{n} < 4.$$

Стандартизованные многочлены Чебышева-Эрмита выражаются через стандартизованные многочлены Чебышева-Лагерра по формулам [8], [7]

$$H_{2n}(x) = (-1)^n n! 2^{2n} L_n(x^2; -1/2),$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n n! 2^{2n+1} x L_n(x^2; 1/2).$$

Эти равенства можно переписать для ортонормированных многочленов, используя формулы [8]

$$\widehat{H}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}} H_n(x), n \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{L}_n(x;\alpha) = (-1)^n \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}} L_n(x;\alpha), \alpha > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Получаем

$$\widehat{H}_{2n}(x) = \widehat{L}_n(x^2; -1/2), \tag{5.18}$$

$$\widehat{H}_{2n+1}(x) = x\widehat{L}_n(x^2; 1/2). \tag{5.19}$$

Домножая обе части каждого из равенств на $e^{-x^2/2}$, выводим следствие из критерия допустимости

Следствие 5.1.

$$\sup_{x\in[-A_n,A_n]} e^{-x^2/2}\widehat{H}_n(x) = O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) \tag{5.20}$$

тогда и только тогда, когда

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{A_n^2}{\left[\frac{n}{2}\right]} < 4,$$

где $[\ ]$*– знак целой части, или, что эквивалентно,*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{A_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{2}.$$

Теорема 5.1 и следствие 5.1 полностью решают задачи 1 и 3, сформулированные в заключительной части Введения (см. также [20]).

Ответом на задачу 2 из Введения является следующая теорема.

Теорема 5.2.

$$e^{-s^2/2}\frac{\left|\widehat{H}_n(s)\right|}{1+|s|^\omega} = O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) \ \textit{равномерно по } s \in \mathbb{R} \tag{5.21}$$

тогда и только тогда, когда

$$\omega \geq \frac{1}{3}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $s \geq 0$ в силу четности функции $\left|\widehat{H}_n(s)\right|$ [8].

Необходимость.

Допустим, что для некоторого $\omega > 0 \exists C_5 = C_5(\omega)$ такое, что

$$e^{-s^2/2} \frac{\left|\widehat{H}_n(s)\right|}{1 + |s|^\omega} \leq \frac{C_5}{n^{1/4}}, s \geq 0. \tag{5.22}$$

Возьмем произвольное $l \in (0, 2/3)$. Тогда $\exists n_0 = n_0(l) \forall n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n^l} < \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{n^l} \geq \frac{4}{4n+1}.$$

Полагая в лемме 5.2

$$g(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n^l}, & \text{где } n \geq n_0, \\ -\frac{1}{3}, & \text{где } 1 \leq n \leq n_0 - 1, \end{cases}$$

строим последовательности неотрицательных чисел $\{r_n\}$, $\{t_n\}$ такие, что $r_n \sim 4n+1, t_n \sim 4n+3$,

$$e^{-r_n/2} \widehat{L}_n \left(r_n; -\frac{1}{2}\right) \sim \frac{\sqrt{2}}{2\pi^{1/2} \alpha_n^{1/4}} n^{l/4 - 1/4}, \text{ где } \alpha_n \in [1, 2],$$

$$t_n^{1/2} e^{-t_n/2} \widehat{L}_n \left(t_n; \frac{1}{2}\right) \sim \frac{\sqrt{2}}{2\pi^{1/2} \beta_n^{1/4}} n^{l/4 - 1/4}, \text{ где } \beta_n \in [1, 2].$$

Такие последовательности можно построить, если использовать рассуждения, приведенные в начале доказательства леммы 5.2. Далее определим новые последовательности $\{s_n\}$, $\{\gamma_n\}$ по формулам

$$s_{2n} = \sqrt{r_n}, s_{2n+1} = \sqrt{t_n}, \gamma_{2n} = \alpha_n, \gamma_{2n+1} = \beta_n.$$

В силу (5.18) и (5.19) имеем

$$e^{-s_n^2/2} \widehat{H}_n(s_n) \sim \frac{\sqrt{2}}{2\pi^{1/2} \gamma_n^{1/4}} \left(\frac{n}{2}\right)^{l/4 - 1/4}, \text{ где } \gamma_n \in [1, 2],$$

$s_{2m} \sim \sqrt{4m+1}$, $s_{2m+1} \sim \sqrt{4m+3}$, откуда следует, что

$$s_n \sim \sqrt{2n+1} \sim 2\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2}$$

и

$$e^{-s_n^2/2}\frac{\widehat{H}_n(s_n)}{1+|s_n|^{\omega}} \sim \frac{1}{\pi^{1/2}\gamma_n^{1/4}2^{1/2+\omega}}\left(\frac{n}{2}\right)^{l/4-1/4-\omega/2}.$$

Для того, чтобы было выполнено (5.22), необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{l}{4}-\frac{\omega}{2} \le 0$$

или

$$\omega \ge \frac{l}{2}.$$

По условию $l \in (0, 2/3)$, т.е. мы можем выбрать $l = 2/3 - \delta$, где $\delta > 0$, δ сколь угодно мало. Следовательно,

$$\omega \ge \frac{1}{3}-\frac{\delta}{2}.$$

При $\delta \to 0$ получаем требуемое неравенство.

Достаточность.

Пусть $\omega \ge 1/3$. Из теорем 3 и 5, сформулированных во Введении, для ортонормированных многочленов Чебышева–Эрмита получаются оценки [10]

$$e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) = O\left(\frac{1}{n^{1/12}}\right), s \ge 0, \tag{5.23}$$

$$e^{-s^2/2}\widehat{H}_n(s) = O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right), 0 \le s \le \frac{1}{2}(2n+1)^{1/2}. \tag{5.24}$$

Эти же формулы можно вывести с помощью теоремы 2 Введения и теорем 2.1 и 2.2. Тогда из (5.23) следует, что $\exists C_6$:

$$e^{-s^2/2}\frac{\left|\widehat{H}_n(s)\right|}{1+|s|^{\omega}} \le \frac{C_6}{n^{1/12+\omega/2}} \le \frac{C_6}{n^{1/4}}, s > \frac{1}{2}(2n+1)^{1/2},$$

а из (5.24) следует, что $\exists C_7$:

$$e^{-s^2/2}\frac{\left|\widehat{H}_n(s)\right|}{1+|s|^{\omega}} \leq \frac{C_7}{n^{1/4}}, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}(2n+1)^{1/2}.$$

Эти оценки доказывают достаточность условия теоремы. $\square$

Заключение

В данной работе на примере классических ортогональных многочленов рассмотрен один из возможных способов применения принципа сжимающих отображений в теории специальных функций. Оказалось возможным получение формул Планшереля–Ротаха для многочленов Чебышева–Эрмита и новых асимптотических формул для классических ортогональных многочленов. Кроме того, эти формулы даны с численными оценками на остаточные члены, что обуславливает их вычислительную ценность.

Работа может быть продолжена в следующих направлениях:

1) Применение метода к другим специальным функциям.

2) Рассмотрение второго шага метода последовательных приближений.

3) Применение полученных формул для оценок коэффициентов рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам.

4) Уточнение оценок в лемме М.В. Федорюка.

5) Улучшение оценок остаточных членов полученных асимптотических формул (например, с помощью применения более точных оценок остаточных членов в рядах Тейлора элементарных функций или в формуле Стирлинга [18]).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Павлу Кондратьевичу Суетину за полезные замечания и создание благоприятной научной атмосферы в процессе работы.

Библиографический список использованной литературы

[1] Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.

[2] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.

[3] Камынин Л.И. Курс математического анализа. Том 2. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 624 с.

[4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 3-е изд. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

[5] Никольский С.М. Курс математического анализа. Том 1. – М.: Наука, 1973. – 432 с.

[6] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МГУ, 1984.

[7] Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

[8] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979.

[9] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

[10] Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series// Amer. J. Math. – 1965. – Vol. 87. – Pp. 695–708.

[11] Erdelyi A. Asymptotic forms for Laguerre polynomials// J. Indian Math. Soc. – 1960. – Vol. 24. – Pp. 235–250.

[12] Erdelyi A. Asymptotic solutions of differential equations with transition points or singularities// Journal of Math. Phys. – 1960. – Vol. 1. – N 1. – Pp. 16–26.

[13] Jeffreys H., Jeffreys B. Methods of mathematical physics. – 3d ed. – Cambridge, Univ.press, 1972. – 718 p.

[14] Igashov S.Yu. Asymptotic approximation and weight estimate for the Laguerre polynomials// Integral Transforms and Special Functions. – 1999. – Vol. 8. – N 3-4. – Pp. 209-216.

[15] Moecklin E. Asymptotische Entwicklungen der Laguerreschen Polynome// Commentarii Math. Helvetici. – 1934. – Vol. 7. – Pp. 24-46.

[16] Muckenhoupt B. Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I// Trans. Amer. Math. Soc. – feb. 1970. – Vol. 147. – Pp. 419-431.

[17] Plancherel M., Rotach W. Sur. les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$// Commentarii Math. Helvetici. – 1929. – Vol. 1. – Pp. 227-254.

[18] Reinhard M. On Stirling's formula. – Amer. Math. Mon. – 2002. – Vol. 109. – N 4. – Pp. 388–390.

[19] Scovgaard H. Asymptotic forms of Hermite polynomials// Technical Report 18, Contract Nonr-220(11). – Department of Mathematics, California Institute of Technology. – 1959.

[20] Suetin P.K. The weight estimates for classical orthogonal polynomials// Integral Transforms and Special Functions. – 1994. – Vol. 2. – N. 3. – Pp. 239-242.

[21] Ларионччиков Р.С. Весовая оценка многочленов Чебышева–Лагерра на расширяющихся сегментах// Микроэлектроника

и информатика – 2001. Восьмая всероссийская межвузовская науно–техническая конференция студентов и аспирантов. – М.: МИЭТ, 2001. – С. 145.

[22] Лариончиков Р.С. Об одной новой асимптотической формуле для многочленов Якоби// Труды XXIII Конференции молодых ученых механико–математического факультета МГУ (9–14 апреля 2001 г.) – М.: Мех.–мат. МГУ, 2001. – С. 229–232.

[23] Лариончиков Р.С. Аналог формулы Планшереля-Ротаха для производных функций Чебышева-Эрмита// X международная конференция "Математика.Экономика.Образование". II международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тезисы докладов. – Ростов–на–Дону: СИВ, 2002. – С. 33.

[24] Лариончиков Р.С. Формула Планшереля-Ротаха для функций Чебышева-Эрмита на сужающихся к бесконечности полуинтервалах// Математические заметки. – 2002. – Том 72. – Вып. 1. – С. 74-83.

[25] Лариончиков Р.С. Асимптотическая формула для многочленов Лежандра// Материалы X Международной научной коференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", 15-18 апреля 2003 г. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – С. 305.

[26] Лариончиков Р.С. Формула Планшереля–Ротаха в области, содержащей начало координат, и ее аналог для производных функций Чебышева–Эрмита// Математические заметки. – 2004. –

[27] Лариончиков Р.С. Новый аналог формулы Планшереля–Ротаха для многочленов Чебышева–Лагерра// Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. – 2004. – Том 4. – N 1. – С. 32-41.