

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

ДВОРНИКОВ МАКСИМ СЕРГЕЕВИЧ

МАССИВНОЕ НЕЙТРИНО ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

01.04.02 - теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ

доктор физико-математических наук,
профессор

А.И.СТУДЕНИКИН

МОСКВА — 2004

Оглавление

1	Введение	4
1.1	История исследования осцилляций нейтрино	4
1.2	Экспериментальное изучение солнечных нейтрино	6
1.3	Экспериментальное изучение атмосферных нейтрино	12
1.4	Реакторные эксперименты	13
1.5	Современные кинематические ограничения на «массы» флейворных нейтрино	15
1.5.1	Эксперименты по изучению β -распада и измерение мас- сы нейтрино	15
1.5.2	Ограничение на массы мюонного и τ -лептонного ней- трино	17
1.6	Основы феноменологической теории массы и смешивания ней- трино	18
1.7	Осцилляции нейтрино	19
1.8	Электромагнитные характеристики нейтрино	22
1.9	Основные результаты диссертации	25
2	Электромагнитные формфакторы массивного нейтрино	28
2.1	Вершинная функция нейтрино	32
2.1.1	Структура электромагнитной вершинной функции мас- сивного нейтрино	42

2.1.2	Исследование расходимостей в электромагнитной вершинной функции нейтрино	47
2.2	Зарядовый формфактор нейтрино	48
2.2.1	Исследование зарядового формфактора при нулевой передаче импульса	51
2.2.2	Вычисление в калибровке 'т Хофта-Фейнмана	58
2.3	Магнитный формфактор нейтрино	59
2.3.1	Исследование асимптотического поведения магнитного формфактора	60
2.3.2	Магнитный момент нейтрино	62
2.4	Анапольный формфактор нейтрино	69
2.4.1	Анапольный момент	71
3	Эволюция спина нейтрино в произвольных внешних полях	75
4	Релаксация спина нейтрино в веществе со стохастическими характеристиками	86
5	Осцилляции нейтрино в электромагнитных полях различной конфигурации	93
5.1	Осцилляции нейтрино в поле линейно поляризованной электромагнитной волны	97
5.2	Параметрический резонанс при осцилляциях нейтрино в периодически меняющихся электромагнитных полях	104
5.2.1	Осцилляции нейтрино в поле электромагнитной волны	105
5.2.2	Осцилляции нейтрино в поле плоского ондулятора	110
5.2.3	Возможные применения явления параметрического резонанса при осцилляциях нейтрино	114
6	Заключение	117

А Правила Фейнмана	123
В Фейнмановские интегралы	128

Глава 1

Введение

1.1 История исследования осцилляций нейтрино

Первоначально идея об осцилляциях нейтрино была выдвинута выдающимся советским физиком Б. Понтекорво в 1957 г. [1]. Данная работа последовала за серией публикаций, посвященных фундаментальным вопросам слабых взаимодействий, таких как открытие нарушения пространственной четности в β -распаде [2] и теории двухкомпонентного безмассового нейтрино [3–5]. Современное изложение феноменологической теории электро-слабых взаимодействий приведено в книге [6]. В работе [1] Б. Понтекорво впервые предположил, по аналогии с довольно хорошо известными в то время осцилляциями K мезонов ($K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$), что возможны также и переходы между нейтрино и антинейтрино в вакууме. Необходимо отметить, что к моменту опубликования статьи [1], электронное антинейтрино еще не было обнаружено в эксперименте. Детектирование электронного антинейтрино произошло при проведении реакторного эксперимента [7], в котором электронное антинейтрино было зарегистрировано в результате обратного β -распада.

Окончательно идея об осцилляциях между нейтрино и антинейтрино была сформулирована Б. Понтекорво в 1958 г. в работе [8]. В этой статье было отмечено, что в данном типе осцилляции нейтрино не сохраняется

лептонное число. Следует упомянуть, что в своей статье [8] Б. Понтекорво рассматривал осцилляции нейтрино не только с чисто теоретической точки зрения, но также и предложил возможный эксперимент по изучения данного явления в лабораторных условиях. Однако, как это также было отмечено и самим автором, длина осцилляций, т.е. характерное расстояние, пойдя которое, значительная часть первоначально испущенных антинейтрино перейдет в нейтрино, должна быть большой. Таким образом, подобный эксперимент вряд ли мог быть осуществлен в то время.

Б. Понтекорво вернулся к рассмотрению осцилляций нейтрино в 1967 г. В его работе [9] были сформулированы критерии возможности возникновения осцилляций нейтрино, которые, по современной терминологии, эквивалентны наличию недиагональных элементов в массовой матрице нейтрино. Наряду с осцилляциями нейтрино, принадлежащими к различным поколениям, в этой статье обсуждались также и осцилляции между активными и стерильными нейтрино. В работе [9] высказывалось предположение о возможности осцилляций нейтрино испущенных в недрах Солнца в результате протекающих там термоядерных реакций. Как следствие подобных осцилляций, поток нейтрино, регистрируемый на поверхности Земли, должен быть меньше ожидаемого. Таким образом, можно утверждать, что в статье [9] Б. Понтекорво предугадал хорошо известную теперь проблему солнечных нейтрино. Отметим, что работа [9] была опубликована еще до того, как были получены окончательные результаты по регистрации солнечных нейтрино.

В работе [10] В. Н. Грибов и Б. Понтекорво рассмотрели майрановскую массовую матрицу. В данном случае два майрановских нейтрино имеют определенные массы и связаны с нейтрино, участвующими в слабых взаимодействиях, посредством смешивания. Выражение для вероятности того, что электронное нейтрино останется в прежнем состоянии с течением времени, было получено в статье [10]. Также в данной работе были рас-

смотрены вакуумные осцилляции солнечных нейтрино. Аналогия между кварковым и лептонным секторами была проведена в работах [11, 12], в которых нейтринные осцилляции рассматривались на основе смешивания между двумя дираковскими нейтрино. По аналогии с кварками и лептонами осцилляции солнечных нейтрино в случае дираковской и майорановской массовой матрицы также обсуждались в работе [13].

Необходимо отметить, что смешивание между нейтринными состояниями, принадлежащими к различным поколениям, рассматривалось в работе [14]. В данной статье предполагалось, что существуют состояния нейтрино (определенные как истинные нейтрино) отличные от состояний, участвующих в слабых взаимодействиях, которые были названы слабыми нейтрино. Было также показано, что истинные и слабые состояния нейтрино связаны друг с другом с помощью ортогонального преобразования. Однако, осцилляции нейтрино, как явление, основанное на временной эволюции квантовой системы со смешиванием, в работе [14] не обсуждались.

1.2 Экспериментальное изучение солнечных нейтрино

Возможность регистрировать солнечные нейтрино начала интенсивно обсуждаться после того, как в 1958 г. было экспериментально обнаружено (см. работу [15]), что вероятность рождения изотопа ${}^7\text{Be}$ в термоядерной реакции ${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$ оказалась более чем в тысячу раз выше, чем предполагалось ранее. Используя этот результат, В. Фаулер и А. Камерон предположили [15], что изотоп ${}^8\text{B}$ может возникать при протекании реакции ${}^7\text{Be} + p \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$ в количествах, достаточных для генерации существенного потока нейтрино, образующихся в результате β -распада радиоактивного ${}^8\text{B}$. Несмотря на то, что ${}^8\text{B}$ нейтрино составляют лишь 10^{-2} от общего потока солнечных нейтрино, распад радиоактивного ${}^8\text{B}$ является крайне важным. На сегодняшний день крайне сложно эксперимен-

тально зарегистрировать нейтрино, обладающих малой энергией. Например, моноэнергетические ${}^7\text{Be}$ нейтрино, образующиеся в результате реакции $e^- + {}^7\text{Be} \rightarrow \nu_e + {}^7\text{Li}$, обладают энергией 0.86 МэВ, а ${}^8\text{B}$ нейтрино имеют энергию в диапазоне меньшем, чем 15 МэВ. Именно поэтому ${}^8\text{B}$ нейтрино дают основной вклад в экспериментально регистрируемые потоки солнечных нейтрино.

Первая успешная попытка измерить количество солнечных нейтрино, достигающих поверхности Земли, была предпринята в США в результате проведения эксперимента Хоумстэйк (Homestake) [16]. В данном эксперименте электронное нейтрино регистрировалось при помощи реакции Понтекорво-Дэйвиса: $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}$. Как уже было отмечено выше, в эксперименте Хоумстэйк регистрировались главным образом ${}^8\text{B}$ нейтрино. После обработки данных было получено явное рассогласование между предсказанным и измеренным потоками солнечных нейтрино [17]. Измеренный поток нейтрино оказался примерно в три раза меньшим предсказанного. Действительно, согласно работе [16], отношение измеренного потока нейтрино к предсказанному R равно 0.34 ± 0.03 . Спустя год после опубликования результатов эксперимента Хоумстэйк, в статье [10] В. Н. Грибов и Б. Понтекорво выдвинули гипотезу о том, что нейтрино, при распространении от Солнца к Земле, переходит из одного типа в другой, который труднее детектировать. Тем самым, дефицит солнечных нейтрино может быть объяснен. Фактически, авторы предложили механизм осцилляций нейтрино как способ решения проблемы солнечных нейтрино.

Здесь необходимо отметить, что вычисления потока нейтрино, излучаемого Солнцем, основываются на стандартной солнечной модели. В свою очередь предсказания стандартной солнечной модели обладают довольно высокой точностью благодаря ряду особенностей:

- Точность измерений и вычислений входных данных.
- Зависимость между потоками нейтрино и измеряемой солнечной све-

тимостью.

- Измерения гелиосейсмологических частот солнечных мод колебаний давления (так называемых p мод).

Таким образом, на вычисления потоков нейтрино в рамках стандартной солнечной модели можно полагаться с большой степенью вероятности.

Эксперимент Хоумстэйк [18], в котором использовалось ядро ^{37}Cl в качестве мишени, принадлежит к группе так называемых радиохимических экспериментов. По аналогичной схеме работают галлиевые эксперименты: SAGE (Россия) и GALLEX¹. Идея использования ^{71}Ga в качестве мишени принадлежала советскому физико-теоретику В.А. Кузмину и была сформулирована им еще в 1965 г. Солнечные нейтрино в данных экспериментах регистрировались при помощи реакции $\nu_e + ^{71}\text{Ga} \rightarrow e^- + ^{71}\text{Ge}$. Запуск галлиевых детекторов ознаменовал собой большой шаг вперед в изучении солнечных нейтрино. Одним из главных достоинств данного метода оказался низкий энергетический порог. Действительно, с помощью подобных детекторов стало возможно регистрировать даже pp нейтрино, имеющие энергию менее 0.42 МэВ. Данные нейтрино, образующиеся в результате реакции $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$, дают наибольший вклад в поток солнечных нейтрино. Результаты экспериментов SAGE и GALLEX также обнаруживают расхождение, хотя и в несколько меньшей степени, чем в эксперименте Хоумстэйк, между измеренным и предсказанным потоками солнечных нейтрино. Для сравнения, отношение R , полученное в ходе проведения эксперимента SAGE равно 0.60 ± 0.05 [19]. В случае эксперимента GALLEX данное отношение равно 0.58 ± 0.05 [20]. Таким образом, мы видим, что галлиевые детекторы дают более высокий процент зарегистрированных солнечных нейтрино по сравнению с хлорным детектором Хоумстэйк. Современное объяснение наблюдаемого с помощью галлиевых детекторов дефицита

¹В подготовке и проведении данного эксперимента участвуют несколько стран. В их числе Германия, Франция, Италия, Израиль и США.

солнечных нейтрино аналогично объяснению, даваемому в случае хлорного детектора. Если существует смешивание первоначально испущенных электронных нейтрино, то из-за нейтринных осцилляций или переходов в веществе, обусловленных эффектом Михеева-Смирнова-Вольфенштейна¹, эти частицы преобразуются в другие типы нейтрино, которые не могут быть зарегистрированы экспериментально.

Достаточно веский аргумент в пользу существования переходов солнечных электронных нейтрино в мюонные и τ -нейтрино был выдвинут в ходе анализа данных, недавно полученных при проведении эксперимента СНО (SNO, Sudbury Neutrino Observatory) [21, 22]. Детектор эксперимента СНО представляет собой черенковский детектор, рабочим веществом которого является тяжелая вода (D_2O). Солнечные нейтрино регистрируются при помощи следующих трех реакций:

$$\nu_e + d \rightarrow e^- + p + p, \quad (1.2.1)$$

$$\nu + d \rightarrow \nu + n + p, \quad (1.2.2)$$

$$\nu + e \rightarrow \nu + e. \quad (1.2.3)$$

Заметим, что реакция (1.2.1) идет через взаимодействия заряженных токов, в то время как реакция (1.2.2) – через нейтральные токи. Реакция (1.2.3) представляет собой упругое рассеяние. Следовательно, в реакциях (1.2.2) и (1.2.3) могут участвовать все типы нейтрино.

В течении 306.4 дней проведения эксперимента СНО было зарегистрировано примерно 1697 событий типа (1.2.1), 577 событий типа (1.2.2) и 264 события типа (1.2.3). Энергетический порог при детектировании электронов отдачи был равен 5 МэВ, а порог протекания реакции (1.2.2) 2.2 МэВ. Таким образом, в данном эксперименте наблюдались главным образом 8B нейтрино. Особенно важным является тот факт, что первоначальный спектр 8B нейтрино известен.

¹ Данное явление будет обсуждаться более подробно ниже.

В эксперименте СНО было получено, что (см. работы [21, 22])

$$(\Phi_{\nu}^{ES})_{SNO} \simeq 2.39 \times 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}. \quad (1.2.4)$$

где $(\Phi_{\nu}^{ES})_{SNO}$ - поток нейтрино, измеренный при помощи процесса (1.2.3).

Спектр электронов, образующихся в результате процесса (1.2.1), также был измерен в ходе проведения эксперимента СНО, причем никакого заметного искажения спектра не было зарегистрировано. Если бы дефицит солнечных нейтрино был вызван не процессом осцилляций нейтрино, а каким-либо другим процессом, например рассеянием нейтрино, то в этом случае произошло бы искажение спектра вторичных электронов.

В эксперименте СНО было получено, что поток электронных нейтрино на поверхности Земли составляет (см. статьи [21, 22])

$$(\Phi_{\nu_e}^{CC})_{SNO} \simeq 1.76 \times 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}, \quad (1.2.5)$$

где $(\Phi_{\nu_e}^{CC})_{SNO}$ - поток нейтрино, измеренный при помощи процесса (1.2.1).

Для потока всех типов нейтрино, измеренного с помощью процесса (1.2.2) было получено следующее значение (см. работы [21, 22])

$$(\Phi_{\nu}^{NC})_{SNO} \simeq 5.09 \times 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}, \quad (1.2.6)$$

что примерно в три раза больше, чем поток электронных нейтрино.

Учитывая тот факт, что наряду с электронными нейтрино в величину Φ_{ν}^{NC} также дают вклады мюонные и τ -нейтрино, можно, используя данные эксперимента СНО, вычислить поток $\Phi_{\nu_{\mu,\tau}}$. Для расчета величины $\Phi_{\nu_{\mu,\tau}}$ в работах [21, 22] также были учтены вклады процесса (1.2.3). Окончательное выражение для рассматриваемого потока имеет вид

$$(\Phi_{\nu_{\mu,\tau}})_{SNO} \simeq 1.76 \times 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}. \quad (1.2.7)$$

Одним из основных результатов, полученных в ходе проведения эксперимента СНО, является подтверждение того факта, что в потоке солнечных нейтрино кроме электронных нейтрино также присутствуют мюонные и τ -нейтрино.

Сравним теперь предсказания стандартной солнечной модели с результатами эксперимента СНО. В работе [23] был вычислен поток ${}^8\text{B}$ нейтрино

$$(\Phi_{\nu_e})_{SSM} \simeq 5.05 \times 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}, \quad (1.2.8)$$

что находится в хорошем согласии с величиной полного потока (1.2.6). Таким образом, было установлено, что полный поток электронных нейтрино, излучаемых Солнцем, равняется суммарному потоку всех нейтрино, зарегистрированному на поверхности Земли.

Проблема дефицита солнечных нейтрино также изучалась в ходе проведения эксперимента Супер-Камиоканде [24]. В данном эксперименте наблюдались электронные и мюонные нейтрино при помощи регистрации черенковского излучения в детекторе, рабочим веществом которого являлась вода (порядка 50 кт). Таким образом, нейтрино регистрировались с помощью процесса (1.2.3). В течении 1496 дней работы было зарегистрировано большое число нейтрино (22400 ± 800). Исходя из данных эксперимента Супер-Камиоканде было получено, что

$$(\Phi_{\nu}^{ES})_{S-K} \approx 2.35 \times 10^6 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \quad (1.2.9)$$

Эта величина хорошо согласуется с результатами эксперимента СНО (1.2.4).

Данные всех экспериментов по изучению солнечных нейтрино могут быть описаны, если предположить, что солнечные электронные нейтрино переходят в мюонные или τ -лептонные нейтрино и вероятность ν_e остаться в прежнем состоянии характеризуется двумя параметрами Δm_{sol}^2 и $\text{tg}^2 \theta_{\text{sol}}$. Наилучшее совпадение экспериментальных и теоретических результатов получается в случае, когда данные параметры принимают следующее значение

$$\Delta m_{\text{sol}}^2 = 5 \times 10^{-5} \text{ эВ}^2, \quad \text{tg}^2 \theta_{\text{sol}} = 0.34. \quad (1.2.10)$$

Значения Δm_{sol}^2 и $\text{tg}^2 \theta_{\text{sol}}$ в формуле (1.2.10) соответствуют большому углу смешивания (LMA, Large Mixing Angle).

1.3 Экспериментальное изучение атмосферных нейтрино

Атмосферные нейтрино рождаются главным образом при распадах заряженных пионов и следующих за ними распадах мюонов

$$\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu, \quad \mu \rightarrow e + \nu_\mu + \nu_e. \quad (1.3.1)$$

Пионы в свою очередь рождаются в процессах взаимодействия космических лучей в атмосфере. Одним из основных центров по изучению атмосферных нейтрино является эксперимент Супер-Камиоканде [25–27], упоминавшийся в разделе 1.2 в связи с исследованием проблемы солнечных нейтрино.

При относительно малых энергиях ($\lesssim 1$ ГэВ) практически все мюоны распадаются в атмосфере. Кроме того, из формулы (1.3.1) следует, что отношение мюонных нейтрино к электронным $R_{\mu/e}$ равно 2¹. Отношение $(R_{\mu/e})_{\text{measured}}$, измеренное в ходе проведения эксперимента Супер-Камиоканде, значительно меньше предсказанного $(R_{\mu/e})_{\text{predicted}}$. Например, в области энергий $E > 1.33$ ГэВ отношение измеренной величины к предсказанной составляет

$$\frac{(R_{\mu/e})_{\text{measured}}}{(R_{\mu/e})_{\text{predicted}}} \approx 0.658.$$

Таким образом, данная аномалия в течении долгого времени рассматривалась в качестве обоснования реальности нейтринных осцилляций.

В ходе проведения эксперимента Супер-Камиоканде был не только подтвержден факт уменьшения числа мюонных нейтрино, но также было изучено угловое распределение мюонных и электронных нейтрино [26]. Было найдено, что электронные нейтрино распределены симметрично в зависимости от зенитного угла, тогда как симметрия распределения мюонных нейтрино по зенитному углу оказалась явно нарушенной. Следовательно,

¹При энергиях, больших чем 1 ГэВ, данное отношение больше, чем 2.

число мюонных нейтрино сильно зависит от расстояния между точкой их рождения в атмосфере и детектором.

Наилучшее теоретическое обоснование данных эксперимента Супер-Камиоканде состоит в предположении о том, что мюонное нейтрино превращается в τ -лептонное в результате нейтринных осцилляций. Величины параметров осцилляций при этом имеют следующие значения

$$\Delta m_{\text{atm}}^2 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ эВ}^2, \quad \sin^2 2\theta_{\text{atm}} = 1.$$

1.4 Реакторные эксперименты

Осцилляции нейтрино с величиной Δm^2 в диапазоне осцилляций атмосферных нейтрино (см., раздел 1.3) исследовались в эксперименте К2К [28]. В данном эксперименте нейтрино, рождающиеся главным образом при распадах пионов, регистрировались детектором Супер-Камиоканде. Пионы рождались в ускорителе КЕК ($E \sim 12 \text{ ГэВ}$), который находился на расстоянии примерно 250 км от детектора Супер-Камиоканде. Средняя энергия нейтрино составляла порядка 1.3 ГэВ.

Для того, чтобы контролировать флейворный состав пучка нейтрино непосредственно на выходе из ускорителя, были сооружены два дополнительных детектора на расстоянии примерно 300 м. Таким образом, общее число и спектр мюонных нейтрино, зарегистрированных детектором Супер-Камиоканде, сравнивались с измерениями двух близлежащих детекторов в предположении об отсутствии осцилляций.

Первые результаты эксперимента К2К были недавно опубликованы [28]. Общее число мюонных нейтрино, зарегистрированных детектором Супер-Камиоканде оказалось равным ≈ 56 , тогда как ожидаемое число составляет ≈ 80 . Следовательно, данные длиннобазового ускорительного эксперимента К2К указывают на факт исчезновения мюонных нейтрино. Величи-

ны параметров осцилляций в данном случае равны

$$\Delta m_{\text{K2K}}^2 = 2.8 \times 10^{-3} \text{ эВ}^2, \quad \sin^2 2\theta_{\text{K2K}} = 1.$$

Среди длиннобазовых реакторных экспериментов по изучению осцилляций нейтрино следует отметить эксперименты ШУЗ (CHOOZ) [29] и Пало Верде [30]. Цель данных экспериментов состоит в том, чтобы исследовать исчезновение электронных антинейтрино. Несмотря на тот факт, что в этих экспериментах не обнаружено указаний на осцилляции нейтрино, их результаты важны для изучения смешивания нейтрино. Не вдаваясь в технические детали результатов экспериментов, приведем здесь лишь величины параметров осцилляций

$$\Delta m^2 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ эВ}^2, \quad \sin^2 2\theta \lesssim 1.5 \times 10^{-1}.$$

Еще одно доказательство существования осцилляций нейтрино получено совсем недавно в ходе проведения эксперимента КамЛЭНД (KamLAND) [31]. В данном эксперименте регистрировались электронные антинейтрино от ядерных реакторов в Японии и Корее при помощи процесса

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n.$$

Энергетический порог данного процесса составляет ≈ 1.8 МэВ. Детектор регистрировал антинейтрино от 26 реакторов расположенных на расстояниях 138 – 214 км.

В течении 145 дней проведения данного эксперимента было зарегистрировано 54 электронных антинейтрино в противоположность примерно 87 ожидаемым. Также был изучен энергетический спектр антинейтрино. Следует привести величины параметров осцилляций получающихся при анализе результатов эксперимента КамЛЭНД

$$\Delta m_{\text{KamLAND}}^2 = 6.9 \times 10^{-5} \text{ эВ}^2, \quad \sin^2 2\theta_{\text{KamLAND}} = 1.$$

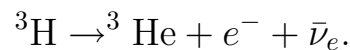
Результаты эксперимента КамЛЭНД позволяют исключить из рассмотрения параметры осцилляций нейтрино, соответствующие малому углу смешивания и вакуумным осцилляциям. Таким образом, единственно возможным решением проблемы солнечных нейтрино, которое согласуется с данными эксперимента КамЛЭНД, является решение LMA MSB¹.

1.5 Современные кинематические ограничения на «массы» флейворных нейтрино

В этом разделе приведены современные ограничения на массы электронного, мюонного и τ -лептонного нейтрино. В разделе 1.6 (см. ниже) отмечено, что флейворные нейтрино являются суперпозицией массовых состояний. Следовательно можно говорить лишь об эффективной массе соответствующего флейворного нейтрино.

1.5.1 Эксперименты по изучению β -распада и измерение массы нейтрино

Стандартный метод измерения абсолютного значения массы нейтрино состоит в детальном исследовании высокоэнергетического диапазона спектра β электронов, образующихся при радиоактивном распаде трития



Данный распад имеет малое энергосодержание ($E \approx 18.6$ кэВ), а период полураспада трития составляет $T_{1/2} \approx 12.3$ лет.

Ведущими научными центрами по изучению β -распада являются экспериментальные группы в Троицке [32] и Майнце [16]. Точность определения массы нейтрино в данных экспериментах составляет порядка 2 – 3 эВ.

¹Эффект Михеева-Смирнова-Вольфенштейна, см. ниже.

В эксперименте [16] использовался молекулярный тритий, сконденсированный на графитовой основе. Спектр электронов измерялся при помощи интегрального электростатического спектрометра, который совмещает высокую светосилу с высоким разрешением. В результате проведения данного эксперимента получено следующее ограничение на массу нейтрино

$$m_1 < 2.2 \text{ эВ.} \quad (1.5.1)$$

Напомним, что, например, электронное нейтрино не является массовым состоянием. Следовательно, в формуле (1.5.1) приведено ограничение на массу самого легкого массового состояния (см. также раздел 1.6).

В Троицком эксперименте также использовался интегральный электростатический спектрометр, разрешение которого составляло 3.5 – 4 эВ. В этом эксперименте получено ограничение на массу нейтрино, которое согласуется с результатом (1.5.1) и составляет

$$m_1 < 2.2 \text{ эВ.}$$

Очень важным представляется вопрос о том, является ли массивное нейтрино дираковской или майорановской частицей. Эксперименты по исследованию осцилляций нейтрино не могут пролить свет на эту фундаментальную проблему. Природа нейтрино может быть разгадана в экспериментах по поиску безнейтринного двойного β -распада.

Безнейтринный двойной β -распад представляет собой реакцию типа

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^-, \quad (1.5.2)$$

где (A, Z) - ядро с зарядом Z и массовым числом A .

Реакции вида (1.5.2) изучались во многих экспериментах, ведущими из которых являются коллаборации Гейдельберг-Москва [33] и IGEX [34]. В этих экспериментах изучался распад ядер германия ^{76}Ge . В результате по-

лучены следующие ограничения на период полураспада

$$\begin{aligned} T_{1/2} &\geq 1.9 \times 10^{25} \text{ лет,} && \text{Гейдельберг-Москва,} \\ T_{1/2} &\geq 1.57 \times 10^{25} \text{ лет,} && \text{IGEX.} \end{aligned}$$

Исходя из полученных периодов полураспада может быть вычислена эффективная масса нейтрино, которая составляет

$$|m| \leq (0.35 - 1.24) \text{ эВ.}$$

Несмотря на недавние сообщения группы Гейдельберг-Москва о том, что ими было обнаружено указание на безнейтринный двойной β -распад, данный результат был подвергнут жесткой критике в работах [35, 36]. Несмотря на критику, исследователям из группы Гейдельберг-Москва в последнее время удалось значительно повысить точность своих измерений [37].

1.5.2 Ограничение на массы мюонного и τ -лептонного нейтрино

Наиболее современные данные о массах мюонного и τ -лептонного нейтрино приведены в обзоре [38]. Результаты, использованные в настоящем разделе взяты из этого обзора.

Верхняя граница массы мюонного нейтрино может быть получена на основе данных о нуклеосинтезе в ранней Вселенной, а также из ускорительных экспериментов. Космологические ограничения на массу мюонного нейтрино основываются на анализе термодинамического равновесия ниже точки фазового перехода КХД для право-поляризованных дираковских нейтрино. Космологическое ограничение составляет $m_{\nu_\mu} < 0.15 \div 0.48 \text{ МэВ}$.

В ускорительных экспериментах исследуются распады заряженных пионов вида

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Подобные эксперименты дают ограничение на массу мюонного нейтрино порядка $m_{\nu_\mu} < 0.17 \div 0.65 \text{ МэВ}$.

Ограничения на массу τ -лептонного нейтрино также можно условно разделить на космологические и ускорительные. Космологические ограничения составляют $m_{\nu_\tau} < 0.19 \div 1$ МэВ. В ускорительных экспериментах исследовались реакции вида

$$\begin{aligned}\tau^- &\rightarrow 2\pi^-\pi^+\nu_\tau, \\ \tau^- &\rightarrow \pi^-\pi^+\pi^-\pi^0\nu_\tau, \\ \tau^- &\rightarrow 3\pi^-2\pi^+\nu_\tau, \\ \tau^- &\rightarrow 2\pi^-\pi^+2\pi^0\nu_\tau.\end{aligned}$$

Соответствующие ограничения на массу составляют порядка $m_{\nu_\tau} < 28 \div 70$ МэВ.

Из оценок, приведенных в разделах 1.5.1 и 1.5.2, видно, что для электронного, мюонного и τ -лептонного нейтрино массовые слагаемые в лагранжиане малы.

1.6 Основы феноменологической теории массы и смешивания нейтрино

В предыдущих разделах 1.2-1.4 были выдвинуты достаточно веские доводы в пользу существования осцилляций нейтрино. Исследование осцилляций нейтрино основывается на согласующихся с экспериментом предположениях о том, что

- Взаимодействия нейтрино с другими частицами описывается в рамках стандартной модели электрослабых взаимодействий.
- Существуют три флейворных поколения нейтрино.

В рамках стандартной модели электрослабых взаимодействий все три поколения нейтрино являются безмассовыми частицами, и все три лептонных

числа по отдельности сохраняются. Гипотеза смешивания нейтрино основывается на том, что полный лагранжиан, описывающий нейтринные поля, содержит массовые слагаемые, ответственные за несохранение флейворных лептонных чисел.

Существуют два основных вида массовых членов:

1. Дираковский массовый член

$$-\mathcal{L}^D = \bar{\nu}_R M^D \nu_L + \text{h.c.},$$

где M^D - комплексная недиагональная матрица.

2. Майорановский массовый член

$$-\mathcal{L}^M = \overline{(\nu_L)^c} M^M \nu_L + \text{h.c.},$$

где M^M - симметрическая матрица.

Заметим, что в данных определениях ν - это столбец, содержащий флейворные нейтрино, т.е. частицы, которые участвуют в слабых взаимодействиях. В обоих случаях флейворные состояния связаны с массовыми $\nu^{(m)}$, т.е. состояниями нейтрино с определенной массой, посредством унитарного преобразования

$$\nu_l^{(m)} = \sum_i U_{li} \nu_i. \quad (1.6.1)$$

Лагранжиан, записанный в терминах массовых состояний имеет диагональный вид.

1.7 Осцилляции нейтрино

На примере двух поколений нейтрино кратко рассмотрим явление осцилляций нейтрино в вакууме. Уравнение временной эволюции массовых нейтрино имеет вид

$$i \frac{\partial \nu^{(m)}}{\partial t}(t) = H \nu^{(m)}(t), \quad (1.7.1)$$

где гамильтониан имеет диагональный вид $H = \text{diag}(E_1, E_2)$. Принимая во внимание малость масс нейтрино по сравнению с их энергиями, находим, что гамильтониан представим в виде

$$H = \left(|\mathbf{p}| + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4|\mathbf{p}|} \right) - \frac{\Delta m^2}{4|\mathbf{p}|} \sigma_3, \quad (1.7.2)$$

где m_1 и m_2 - массы, соответствующие состояниям $\nu_1^{(m)}$ и $\nu_2^{(m)}$, \mathbf{p} - импульс нейтрино, $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$.

В случае двух поколений нейтрино матрица U в формуле (1.6.1) может быть параметризована при помощи одного угла θ_{vac}

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\text{vac}} & \sin \theta_{\text{vac}} \\ -\sin \theta_{\text{vac}} & \cos \theta_{\text{vac}} \end{pmatrix}. \quad (1.7.3)$$

Используя соотношения (1.7.1)-(1.7.3) получаем для вероятности перехода флейворных нейтрино, например $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, следующее выражение

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x) = |\langle \nu_\mu | \nu_e(x) \rangle|^2 = \sin^2 2\theta_{\text{vac}} \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} x \right). \quad (1.7.4)$$

Вероятность того, что ν_e останется в прежнем состоянии получается на основе выражения (1.7.4) и имеет вид

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x) = 1 - P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(x).$$

Рассмотрим теперь как наличие вещества скажется на процессе осцилляций. Подчеркнем, что здесь мы будем исследовать случай однородной, неподвижной и неполяризованной среды. Как уже отмечалось выше, нейтрино взаимодействует с частицами вещества посредством слабых токов. Лагранжиан такого взаимодействия имеет форму

$$\mathcal{L} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} j_\mu^{(\text{mat})} j^{(\nu)\mu}, \quad (1.7.5)$$

где $j^{(\text{mat})\mu}$ и $j^{(\nu)\mu}$ - слабые токи частиц вещества и нейтрино.

Отбрасывая в выражении (1.7.5) слагаемые, пропорциональные скорости и поляризации вещества, получаем эффективный гамильтониан, описывающий временную эволюцию двухуровневой системы, который имеет вид

$$H_{\text{eff}} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta_{\text{eff}} & \sin 2\theta_{\text{eff}} \\ \sin 2\theta_{\text{eff}} & \cos 2\theta_{\text{eff}} \end{pmatrix}, \quad (1.7.6)$$

где эффективный угол смешивания дается формулой

$$\text{tg } 2\theta_{\text{eff}} = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta_{\text{vac}}}{\Delta m^2 \cos 2\theta_{\text{vac}} - 2\sqrt{2}G_F n_e E}. \quad (1.7.7)$$

Заметим, что вероятность перехода в случае формул (1.7.6) и (1.7.7) аналогична соотношению (1.7.4), если произвести замену $\theta_{\text{vac}} \rightarrow \theta_{\text{eff}}$. Следовательно, эффективный угол смешивания достигает значения $\pi/4$ при условии, что $\Delta m^2 \cos 2\theta_{\text{vac}} = 2\sqrt{2}G_F n_e E$. В этом случае вероятность перехода может достигать единичного значения даже в случае малого вакуумного угла смешивания, т.е. имеет место резонансное усиление осцилляций нейтрино (эффект Михеева-Смирнова-Вольфенштейна). Данное явление было предсказано Михеевым и Смирновым [39] на основе использования формулы Вольфенштейна [40] для эффективного угла смешивания в веществе.

Наличие внешнего магнитного поля также будет влиять на процесс осцилляций нейтрино. В случае, если нейтрино обладает ненулевой массой, у него неизбежно появляется магнитный момент (см. ниже), который, в отличие от магнитного момента электрона, имеет аномальную природу и целиком обусловлен взаимодействием с вакуумом электрослабой модели, т.е. радиационными поправками. Рассмотрим спин-флейворные осцилляции нейтрино, т.е., например, переходы вида $\nu_{e-} \leftrightarrow \nu_{\mu+}$, где состояния, отмеченные знаками «-» и «+» соответствуют разным спиральностям. Эффективный гамильтониан принимает форму (см., например работы [41–43])

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta_{\text{vac}} + V_{\nu_e} & \mu B \\ \mu B & \frac{\Delta m^2}{4E} \end{pmatrix},$$

где V_{ν_e} - потенциал взаимодействия электронного нейтрино со средой, μ - переходный магнитный момент, B - напряженность поперечного магнитного поля. При спин-флейворных осцилляциях нейтрино также возможно их резонансное усиление. Принципиально данный эффект во многих отношениях аналогичен эффекту Михеева-Смирнова-Вольфенштейна (МСВ), и поэтому в данной работе не приводится его подробного описания. Отметим лишь, что механизм резонансного усиления спин-флейворных осцилляций был разработан в статьях [44–47], где можно также найти некоторые его возможные приложения.

Для решения проблемы солнечных нейтрино с использованием спин-флейворных осцилляций требуются напряженности солнечного магнитного поля порядка 100 кГс, что является довольно большой величиной. Маловероятно, что магнитные поля такой напряженности могут возникать даже в конвективной зоне Солнца. Следовательно, спин-флейворные осцилляции являются второстепенным механизмом при конверсии солнечных нейтрино. Однако данный механизм не следует совсем исключать из поля зрения при рассмотрении проблемы солнечных нейтрино. Как показано в недавно опубликованных работах (см., например [48, 49]), спин-флейворные осцилляции солнечных нейтрино обеспечивают ограничения на магнитный момент нейтрино и напряженность магнитного поля Солнца.

1.8 Электромагнитные характеристики нейтрино

В рамках стандартной модели электрослабых взаимодействий нейтрино является безмассовой частицей. Следовательно, все его статические электромагнитные характеристики, такие как заряд и магнитный момент, равны нулю. Таким образом, ненулевой магнитный момент нейтрино - это прямое указание на теорию за пределами стандартной модели.

Самый простой способ получить магнитный момент состоит во введении

в теорию $SU(2)$ -синглетного правого нейтрино. Однако, магнитный момент в подобной теории по порядку величины составляет $\sim eG_F m_\nu$. Поскольку масса электронного нейтрино не может превышать 10 эВ, то магнитный момент оказывается меньше, чем $10^{-18} \mu_B$. Магнитный момент в минимально расширенной стандартной модели рассматривался в работах [50–55]. В статьях [50–52] впервые было получено выражение для магнитного момента нейтрино в случае легкой частицы, при этом предполагалось, что масса заряженного лептона во много раз меньше массы W -бозона. Данный результат многократно подтверждался в других исследованиях (см., например, раздел 2.3.2). Следующим шагом в исследовании магнитного момента нейтрино было применение R_ξ -калибровки при расчете фейнмановских диаграмм. Однако в статье [54] вклады нескольких диаграмм были вычислены с ошибками. Эти недочеты были исправлены в работе [55] (см. также раздел 2.3.2 диссертации).

Идея о том, что нейтрино может обладать большим магнитным моментом (по сравнению с предсказанием минимально расширенной стандартной модели) была предложена в работе [56]. Существуют различные способы получить большие значения магнитного момента: нейтрино

- Расширение группы симметрий электрослабой модели.
- Использование дополнительной группы $SU(2)$, генераторы которой коммутируют с генераторами калибровочной группы $SU(2)_L$. Примером является горизонтальная симметрия $SU(2)_H$ [57–59], в которой ν_{eL} и $\nu_{\mu L}$ образуют дублет. Магнитный момент в этом случае связывает ν_e и ν_μ , т. е. является переходным. В пределе ненарушенной $SU(2)_H$ -симметрии масса электрона должна быть равной массе мюона. Следовательно данная симметрия должна быть нарушенной.
- Можно использовать дискретные симметрии со специально подобранными квантовыми числами [42].

- Можно попытаться найти дискретную неабелеву симметрию, относительно которой член с магнитным моментом является инвариантным, а массовое слагаемое – нет. Существуют многочисленные неабелевы симметрии, удовлетворяющие данному условию [60].

Изучению другой важной электромагнитной характеристики нейтрино, ее электрического заряда, посвящено множество исследований (см., например, статьи [54, 61, 62]). Однако в данных работах не учитывалась ненулевая масса нейтрино, т.е. вычисления производились в рамках стандартной модели. Нулевой заряд нейтрино соответствует ненарушенной электромагнитной калибровочной симметрии. Это следует из тождеств Уорда, выведенных в работах [54, 62].

В теории с нарушенной C - и P -инвариантностью наряду с электрическим зарядом и магнитным моментом частица может обладать еще одним статическим электромагнитным моментом. Как правило его выражают в виде анапольного момента. Необходимо отметить, что даже безмассовая частица может обладать анапольным моментом. Из недавних работ, посвященных исследованию данной электромагнитной характеристики, следует упомянуть статьи [63–65].

Наряду со статическими электромагнитными моментами, нейтрино, являясь фермионом со спином $1/2$, может обладать четырьмя электромагнитными формфакторами [66]. Разложение электромагнитной вершинной функции на четыре формфактора исследовалось в статьях [67, 68] на основе общих принципов, таких как лоренц- и CP -инвариантность, сохранение электромагнитного тока, а также условие эрмитовости оператора электромагнитного тока. Немаловажной величиной, характеризующей электромагнитные свойства частицы, является ее зарядовый радиус. Ряд недавно опубликованных статей посвящен вычислению зарядового радиуса нейтрино [69, 70].

Электромагнитные свойства нейтрино (расчет массового оператора, маг-

нитного и анапольного моментов) в присутствии внешнего электромагнитного поля и среды рассматривались в серии работ [53, 71–75]. Заметим, что наличие у нейтрино ненулевой массы влечет за собой не только возникновение нетривиальных электромагнитных свойств самого нейтрино, но также приводит к существенным поправкам в различных физических процессах с участием нейтрино, например в β -распаде нейтрона во внешнем электромагнитном поле (см. работу [76]).

1.9 Основные результаты диссертации

Диссертация посвящена изучению электромагнитных свойств нейтрино в присутствии электромагнитного поля, а также осцилляций нейтрино в веществе и электромагнитных полях различной конфигурации. В качестве возможных приложений результатов данных исследований рассматриваются различные астрофизические и космологические среды, такие как вещество ранней Вселенной, электромагнитное поле космического микроволнового излучения и т.д.

В главе 2 рассмотрены электромагнитные формфакторы массивного дираковского нейтрино в минимально расширенной стандартной модели с $SU(2)$ -синглетным правым нейтрино. С использованием размерной регуляризации вычислены вклады однопетлевых фейнмановских диаграмм в электромагнитную вершинную функцию нейтрино $\Lambda_\mu(q)$ в общей R_ξ -калибровке. Изучено разложение электромагнитной вершинной функции массивного нейтрино на электромагнитные формфакторы. Исследованы расходимости электромагнитной вершинной функции нейтрино. Получены замкнутые интегральные выражения для зарядового, магнитного и анапольного формфакторов, точно учитывающих массовые параметры заряженного лептона, нейтрино, и калибровочные параметры W - и Z -бозонов. Вычисления производились при произвольном значении квадрата импуль-

са внешнего фотона. Изучено асимптотическое поведение магнитного фактора при различных значениях калибровочного параметра. Выведены замкнутые интегральные выражения для статических электромагнитных характеристик массивного нейтрино, т.е. получены выражения для электрического заряда, магнитного и анапольного моментов. Исследована зависимость данных электромагнитных свойств нейтрино от масс всех частиц и от калибровочных параметров.

Глава 3 посвящена изучению эволюции спина нейтрино в произвольных внешних полях. В данной главе рассмотрена эволюция спина нейтрино в рамках физической модели, допускающей новые, более общие типы взаимодействия нейтрино. Выведено уравнение эволюции спина нейтрино напрямую из лагранжиана взаимодействия нейтрино, который включает в себя не только векторное и аксиально-векторное взаимодействия стандартной модели, но также скалярное, псевдоскалярное, тензорное и псевдотензорное взаимодействия.

В главе 4 проведено исследование релаксации спина нейтрино в веществе со стохастическими характеристиками. В качестве приложения рассматриваемого явления изучена релаксация спина нейтрино в веществе ранней Вселенной. Получено космологическое ограничение на массу мюонного нейтрино.

Глава 5 посвящена изучению осцилляций нейтрино в электромагнитных полях различной конфигурации. На основе предложенного в главе 3 подхода для описания эволюции спина нейтрино в произвольных внешних полях рассмотрены осцилляции нейтрино в присутствии поля линейно поляризованной электромагнитной волны. Детально проанализировано условие резонансного усиления осцилляций и разработан подход к качественному исследованию решения уравнения эволюции нейтрино вблизи точки резонанса. Показано, что при осцилляциях нейтрино в переменных электромагнитных полях может возникать явление параметрического резонанса. Для

двух типов электромагнитных полей (амплитудно-модулированной электромагнитной волны и постоянного во времени поперечного магнитного поля с периодически меняющейся в пространстве амплитудой) найдены вероятности нейтринных переходов и обнаружено, что амплитуды вероятностей возрастают со временем при определенном подборе параметров внешних электромагнитных полей. Также обсуждаются некоторые возможные приложения явления параметрического резонанса.

После заключения (глава 6) представлен набор правил Фейнмана (приложение А) и характерных фейнмановских интегралов (приложение В), которые использовались в главе 2 при исследовании электромагнитных формфакторов массивного нейтрино.

Глава 2

Электромагнитные формфакторы массивного нейтрино

Как уже было отмечено в главе 1, последние экспериментальные данные по исследованию астрофизических и наземных потоков нейтрино свидетельствуют о том что нейтрино обладает ненулевой массой покоя, и что существует смешивание между различными поколениями нейтрино [77]. Эти свойства нейтрино, в свою очередь, является отличительными чертами физики за пределами стандартной модели. Исследование радиационных поправок к свойствам нейтрино обеспечивает важную информацию о параметрах и структуре предполагаемой модели взаимодействия элементарных частиц.

Прямое вычисление таких характеристик нейтрино, как ее электрический заряд и магнитный момент, является одним из способов проверки справедливости теоретической модели. В этой связи необходимо отметить, что изучение зависимости данных величин от массы нейтрино и от калибровки представляет особенный интерес. Электрический заряд и магнитный момент являются самыми важными статическими электромагнитными свойствами элементарной частицы. Электромагнитная вершинная функция нейтрино и, в частности, ее разложение на электромагнитные формфакторы при ненулевой передаче импульса в рамках различных ка-

либровочных теорий обсуждалась в работах [67, 68]. Вершинная функция нейтрино в пределе малой массы нейтрино рассматривалась в статье [50].

Заряд нейтрино в стандартной модели вычислялся в работах [61, 78–80] с использованием разнообразных калибровок, таких как унитарная, линейная R_ξ , а также калибровка 'т Хофта-Фейнмана. Вклады различных диаграмм в магнитный момент нейтрино в стандартной модели рассматривались ранее в статьях [50–53]. Нулевое значение заряда безмассового нейтрино является следствием ненарушенной электромагнитной калибровочной инвариантности. Соответствующие тождества Уорда были выведены в работах [54, 62] с использованием метода фонового поля. Вычисление различных диаграмм в однопетлевом приближении в модели электрослабых взаимодействий, дающих вклады в заряд и магнитный момент нейтрино, приведено в недавней статье [54]. В этой работе использовался метод фонового поля, а также линейная R_ξ -калибровка. Однако, во всех предыдущих работах по изучению заряда нейтрино, вычисления производились в предположении нулевой массы нейтрино. Что касается магнитного момента нейтрино, изучение данной величины производилось в первом ненулевом порядке разложения по массе нейтрино, что справедливо только в случае нейтрино с массой гораздо меньше массы соответствующего заряженного лептона: $m_{\nu_\ell} \ll m_\ell$. Кроме того, зависимость вкладов нескольких однопетлевых диаграмм в заряд и магнитный момент нейтрино от калибровочного параметра, полученная в работе [54], является неверной.

В этой главе рассмотрены электромагнитные формфакторы массивного дираковского нейтрино в минимально расширенной стандартной модели с $SU(2)$ -синглетным правым нейтрино [55]. Используя размерную регуляризацию, в разделе 2.1 вычислены вклады однопетлевых фейнмановских диаграмм в электромагнитную вершинную функцию нейтрино $\Lambda_\mu(q)$ в общей R_ξ -калибровке. Следует отметить, что в противоположность предыдущим исследованиям в этой области, в данной работе явно учитывается

ненулевая масса нейтрино. Преимущества произвольной R_ξ -калибровки по сравнению, например, с унитарной калибровкой, отмечены в статье [81]. Несмотря на тот факт, что в унитарной калибровке число фейнмановских диаграмм минимально, в этой калибровке возникают неоднозначности при выделении конечной части матрицы рассеяния. Подобные трудности автоматически устраняются в R_ξ -калибровке. Заметим, что преимущества R_ξ -калибровки становятся существенными при проведении расчетов в рамках неабелевых калибровочных теорий.

В разделе 2.1.1 изучена структура электромагнитной вершинной функции нейтрино. Разложение вершинной функции фермиона на четыре фактора, представленное, например, в работах [67, 68], производилось с использованием общих принципов, таких как лоренц- и СР-инвариантность, сохранение электромагнитного тока, а также условие эрмитовости оператора электромагнитного тока. В настоящей работе исследуется данное разложение и подтверждается его справедливость с помощью прямого расчета для случая массивного нейтрино в рамках минимально расширенной стандартной модели дополненной $SU(2)$ -синглетным правым нейтрино. В разделе 2.1.2 показано, что при определенном выборе калибровочных параметров электромагнитная вершинная функция массивного нейтрино становится конечной, т.е. выражения для всех электромагнитных формфакторов не содержат ультрафиолетовых расходимостей.

В разделе 2.2 приведены вклады всех фейнмановских диаграмм в зарядовый формфактор массивного нейтрино, причем значение импульса внешнего фотона при этом не фиксировалось. Данные вклады точно учитывают значения массовых параметров заряженного лептона $a = (m_\ell/M_W)^2$ и нейтрино $b = (m_\nu/M_W)^2$. Значение калибровочного параметра в полученных формулах также является произвольным.

С помощью результатов раздела 2.2 в разделе 2.2.1 изучаются вклады различных фейнмановских диаграмм в электрический заряд нейтрино и

анализируется их зависимость от массы нейтрино и от параметра, фиксирующего калибровку. Несмотря на тот очевидный факт, что электрический заряд нейтрино не зависит от выбора калибровки и равен нулю, на данный момент это не было продемонстрировано прямым расчетом в случае массивного нейтрино. Приведены выражения вкладов, содержащих правильную зависимость от калибровочного параметра, нескольких однопетлевых фейнмановских диаграмм в заряд нейтрино, которые были ранее вычислены с ошибками в статье [54].

На основе вкладов в электромагнитную вершинную функцию от однопетлевых фейнмановских диаграмм, представленных в разделе 2.1, в разделе 2.3 приведены вклады всех фейнмановских диаграмм в магнитный формфактор массивного нейтрино, причем значение импульса внешнего фотона при этом не фиксировалось. Данные вклады точно учитывают значения массовых параметров заряженного лептона a и нейтрино b . Значение калибровочного параметра в полученных выражениях также было произвольным. В разделе 2.3.1 была исследована зависимость магнитного формфактора массивного нейтрино от квадрата импульса внешнего фотона при различных значениях калибровочного параметра.

Используя результаты раздела 2.3, в разделе 2.3.2 рассмотрен магнитный момент нейтрино. Для каждого из вкладов в магнитный момент нейтрино получены интегральные выражения, точно учитывающие зависимость от калибровочного параметра, а также от массовых параметров нейтрино b и заряженного лептона a . Для каждой из диаграмм выполнено интегрирование по фейнмановским параметрам и получены выражения для вкладов в магнитный момент нейтрино в первом ненулевом и следующем за ним порядках в разложении по массовому параметру нейтрино b , причем зависимость от калибровочного параметра оставалась произвольной. Оказывается, что сумма всех вкладов не зависит от выбора калибровки. Однако, выражения для вкладов от нескольких диаграмм в первом поряд-

ке разложения, полученные в данной работе, не согласуются с представленными ранее в статье [54]. Результаты, полученные в настоящей работе, позволяют воспроизвести правильное выражение в любой калибровке, включая унитарную, для которой вычисления, выполненные в статье [54], дают неверный результат. Выражения для магнитного момента массивного нейтрино дают возможность исследовать зависимость магнитного момента от масс всех частиц. В частности, в разделе 2.3.2 рассмотрены следующие диапазоны масс: $m_\nu \ll m_\ell \ll M_W$, $m_\ell \ll m_\nu \ll M_W$ и $m_\ell \ll M_W \ll m_\nu$, которые охватывают практически все экспериментально допустимые значения масс нейтрино, заряженного лептона и W -бозона.

В разделе 2.4 приведены вклады всех фейнмановских диаграмм в анапольный формфактор массивного нейтрино, причем значение импульса внешнего фотона при этом не фиксировалось. Данные вклады точно учитывают значения массовых параметров заряженного лептона a и нейтрино b . Значение калибровочного параметра в полученных формулах также было произвольным.

С помощью результатов раздела 2.4, в разделе 2.4.1 получены вклады различных фейнмановских диаграмм в анапольный момент массивного нейтрино на основе выражения для анапольного формфактора при нулевой передаче импульса. Показано, что также, как и в случае безмассовой частицы, анапольный момент массивного нейтрино является расходящейся величиной и зависит от выбора калибровки.

Результаты данной главы содержатся в нашей работе [55]

2.1 Вершинная функция нейтрино

Матричный элемент электромагнитного тока, усредненный по состояниям нейтрино, может быть представлен в форме

$$\langle \nu(p') | J_\mu^{\text{EM}} | \nu(p) \rangle = \bar{u}(p') \Lambda_\mu(q) u(p),$$

в котором самым общим выражением для электромагнитной вершинной функции $\Lambda_\mu(q)$ является

$$\Lambda_\mu(q) = f_Q(q^2)\gamma_\mu + f_M(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu - f_E(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 + f_A(q^2)(q^2\gamma_\mu - q_\mu \not{q})\gamma_5. \quad (2.1.1)$$

Здесь $f_Q(q^2)$, $f_M(q^2)$, $f_E(q^2)$ и $f_A(q^2)$ - зарядовый, дипольные магнитный и электрический, и анапольный формфакторы нейтрино, $q_\mu = p'_\mu - p_\mu$, $\sigma_{\mu\nu} = (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, $\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Мы также для свертки с γ -матрицами используем обозначение $\not{q} = q_\mu\gamma^\mu$.

Значения данных формфакторов при $q^2 = 0$ определяют статические электромагнитные свойства нейтрино. В случае дираковского нейтрино, который будет обсуждаться в настоящей работе, предположение о СР-инвариантности вместе с эрмитовостью оператора электромагнитного тока J_μ^{EM} приводят к тому, что дипольный электрический формфактор равен нулю. При нулевой передаче импульса только $f_Q(0)$ и $f_M(0)$, которые называются электрическим зарядом и магнитным моментом, дают вклад в гамильтониан $H_{\text{int}} \sim J_\mu^{\text{EM}}A^\mu$, описывающий взаимодействие фермиона с внешним электромагнитным полем A^μ .

Существует принципиальное различие между выражениями для электромагнитной функции нейтрино в случаях массивного и безмассового нейтрино. Если рассматривается безмассовая элементарная частица, тогда из соотношения (2.1.1) следует, что матричный элемент электромагнитного тока может быть записан с помощью только одного формфактора (см., например, работу [63]),

$$\bar{u}(p')\Lambda_\mu(q)u(p) = f_D(q^2)\bar{u}(p')\gamma_\mu(1 + \gamma_5)u(p).$$

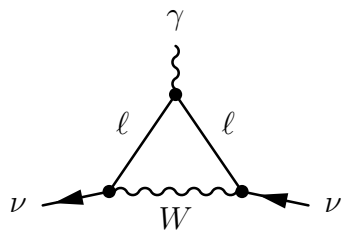
Откуда следует, что зарядовый и анапольный формфакторы связаны с функцией $f_D(q^2)$ с помощью очевидных соотношений,

$$f_Q(q^2) = f_D(q^2), \quad f_A(q^2) = f_D(q^2)/q^2.$$

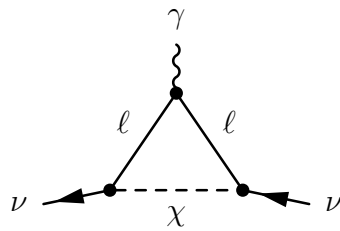
Однако в случае массивной элементарной частицы не существует такой простой связи между зарядовым и анапольным формфакторами, т.к. нельзя пренебрегать матричным слагаемым вида $q_\mu \not{A} \gamma_5$ в члене, пропорциональном анапольному формфактору. Более того, при прямом вычислении электромагнитных формфакторов нейтрино было обнаружено, что кроме обычных электрического заряда и магнитного момента, каждая из фейнмановских диаграмм дает ненулевой вклад в дополнительный член, пропорциональный матрице $\gamma_\mu \gamma_5$. Эти вклады не равны нулю даже при $q^2 = 0$. Однако, используя методику, развитую для исследования электрического заряда нейтрино, в разделе 2.1.1 получено, что сумма данных вкладов от всех фейнмановских диаграмм в дополнительный «формфактор» равна нулю при $q^2 = 0$. Равенство нулю рассматриваемого «формфактора» при $q^2 \neq 0$ в особой калибровке также доказано в данной работе.

Ниже приведено вычисление однопетлевых фейнмановских диаграмм для электрического заряда и магнитного момента массивного нейтрино в рамках минимально расширенной стандартной модели с SU(2)-синглетным правым нейтрино в общей R_ξ -калибровке. Данные диаграммы можно разделить на два типа: треугольные [см., Рис. 2.1(a)-2.1(f)] и $\gamma - Z$ собственно-энергетические диаграммы [см., Рис. 2.2(a)-2.2(h)]. Используя правила Фейнмана, приведенные в приложении А, можно найти вклады в вершинную функцию нейтрино $\Lambda_\mu(q)$. Применяя размерную регуляризацию, вклады треугольных диаграмм [Рис. 2.1(a)-2.1(f)] могут быть записаны как

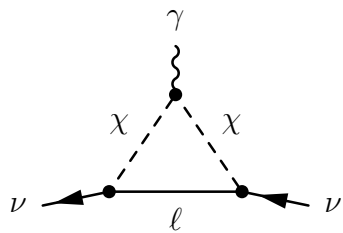
$$\Lambda_\mu^{(1)} = i \frac{eg^2}{2} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \left[g^{\kappa\lambda} - (1 - \alpha) \frac{k^\kappa k^\lambda}{k^2 - \alpha M_W^2} \right] \times \frac{\gamma_\kappa^L (\not{p}' - \not{k} + m_\ell) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m_\ell) \gamma_\lambda^L}{[(p' - k)^2 - m_\ell^2][(p - k)^2 - m_\ell^2][k^2 - M_W^2]}, \quad (2.1.2)$$



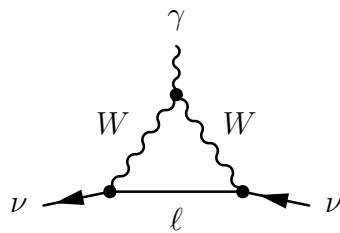
(a)



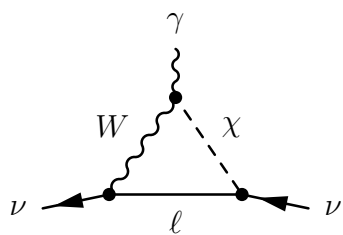
(b)



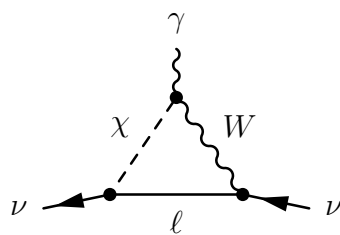
(c)



(d)



(e)



(f)

Рис. 2.1: (a)-(f) треугольные диаграммы.

$$\Lambda_\mu^{(2)} = i \frac{eg^2}{2M_W^2} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \times \frac{(m_\nu P_L - m_\ell P_R)(\not{p}' - \not{k} + m_\ell)\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + m_\ell)(m_\ell P_L - m_\nu P_R)}{[(p' - k)^2 - m_\ell^2][(p - k)^2 - m_\ell^2][k^2 - \alpha M_W^2]}, \quad (2.1.3)$$

$$\Lambda_\mu^{(3)} = i \frac{eg^2}{2M_W^2} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} (2k - p - p')_\mu \times \frac{(m_\nu P_L - m_\ell P_R)(\not{k} + m_\ell)(m_\ell P_L - m_\nu P_R)}{[(p' - k)^2 - \alpha M_W^2][(p - k)^2 - \alpha M_W^2][k^2 - m_\ell^2]}, \quad (2.1.4)$$

$$\Lambda_\mu^{(4)} = i \frac{eg^2}{2} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \gamma_\kappa^L(\not{k} + m_\ell)\gamma_\lambda^L \left[\delta_\beta^\kappa - (1 - \alpha) \frac{(p' - k)^\kappa (p' - k)_\beta}{(p' - k)^2 - \alpha M_W^2} \right] \times \left[\delta_\gamma^\lambda - (1 - \alpha) \frac{(p - k)^\lambda (p - k)_\gamma}{(p - k)^2 - \alpha M_W^2} \right] \times \frac{\delta_\mu^\beta (2p' - p - k)^\gamma + g^{\beta\gamma} (2k - p - p')_\mu + \delta_\mu^\gamma (2p - p' - k)^\beta}{[(p' - k)^2 - M_W^2][(p - k)^2 - M_W^2][k^2 - m_\ell^2]}, \quad (2.1.5)$$

$$\Lambda_\mu^{(5)+(6)} = i \frac{eg^2}{2} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \left\{ \frac{\gamma_\beta^L(\not{k} - m_\ell)(m_\ell P_L - m_\nu P_R)}{[(p' - k)^2 - M_W^2][(p - k)^2 - \alpha M_W^2][k^2 - m_\ell^2]} \times \left[\delta_\mu^\beta - (1 - \alpha) \frac{(p' - k)^\beta (p' - k)_\mu}{(p' - k)^2 - \alpha M_W^2} \right] - \frac{(m_\nu P_L - m_\ell P_R)(\not{k} - m_\ell)\gamma_\beta^L}{[(p' - k)^2 - \alpha M_W^2][(p - k)^2 - M_W^2][k^2 - m_\ell^2]} \times \left[\delta_\mu^\beta - (1 - \alpha) \frac{(p - k)^\beta (p - k)_\mu}{(p - k)^2 - \alpha M_W^2} \right] \right\}, \quad (2.1.6)$$

где m_ν , M_W и m_ℓ - массы нейтрино, W -бозона и заряженного лептона, представляющего собой нижнюю компоненту изодублета по отношению к нейтрино, e - заряд протона, g - константа связи в стандартной модели, θ_W - угол Вайнберга, $\alpha = 1/\xi$ - калибровочный параметр W -бозона, $P_{L,R} = (1 \pm \gamma_5)/2$ - проекционные операторы.

Вклады $\gamma - Z$ диаграмм [Рис. 2.2(a)-2.2(h)] в вершинную функцию $\Lambda_\mu(q)$ даются следующими выражениями

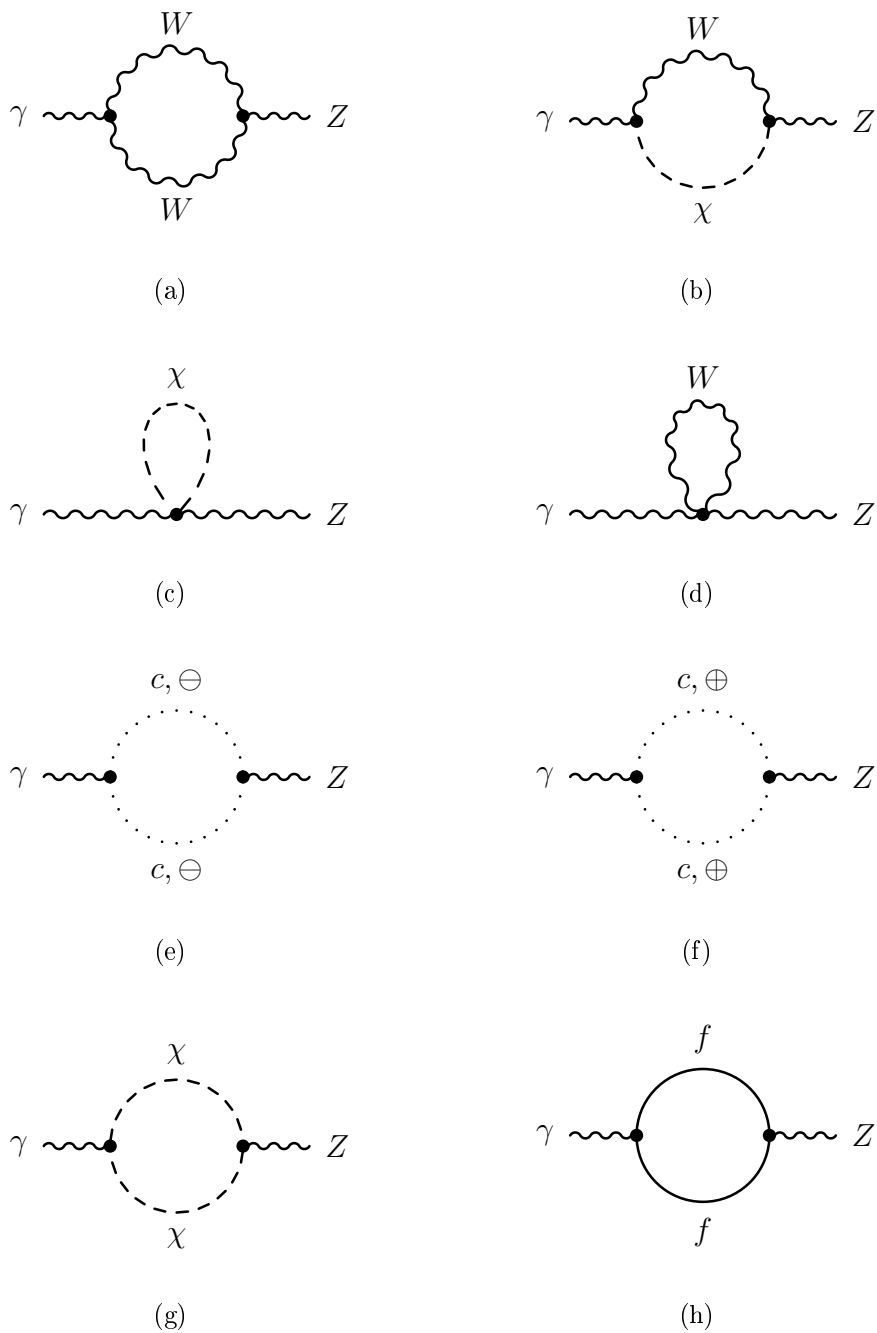


Рис. 2.2: (a)-(h) $\gamma - Z$ диаграммы; f обозначает электрон, мюон, τ -лептон, а также u , c , t , d , s и b кварки.

$$\Lambda_{\mu}^{(j)}(q) = \frac{g}{2 \cos \theta_W} \Pi_{\mu\nu}^{(j)}(q) \frac{1}{q^2 - M_Z^2} \left\{ g^{\nu\alpha} - (1 - \alpha_Z) \frac{q^{\nu} q^{\alpha}}{q^2 - \alpha_Z M_Z^2} \right\} \gamma_{\alpha}^L, \quad j = 7, \dots, 14, \quad (2.1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(7)}(q) = & -ieg \cos \theta_W \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{[(k-q)^2 - M_W^2][k^2 - M_W^2]} \times \\ & \left[g_{\gamma\alpha} - (1 - \alpha) \frac{(k-q)_{\gamma} (k-q)_{\alpha}}{(k-q)^2 - \alpha M_W^2} \right] \left[g_{\beta\lambda} - (1 - \alpha) \frac{k_{\beta} k_{\lambda}}{k^2 - \alpha M_W^2} \right] \times \\ & [(k+q)^{\gamma} \delta_{\mu}^{\beta} + (q-2k)_{\mu} g^{\beta\gamma} + (k-2q)^{\beta} \delta_{\mu}^{\gamma}] \times \\ & [(k+q)^{\alpha} \delta_{\nu}^{\lambda} + (q-2k)_{\nu} g^{\alpha\lambda} + (k-2q)^{\lambda} \delta_{\nu}^{\alpha}], \quad (2.1.8) \end{aligned}$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{(8)}(q) = -2ieg \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W} M_W^2 \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{[(k-q)^2 - \alpha M_W^2][k^2 - M_W^2]} \times \left[g_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2 - \alpha M_W^2} \right], \quad (2.1.9)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{(9)}(q) = ieg \frac{\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - \alpha M_W^2}, \quad (2.1.10)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(10)}(q) = & -ieg \cos \theta_W \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha} - 2g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}}{[k^2 - M_W^2]} \times \\ & \left[g_{\alpha\beta} - (1 - \alpha) \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2 - \alpha M_W^2} \right], \quad (2.1.11) \end{aligned}$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{(11)+(12)}(q) = 2ieg \cos \theta_W \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \times \frac{k_{\mu} (k-q)_{\nu}}{[(k-q)^2 - \alpha M_W^2][k^2 - \alpha M_W^2]}, \quad (2.1.12)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{(13)}(q) = ieg \frac{\sin^2 \theta_W - \cos^2 \theta_W}{2 \cos \theta_W} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} (2k-q)_{\mu} (2k-q)_{\nu} \times \frac{1}{[(k-q)^2 - \alpha M_W^2][k^2 - \alpha M_W^2]}, \quad (2.1.13)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(14)}(q) &= \frac{ieg}{2 \cos \theta_W} \sum_f Q_f \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{[(k-q)^2 - m_f^2][k^2 - m_f^2]} \times \\ &\text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{k} + m_f) \gamma_\nu \left\{ \pm \frac{1}{2} - 2Q_f \sin^2 \theta_W \pm \frac{1}{2} \gamma_5 \right\} (\not{k} - \not{q} + m_f) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Здесь M_Z и α_Z обозначают массу и калибровочный параметр Z -бозона. В выражении (2.1.14) знаки « $-$ » и « $+$ » ставятся в случае «верхних» (u , c и t кварки) и «нижних» (электрон, мюон, τ -лептон а также d , s и b кварки) компонент изодублета, m_f и Q_f - масса и электрический заряд (в единицах e) фермиона в петле.

В дальнейшем будет удобно разложить каждый из вкладов $\gamma - Z$ диаграмм при произвольном q^2 и явно выделить поперечную часть

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(j)}(q) &= A^{(j)}(\alpha, q^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + B^{(j)}(\alpha, q^2) g_{\mu\nu}, \\ & j = 7, \dots, 14. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Используя выражения (2.1.8)-(2.1.14) для вкладов $\gamma - Z$ диаграмм в форме фейнмановских интегралов, а также формулу (2.1.15), можно вычислить функции $A^{(j)}(\alpha, q^2)$ и $B^{(j)}(\alpha, q^2)$, $j = 7, \dots, 14$, в явном виде

$$\begin{aligned} A^{(7)}(\alpha, q^2) &= 2M_W^2 \cos^3 \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_F \tau \left[\omega \left(-\frac{14}{3} + \alpha \right) + \frac{1}{6} + \frac{\alpha}{2} - \right. \\ & 2\tau \int_0^1 dx (1-x^2)^2 \{ \ln(1-\zeta - x(1-\alpha)) - \ln(1-\zeta) \} + \\ & 2 \int_0^1 dx (5x^2 - 5x - 1) \ln(1-\zeta) - 2 \int_0^1 dx (4x^2 - 3) \times \\ & \{ (1-\zeta - x(1-\alpha)) \ln(1-\zeta - x(1-\alpha)) - (1-\zeta) \ln(1-\zeta) \} + \\ & \left. \frac{\tau}{2} \int_0^1 dx \{ 2(1-\zeta - x(1-\alpha)) \ln(1-\zeta - x(1-\alpha)) - \right. \\ & \left. (1-\zeta) \ln(1-\zeta) - (\alpha - \zeta) \ln(\alpha - \zeta) \} \right], \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

$$A^{(8)}(\alpha, q^2) = -4M_W^2 \cos \theta_W \sin^3 \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_{F\tau} \times \int_0^1 dx x^2 \{ \ln(1 - \zeta - x(1 - \alpha)) - \ln(\alpha - \zeta) \}, \quad (2.1.17)$$

$$A^{(9)}(\alpha, q^2) = 0, \quad (2.1.18)$$

$$A^{(10)}(\alpha, q^2) = 0, \quad (2.1.19)$$

$$A^{(11)+(12)}(\alpha, q^2) = 2M_W^2 \cos^3 \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_{F\tau} \times \left[\frac{\omega}{3} + 2 \int_0^1 dx x(1-x) \ln(\alpha - \zeta) \right], \quad (2.1.20)$$

$$A^{(13)}(\alpha, q^2) = M_W^2 (\sin^2 \theta_W - \cos^2 \theta_W) \cos \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_{F\tau} \times \left[-\frac{\omega}{3} - \int_0^1 dx (2x-1)^2 \ln(\alpha - \zeta) \right], \quad (2.1.21)$$

$$A^{(14)}(\alpha, q^2) = 8M_W^2 \cos \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_{F\tau} \times \left[\frac{\omega}{6} \left(-3 - \frac{28}{3} \sin^2 \theta_W \right) + \sum_f Q_f \left(\pm \frac{1}{2} - 2Q_f \sin^2 \theta_W \right) \times \left\{ \frac{1}{6} \ln \left(\frac{m_f}{M} \right)^2 + \int_0^1 dx x(1-x) \ln(1 - (M/m_f)^2 \zeta) \right\} \right], \quad (2.1.22)$$

$$B^{(7)}(\alpha, q^2) = 2M_W^2 \cos^3 \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_F \left[\omega \left(\frac{\tau}{2} - \frac{12 + 3\alpha(1 + \alpha)}{2} \right) + \frac{3}{4}(2 + \alpha(1 + \alpha)) - \frac{\tau}{24}(25 + 3\alpha) - 3\tau \int_0^1 dx (2x-1)^2 \ln(1 - \zeta) - 9 \int_0^1 dx (1 - \zeta) \ln(1 - \zeta) - 3\tau \int_0^1 dx x^2 \{ (1 - \zeta - x(1 - \alpha)) \ln(1 - \zeta - x(1 - \alpha)) - (1 - \zeta) \ln(1 - \zeta) \} - \frac{9}{2} \int_0^1 dx \{ (1 - \zeta - x(1 - \alpha))^2 \ln(1 - \zeta - x(1 - \alpha)) - (1 - \zeta)^2 \ln(1 - \zeta) \} \right], \quad (2.1.23)$$

$$\begin{aligned}
B^{(8)}(\alpha, q^2) = & 2M_W^2 \cos \theta_W \sin^3 \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_F \left[-\omega \frac{3+\alpha}{2} - \frac{1-\alpha}{2} - \right. \\
& 2 \int_0^1 dx \ln(1-\zeta-x(1-\alpha)) + \\
& \int_0^1 dx \{ (1-\zeta-x(1-\alpha)) \ln(1-\zeta-x(1-\alpha)) - (\alpha-\zeta) \ln(\alpha-\zeta) \} + \\
& \left. 2\tau \int_0^1 dx x^2 \{ \ln(1-\zeta-x(1-\alpha)) - \ln(\alpha-\zeta) \} \right], \quad (2.1.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{(9)}(\alpha, q^2) = & 2M_W^2 (\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) \cos \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_F \times \\
& [\alpha(\omega-1) + \alpha \ln \alpha], \quad (2.1.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{(10)}(\alpha, q^2) = & 6M_W^2 \cos^3 \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_F \times \\
& \left[\omega \frac{3+\alpha^2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{5\alpha^2}{12} + \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{2} \right], \quad (2.1.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{(11)+(12)}(\alpha, q^2) = & 2M_W^2 \cos^3 \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_F \left[\omega \left(\alpha - \frac{\tau}{2} \right) - \alpha + \frac{\tau}{6} + \right. \\
& \left. \int_0^1 dx (\alpha - \zeta) \ln(\alpha - \zeta) - 2\tau \int_0^1 dx x(1-x) \ln(\alpha - \zeta) \right], \quad (2.1.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{(13)}(\alpha, q^2) = & 2M_W^2 (\sin^2 \theta_W - \cos^2 \theta_W) \cos \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \tilde{G}_F \times \\
& \left[\alpha(\omega-1) + \frac{\tau}{6} + \int_0^1 dx (\alpha - \zeta) \ln(\alpha - \zeta) + \right. \\
& \left. \frac{\tau}{2} \int_0^1 dx (2x-1)^2 \ln(\alpha - \zeta) \right], \quad (2.1.28)
\end{aligned}$$

$$B^{(14)}(\alpha, q^2) = 0, \quad (2.1.29)$$

где

$$\tilde{G}_F = \frac{G_F}{4\pi^2 \sqrt{2}}, \quad \omega = -\frac{1}{\varepsilon} - \ln(4\pi^2) + \mathbb{C} - \ln \left(\frac{\lambda^2}{M_W^2} \right),$$

и G_F - константа Ферми, $\zeta = \tau x(1-x)$, $\tau = q^2/M_W^2$.

При выводе соотношений (2.1.16)-(2.1.29) мы воспользовались свойствами алгебры γ -матриц в пространстве N измерений и выражениями для характерных фейнмановских интегралов, представленных в приложении В.

2.1.1 Структура электромагнитной вершинной функции массивного нейтрино

При вычислении электромагнитной вершинной функции было обнаружено, что кроме четырех хорошо известных формфакторов в выражении (2.1.1), появляется дополнительный член, пропорциональный матрице $\gamma_\mu \gamma_5$. Обозначим соответствующий «формфактор» как $f_5(q^2)$. В этом разделе исследуется функция $f_5(q^2)$ и доказывается, что она нулю.

Прежде всего, давайте рассмотрим значение $\varphi = f_5(q^2 = 0)$. Вклады треугольных диаграмм в «заряд» φ имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(a, b, \alpha) = & \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ \omega \frac{\alpha}{2} + 1 + \frac{1-\alpha}{12} + \int_0^1 dz (1-z) \ln D - \right. \\ & \int_0^1 dz (1-z)(a-bz^2) \frac{1}{D} + \frac{b}{2} \int_0^1 dz (1-z)^3 (a-bz^2) \left[\frac{1}{D_\alpha} - \frac{1}{D} \right] - \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 dz (1-z)(a-b+6bz(1-z)) [\ln D_\alpha - \ln D] + \\ & \left. 3 \int_0^1 dz (1-z) [D_\alpha \ln D_\alpha - D \ln D] \right\}, \quad (2.1.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(a, b, \alpha) = & \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ \frac{a-b}{2} \left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} + \int_0^1 dz (1-z) \ln D_\alpha \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \int_0^1 dz (1-z)(a^2 - abz^2 + b^2 z^2 - ab) \frac{1}{D_\alpha} \right\}, \quad (2.1.31) \end{aligned}$$

$$\varphi^{(3)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \frac{a-b}{2} \left(-\frac{\omega}{2} - \int_0^1 dz z \ln D_\alpha \right), \quad (2.1.32)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)}(a, b, \alpha) = & \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ -\omega \frac{3}{4}(1+\alpha) - 1 - \right. \\ & 3 \int_0^1 dz z \ln D + b \int_0^1 dz z^2 (1-z) \frac{1}{D} - \\ & \left. \frac{9}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy [(D_\alpha + y(1-\alpha)) \ln(D_\alpha + y(1-\alpha)) - D \ln D] - \right. \end{aligned}$$

$$b^2 \int_0^1 dz \int_0^z dy (1-z)^2 (z(1-z) - 2y) \left[\frac{1}{D_\alpha + y(1-\alpha)} - \frac{1}{D} \right] - \frac{b}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (7 - 18z + 11z^2) [\ln(D_\alpha + y(1-\alpha)) - \ln D] \Big\}, \quad (2.1.33)$$

$$\varphi^{(5)+(6)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ \int_0^1 dz \int_0^z dy (a - bz) \frac{1}{D_\alpha + y(1-\alpha)} - \frac{a-b}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy [\ln(D_\alpha + y(1-\alpha)) - \ln D_\alpha] \right\}. \quad (2.1.34)$$

где

$$a = \left(\frac{m_\ell}{M_W} \right)^2, \quad b = \left(\frac{m_\nu}{M_W} \right)^2,$$

и $D_\alpha = a + (\alpha - a)z - bz(1 - z)$, $D = D_{\alpha=1} = a + (1 - a)z - bz(1 - z)$. В соотношениях (2.1.30)-(2.1.34) массовые параметры a и b , а также калибровочный параметр α считались произвольными.

Интегралы в выражениях (2.1.30)-(2.1.34) были вычислены, однако результаты, выраженные в элементарных функциях, оказались довольно громоздкими. Поэтому, разложим подынтегральные выражения в ряд по массовому параметру нейтрино b , выделим первые два члена получившегося ряда, а затем выполним интегрирования по фейнмановским параметрам. Заметим, что все вычисления производились при произвольных массовом параметре заряженного лептона a и калибровочном параметре α . В этом случае сумма вкладов треугольных диаграмм в «заряд» φ может быть записана как

$$\varphi^{(\text{prop.vert.})}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \sum_{i=1}^6 \{ \bar{\varphi}_0^{(i)}(a, \alpha) + b \bar{\varphi}_1^{(i)}(a, \alpha) + \mathcal{O}(b^2) \}. \quad (2.1.35)$$

Вклады $\gamma - Z$ диаграмм в «заряд» φ совпадают со вкладами в электрический заряд нейтрино $Q^{(\gamma-Z)}$ и, следовательно, даются соотношением (2.2.25) (детали вычисления заряда нейтрино подробно обсуждаются в разделе 2.2.1).

Функции $\bar{\varphi}_0^{(i)}(a, \alpha)$ и $\bar{\varphi}_1^{(i)}(a, \alpha)$ были вычислены и было обнаружено, что сумма всех вкладов в $\bar{\varphi}_0^{(i)}(a, \alpha)$ сокращается со вкладами $\gamma - Z$ диаграмм.

Этот результат соответствует случаю безмассовой частицы. Таким образом, «заряд» φ безмассового нейтрино равен нулю. Затем, суммируя вклады в $\bar{\varphi}_1^{(i)}(a, \alpha)$, находим, что значение «заряда» φ также равняется нулю в следующем порядке разложения по параметру b .

Теперь давайте рассмотрим значения «формфактора» $f_5(q^2)$ при ненулевой передаче импульса. В последующих расчетах необходимо зафиксировать выбор калибровочного параметра для того, чтобы несколько упростить вычисления. Положим $\alpha_Z = \infty$ и $\alpha = 1$, что соответствует унитарной калибровке для Z -бозона и калибровке 'т Хофта-Фейнмана для W -бозона. Заметим, что массовые параметры a и b являются произвольными во всех формулах, т.е. мы не ограничиваемся рассмотрением случая или легкого заряженного лептона или, как это довольно часто предполагается, легкого нейтрино. Используя явный вид функций $B^{(j)}(\alpha, q^2)$ [см. выражение (2.1.15), а также формулы (2.1.23)-(2.1.29)], получаем, что в нашем случае функция $B(q^2)$ в разложении $\gamma - Z$ диаграмм имеет форму:

$$B(q^2) = \sum_{j=7}^{14} B^{(j)}(\alpha = 1, q^2) = 2M_W^2 \cos \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \frac{G_F}{4\pi^2 \sqrt{2}} (-2\omega + g_c(\tau) \cos^2 \theta_W + g_s(\tau) \sin^2 \theta_W),$$

где

$$g_c(\tau) = -\frac{7}{6}\tau - 9 \int_0^1 dx \ln(1 - \zeta) - \frac{7\tau}{2} \int_0^1 dx (6x^2 - 6x + 1) \ln(1 - \zeta),$$

$$g_s(\tau) = \frac{\tau}{6} - \int_0^1 dx \ln(1 - \zeta) + \frac{\tau}{2} \int_0^1 dx (6x^2 - 6x + 1) \ln(1 - \zeta),$$

Заметим, что $g_s(0) = g_c(0) = 0$. Чтобы показать, что $g_s(\tau) = g_c(\tau)$ при любом значении τ , рассмотрим разность этих функций: $g(\tau) = g_s(\tau) - g_c(\tau)$. Функция $g(\tau)$ может быть записана следующим образом

$$g(\tau) = \frac{4}{3}\tau + 8 \int_0^1 dx \ln(1 - \zeta) + 4\tau \int_0^1 dx (6x^2 - 6x + 1) \ln(1 - \zeta).$$

Разлагая $\ln(1 - \zeta)$ в формальный ряд

$$\ln(1 - \zeta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k} x^k (1 - x)^k,$$

и выполняя интегрирование по параметру x с помощью формулы

$$\int_0^1 dx x^l (1 - x)^s = \frac{(l + 1)!(s + 1)!}{(l + s + 2)!}, \quad (2.1.36)$$

получаем, что функция $g(\tau)$ равна нулю при любом значении τ . Таким образом, выражение для $B(q^2)$ может быть представлено в форме

$$B(q^2) = 2M_W^2 \cos \theta_W \sin \theta_W M_Z^2 \frac{G_F}{4\pi^2 \sqrt{2}} (-2\omega + g_s(\tau)).$$

Заметим, что аналогичным образом можно доказать отсутствие множителей вида $\cos^2 \theta_W$ и $\sin^2 \theta_W$ в выражении для функции $B(\alpha, q^2)$ при произвольном значении калибровочного параметра α .

Таким образом, вклады $\gamma - Z$ диаграмм имеют вид:

$$f_5^{(\gamma-Z)}(q^2) = - \frac{g}{4M_Z^2 \cos^2 \theta_W} B(q^2).$$

Обсудим теперь вклады треугольных диаграмм, изображенных на Рис. 2.1(a)-2.1(f) в «формфактор» $f_5(q^2)$ при произвольном q^2 :

$$\begin{aligned} f_5^{(\text{prop.vert.})}(q^2) &= \sum_{i=1}^6 f_5^{(i)}(q^2) = \frac{eG_F}{4\pi^2 \sqrt{2}} M_W^2 \times \\ &\left\{ -\omega + \int_0^1 dz \int_0^z dy \ln(D' - \tau y(z - y)) - 3 \int_0^1 dz \int_0^z dy \ln(D - \tau y(z - y)) + \right. \\ &\frac{a-b}{2} \left(\int_0^1 dz \int_0^z dy \ln(D' - \tau y(z - y)) - \int_0^1 dz \int_0^z dy \ln(D - \tau y(z - y)) + \frac{1}{2} \right) + \\ &\left(1 + \frac{a-b}{2} \right) \int_0^1 dz \int_0^z dy \frac{1}{D' - \tau y(z - y)} \times \\ &\left. \left[-(a - b(1 - z)^2) + \tau \left(\frac{1}{2} z(1 - z) + y(z - y) \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dz \int_0^z dy \frac{1}{D - \tau y(z - y)} \left[a - bz^2 + \tau \left(3y(z - y) - \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}(a - b)z^2 + (a - b)y(z - y) \right) \right] \Bigg\}, \quad (2.1.37)$$

где $D' = 1 + (a - 1)z - bz(1 - z)$.

Выражение (2.1.37) может быть проанализировано аналогичным способом как и функция $g(\tau)$. Например, приведем вычисление одного из интегралов в соотношении (2.1.37):

$$I(\tau) = \int_0^1 dz \int_0^z dy (a - bz^2) \frac{1}{D - \tau y(z - y)}. \quad (2.1.38)$$

Подынтегральное выражение в формуле (2.1.38) снова должно быть разложено в формальный ряд:

$$\frac{1}{D - \tau y(z - y)} = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{D} \right)^k y^k (z - y)^k.$$

Затем, используя формулу (2.1.36), вычисляем интеграл по переменной y . Полученный результат следует преобразовать с использованием тождества

$$\int_0^1 dz \frac{z^l}{D^{k+1}} (a - bz^2) = \frac{1}{k} + \frac{k - l - 1}{k} \int_0^1 dz \frac{z^l}{D^k}, \quad k \geq 1, \quad l \geq 0,$$

которое может быть доказано с помощью интегрирования по частям. В результате получаем следующее выражение для функции $I(\tau)$:

$$I(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} \tau^k \int_0^1 dz \frac{z^{2k+1}}{D^k}. \quad (2.1.39)$$

Следует отметить, что первое слагаемое в формуле (2.1.39) не зависит ни от массового параметра нейтрино, ни от массового параметра заряженного лептона. Именно это слагаемое сокращается со вкладом $\gamma - Z$ диаграмм. Последующий анализ оставшихся вкладов треугольных диаграмм может быть проведен аналогичным образом, как и для случая функции $I(\tau)$. В конечном итоге получаем, что

$$f_5(q^2) = f_5^{(\gamma-Z)}(q^2) + f_5^{(\text{prop.vert.})}(q^2) = 0$$

для любого значения q^2 и произвольных величин массовых параметров заряженного лептона a , и нейтрино b .

2.1.2 Исследование расходимостей в электромагнитной вершинной функции нейтрино

В данном разделе рассмотрим расходящиеся части всех формфакторов, входящих в формулу (2.1.1). Сумма вкладов расходящихся частей треугольных диаграмм (2.1.2)-(2.1.6) в электромагнитную вершинную функцию массивного нейтрино имеет вид

$$\Lambda_{\mu}^{(\text{div.prop.vert.})}(q) = -\frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}M_W^2\omega\frac{3+\alpha}{2}\gamma_{\mu}^L. \quad (2.1.40)$$

Заметим, что выражение (2.1.40) не зависит от импульса внешнего фотона q_{μ} .

В дальнейшем для анализа расходящихся вкладов $\gamma-Z$ диаграмм (2.1.8)-(2.1.14) удобно воспользоваться соотношениями (2.1.7) и (2.1.15). Используя данные формулы получаем следующее выражение для суммы вкладов $\gamma-Z$ диаграмм в электромагнитную вершинную функцию массивного нейтрино

$$\Lambda_{\mu}^{(\gamma-Z)}(q) = \frac{g}{4\cos\theta_W} \left[\frac{A(\alpha, q^2) + B(\alpha, q^2)}{q^2 - M_Z^2} \gamma_{\mu} + \frac{\alpha_Z B(\alpha, q^2)}{q^2 - \alpha_Z M_Z^2} \gamma_{\mu} \gamma_5 + \frac{1}{q^2 - M_Z^2} \left\{ \frac{A(\alpha, q^2)}{q^2} + (1 - \alpha_Z) \frac{B(\alpha, q^2)}{q^2 - \alpha_Z M_Z^2} \right\} (q^2 \gamma_{\mu} - q_{\mu} \not{q}) \gamma_5 \right]. \quad (2.1.41)$$

Расходящиеся части функций $A(\alpha, q^2)$ и $B(\alpha, q^2)$ имеют вид

$$A^{\text{div}}(\alpha, q^2) = 2M_W^2 \cos\theta_W \sin\theta_W M_Z^2 \tilde{G}_{F\tau\omega} \times \left\{ \left(\alpha - \frac{37}{6} \right) \cos^2\theta_W - \frac{151}{18} \sin^2\theta_W \right\}, \quad (2.1.42)$$

$$B^{\text{div}}(\alpha, q^2) = -2M_W^2 \cos\theta_W \sin\theta_W M_Z^2 \tilde{G}_{F\omega} \frac{3+\alpha}{2}. \quad (2.1.43)$$

Используя формулы (2.1.40)-(2.1.43) получаем, что все формфакторы, кроме магнитного, содержат расходимости и зависят от выбора калибровки (как от α , так и от α_Z). Несмотря на этот факт, можно выбрать калибровочные параметры таким образом, чтобы полное выражение для $\Lambda_\mu(q)$, включающее в себя вклады треугольных [Рис. 2.1(a)-2.1(f)] и $\gamma - Z$ [Рис. 2.2(a)-2.2(h)] диаграмм, не содержало ультрафиолетовых расходимостей. Действительно, фиксируя калибровочные параметры следующим образом

$$\alpha = \frac{1}{9}(138 + 151 \operatorname{tg}^2 \theta_W), \quad \alpha_Z = +\infty,$$

мы приходим к тому, что все члены в $\Lambda_\mu(q)$, содержащие полюс $1/\varepsilon$, взаимно сокращаются. Таким образом, в данной калибровке электромагнитная вершинная функция массивного нейтрино является конечной в однопетлевом приближении при произвольной величине импульса внешнего фотона q_μ .

Аналогичное утверждение может быть сформулировано для случая электромагнитной вершинной функции электрона в рамках квантовой электродинамики. В книге [82] приведено выражение вершиной функции электрона в однопетлевом приближении в произвольной калибровке. Используя формулу (24') на стр. 358 из данной книги, находим, что все формфакторы в вершинной функции являются конечными при $d_l = 3$, где d_l - калибровочный параметр фотона.

2.2 Зарядовый формфактор нейтрино

В этом разделе рассматривается зарядовый формфактор массивного нейтрино. Используя результаты предыдущего раздела для различных вкладов в вершинную функцию нейтрино $\Lambda_\mu(q)$, выделим в формулах (2.1.2)-(2.1.14) коэффициенты, пропорциональные матрице γ_μ , которые, исходя из разложения данного в соотношении (2.1.1), являются соответствующими вкладками в зарядовый формфактор $f_Q(q^2)$.

Прежде всего рассмотрим вклады однопетлевых треугольных диаграмм [см. Рис. 2.1(a)-2.1(f)] в зарядовый формфактор нейтрино. Используя известное тождество

$$\bar{u}(p')(p'_\mu + p_\mu)u(p) = \bar{u}(p')(2m_\nu\gamma_\mu - i\sigma_{\mu\nu}q^\nu)u(p),$$

и производя интегрирование по импульсам виртуальных частиц, используя при этом размерную регуляризацию (детали данной процедуры приведены в приложении В), находим точные выражения для вкладов рассматриваемых диаграмм в зарядовый формфактор массивного нейтрино, выраженных через определенные интегралы:

$$f_Q^{(\text{prop.vert.})}(q^2) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}M_W^2 \sum_{i=1}^6 \bar{f}_Q^{(i)}(q^2),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}_Q^{(1)}(q^2) = & \omega \frac{\alpha}{2} + 1 + \frac{1-\alpha}{12} + \int_0^1 dz \int_0^z dy \ln \mathfrak{D}_1 - \\ & \int_0^1 dz \int_0^z dy (a + b(1-z)^2 + \tau(1-z+y(z-y))) \frac{1}{\mathfrak{D}_1} + \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (bz^2(a + b(1-z)^2) + a\tau y(z-y) + \\ & b\tau(2zy(z-y)(1-z) + 5y(z-y) - z^2(1-z)) + \\ & \tau^2 y(z-y)(1-z+yz-y^2)) \left[\frac{1}{\mathfrak{D}_1(\alpha)} - \frac{1}{\mathfrak{D}_1} \right] - \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (a + b + 6bz(1-z) + \tau(1-3z+6y(z-y))) \times \\ & [\ln \mathfrak{D}_1(\alpha) - \ln \mathfrak{D}_1], \quad (2.2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_Q^{(2)}(q^2) = & \frac{a+b}{2} \left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} + \int_0^1 dz \int_0^z dy \ln \mathfrak{D}_1(\alpha) \right) - \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (a^2 + abz^2 + b^2z^2 - 4abz + ab + \\ & (a+b)\tau y(z-y)) \frac{1}{\mathfrak{D}_1(\alpha)}, \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_Q^{(3)}(q^2) = & \frac{a+b}{2} \left(-\frac{\omega}{2} - \int_0^1 dz \int_0^z dy \ln \mathfrak{D}_2(\alpha) \right) + \\ & b \int_0^1 dz \int_0^z dy (3az - az^2 - 2a + bz(1-z)) \frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha)}, \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_Q^{(4)}(q^2) = & -\omega \frac{3}{4} (1+\alpha) - 1 - 3 \int_0^1 dz \int_0^z dy \ln \mathfrak{D}_2 + \\ & \int_0^1 dz \int_0^z dy (3bz(1-z) - \tau(z - y(z-y))) \frac{1}{\mathfrak{D}_2} - \\ & \frac{9}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy [(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)) \ln(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)) - \mathfrak{D}_2 \ln \mathfrak{D}_2] - \\ & \int_0^1 dz \int_0^z dy (2b^2(1-z)^2(z(1-z) - y) - \\ & b\tau(y(z-y)(5z - 3z^2 - 3y) + z(1-z)^2 - y(2-y-y^2)) - \\ & \tau^2 y(z-y)(1-z+yz+y+y^2)) \left[\frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)} - \frac{1}{\mathfrak{D}_2} \right] + \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (3b(1-z^2) + \tau(4 - 6(z-y) + 11y(z-y))) \times \\ & [\ln(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)) - \ln \mathfrak{D}_2] - \\ & \frac{b\tau}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (bz(1-3z+z^2+z^3) - \tau y(z-y)(z+z^2-2y)) \times \\ & \left[\frac{1}{\mathfrak{D}_2} + \frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha)} - \frac{2}{\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)} \right] + \\ & \frac{\tau}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (b(9-13z+4z^2) - 2\tau y(z-y)) \times \\ & [\ln \mathfrak{D}_2 + \ln \mathfrak{D}_2(\alpha) - 2 \ln(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha))] + \\ & \frac{3\tau}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy [\mathfrak{D}_2 \ln \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_2(\alpha) \ln \mathfrak{D}_2(\alpha) - \\ & 2(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)) \ln(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha))], \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

$$\bar{f}_Q^{(5)+(6)}(q^2) = \int_0^1 dz \int_0^z dy (a - bz) \frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)} -$$

$$b \int_0^1 dz \int_0^z dy (1-z) ((1-z)(a-bz) - \tau y(z-y)) \left[\frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)} - \frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha)} \right] - \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (a + 5b - 6bz) [\ln(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)) - \ln \mathfrak{D}_2(\alpha)], \quad (2.2.5)$$

где

$$\mathfrak{D}_1(\alpha) = \alpha + (a - \alpha)z - bz(1 - z) - \tau y(z - y),$$

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_1(\alpha = 1) = 1 + (a - 1)z - bz(1 - z) - \tau y(z - y),$$

$$\mathfrak{D}_2(\alpha) = a + (\alpha - a)z - bz(1 - z) - \tau y(z - y),$$

$$\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_2(\alpha = 1) = a + (1 - a)z - bz(1 - z) - \tau y(z - y).$$

Заметим, что в выражениях (2.2.1)-(2.2.5) точно учитываются значения массовых параметров заряженного лептона a , нейтрино b , значение калибровочного параметра α является произвольным. Все вычисления были выполнены при произвольном значении q^2 .

Вклады $\gamma - Z$ диаграмм, показанных на Рис. 2.2(a)-2.2(h), в зарядовый формфактор нейтрино могут быть получены на основе разложения (2.1.41) и имеют следующий вид

$$f_Q^{(j)}(q^2) = \frac{g}{4 \cos \theta_W} \frac{A^{(j)}(\alpha, q^2) + B^{(j)}(\alpha, q^2)}{q^2 - M_Z^2}, \quad j = 7, \dots, 14. \quad (2.2.6)$$

Используя явный вид функций $A^{(j)}(\alpha, q^2)$ [формулы (2.1.16)-(2.1.22)], и $B^{(j)}(\alpha, q^2)$ [формулы (2.1.23)-(2.1.29)], а также с помощью соотношения (2.2.6) можно получить выражения для вкладов $\gamma - Z$ диаграмм при произвольных значениях калибровочного параметра α и $q^2 \neq 0$. Однако, ввиду громоздкости данных формул здесь они приводиться не будут.

2.2.1 Исследование зарядового формфактора при нулевой передаче импульса

При нулевой передаче импульса сумма вкладов в зарядовый формфактор определяет электрический заряд нейтрино: $f_Q(0) = Q$. Цель данного раз-

дела - найти полное выражение для заряда массивного нейтрино

$$Q = \sum_{i=1}^6 Q^{(i)}(a, b, \alpha) + \sum_{j=7}^{14} Q^{(j)}(a, b, \alpha),$$

и изучить зависимость вкладов различных фейнмановских диаграмм, показанных на Рис. 2.1(a)-2.1(f) и 2.2(a)-2.2(h), от массовых a и b , и калибровочных параметров α и α_Z .

Естественно ожидать, что зависимость от калибровочных параметров суммы всех вкладов должна выпадать. Аналогично, мы должны получить, что заряд $Q = 0$, т.к. в исходном лагранжиане теории нейтрино является нейтральной частицей. Прямое вычисление полного набора диаграмм, дающих вклад в заряд нейтрино в однопетлевом приближении, позволит устранить ошибки в расчетах ряда диаграмм, сделанных в [54], а также убедится в правильности применяемой нами методики расчетов.

В первую очередь рассмотрим вклады однопетлевых треугольных диаграмм [см. Рис. 2.1(a)-2.1(f)] в заряд нейтрино. С помощью формул (2.2.1)-(2.2.5), которые определяют вклады треугольных диаграмм в зарядовый формфактор нейтрино для произвольных значений массовых параметров a и b , калибровочного параметра α , а также при любом q^2 , находим вклады различных диаграмм в электрический заряд нейтрино, положив для этого $q^2 = 0$:

$$Q^{(1)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ \omega \frac{\alpha}{2} + 1 + \frac{1-\alpha}{12} + \int_0^1 dz(1-z) \ln D - \int_0^1 dz(1-z)(a+bz^2) \frac{1}{D} + \frac{b}{2} \int_0^1 dz(1-z)^3(a+bz^2) \left[\frac{1}{D_\alpha} - \frac{1}{D} \right] - \frac{1}{2} \int_0^1 dz(1-z)(a+b+6bz(1-z)) [\ln D_\alpha - \ln D] + 3 \int_0^1 dz(1-z) [D_\alpha \ln D_\alpha - D \ln D] \right\}, \quad (2.2.7)$$

$$Q^{(2)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ \frac{a+b}{2} \left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} + \int_0^1 dz(1-z) \ln D_\alpha \right) - \right.$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 dz (1-z)(a^2 + abz^2 + b^2z^2 - 4abz + ab) \frac{1}{D_\alpha} \Big\}, \quad (2.2.8)$$

$$Q^{(3)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ \frac{a+b}{2} \left(-\frac{\omega}{2} - \int_0^1 dz z \ln D_\alpha \right) + \right. \\ \left. b \int_0^1 dz z (3az - az^2 - 2a + bz(1-z)) \frac{1}{D_\alpha} \right\}, \quad (2.2.9)$$

$$Q^{(4)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ -\omega \frac{3}{4} (1+\alpha) - 1 - \right. \\ \left. 3 \int_0^1 dz z \ln D + 3b \int_0^1 dz z^2 (1-z) \frac{1}{D} - \right. \\ \left. \frac{9}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy [(D_\alpha + y(1-\alpha)) \ln(D_\alpha + y(1-\alpha)) - D \ln D] - \right. \\ \left. 2b^2 \int_0^1 dz \int_0^z dy (1-z)^2 (z(1-z) - y) \left[\frac{1}{D_\alpha + y(1-\alpha)} - \frac{1}{D} \right] + \right. \\ \left. \frac{3}{2} b \int_0^1 dz \int_0^z dy (1-z)^2 [\ln(D_\alpha + y(1-\alpha)) - \ln D] \right\}, \quad (2.2.10)$$

$$Q^{(5)+(6)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ \int_0^1 dz \int_0^z dy (a - bz) \frac{1}{D_\alpha + y(1-\alpha)} - \right. \\ \left. b \int_0^1 dz \int_0^z dy (1-z)^2 (a - bz) \left[\frac{1}{D_\alpha + y(1-\alpha)} - \frac{1}{D_\alpha} \right] - \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (a + 5b - 6bz) [\ln(D_\alpha + y(1-\alpha)) - \ln D_\alpha] \right\}. \quad (2.2.11)$$

Интегральные выражения для различных вкладов треугольных диаграмм в заряд нейтрино точно учитывают массовые параметры заряженного лептона и нейтрино a и b , а также зависимость от калибровочного параметра α . Интегралы в формулах (2.2.7)-(2.2.11) были вычислены, однако результаты, выраженные через элементарные функции, оказались довольно громоздкими. Поэтому, явно выполним интегрирование в первых двух порядках разложения по массовому параметру нейтрино b при произвольных

значениях массового параметра заряженного лептона a и калибровочного параметра α . В этом случае сумма вкладов треугольных диаграмм в заряд нейтрино может быть записана в виде

$$Q^{(\text{prop.vert.})}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}M_W^2 \times \sum_{i=1}^6 \{q_0^{(i)}(a, \alpha) + bq_1^{(i)}(a, \alpha) + \mathcal{O}(b^2)\}. \quad (2.2.12)$$

Для $q_0^{(i)}(a, \alpha)$ получаем

$$q_0^{(1)}(a, \alpha) = \omega \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4(1-a)^2(\alpha-a)^2} \left(-3a^2 + 4a^2\alpha \ln a - 5a^2\alpha + 2\alpha^3 + 3a^3 - 3a^3 \ln a - 2\alpha^3 \ln \alpha + \alpha^2 a \ln \alpha + 2a^2\alpha^3 - 3a^3\alpha^2 + \alpha a^4 + 6a^2\alpha^2 + 6a\alpha - 3\alpha^2 - 4\alpha^3 a - 2a^3\alpha + 4\alpha^3 a \ln \alpha - 2a^4\alpha \ln a - 2\alpha^3 a^2 \ln \alpha + 4\alpha a^3 \ln a - 6a^2\alpha^2 \ln a + \alpha^2 a^3 \ln \alpha - 2\alpha^2 a^2 \ln \alpha + 3a^3\alpha^2 \ln a \right), \quad (2.2.13)$$

$$q_0^{(2)}(a, \alpha) = \omega \frac{a}{4} + \frac{a}{8(\alpha-a)^2} (2\alpha^2 \ln \alpha + 4a\alpha - 4a\alpha \ln \alpha - \alpha^2 + 2a^2 \ln a - 3a^2), \quad (2.2.14)$$

$$q_0^{(3)}(a, \alpha) = -\omega \frac{a}{4} - \frac{a}{8(\alpha-a)^2} (2\alpha^2 \ln \alpha + 4a\alpha - 4a\alpha \ln \alpha - \alpha^2 + 2a^2 \ln a - 3a^2), \quad (2.2.15)$$

$$q_0^{(4)}(a, \alpha) = -\omega \frac{3}{4}(1+\alpha) - \frac{1}{8(1-a)^2(\alpha-a)(1-\alpha)} \left(\alpha^2 a - 4a^2 - 6\alpha^3 \ln \alpha - 6a^3 \ln a - 11a^2\alpha + 5\alpha^3 + 5a^3 + 5a^2\alpha^3 - 5a^3\alpha^2 + 10a^2\alpha^2 + 10a\alpha - 6\alpha^2 - 10\alpha^3 a - 6\alpha^3 a^2 \ln \alpha - 12a^2\alpha^2 \ln a + 12a^2\alpha \ln a + 12\alpha^3 a \ln \alpha + 6a^3\alpha^2 \ln a + \alpha - a \right), \quad (2.2.16)$$

$$q_0^{(5)+(6)}(a, \alpha) = \frac{a}{4(\alpha-a)^2(1-a)(1-\alpha)} (2a\alpha \ln \alpha + a^2\alpha - \alpha^3 - a^2\alpha^2 +$$

$$4a\alpha \ln a - a\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 a - 3\alpha^2 \ln \alpha + a^2 \alpha^2 \ln a + 2a^2 \alpha \ln a + 4\alpha^2 a \ln \alpha - \alpha^2 a^2 \ln \alpha - 4a\alpha^2 \ln a - 2a^2 \alpha \ln \alpha - 3a^2 \ln a). \quad (2.2.17)$$

Если каждый из коэффициентов $q_0^{(i)}(a, \alpha)$ рассматривать отдельно, то он зависит от калибровочного параметра α . Кроме того, каждый из коэффициентов, за исключением $q_0^{(5)}(a, \alpha)$ и $q_0^{(6)}(a, \alpha)$, является расходящимся. Заметим, что из разложения, соответствующего формуле (2.2.12), следует, что сумма

$$\sum_{i=1}^6 q_0^{(i)}(a, \alpha)$$

определяет вклад треугольных диаграмм в заряд в случае безмассового нейтрино.

Следует также отметить, что две диаграммы, соответствующие Рис. 2.1(e) и 2.1(f), являются сходящимися при любом значении калибровочного параметра α . Данный факт может быть легко установлен с использованием формулы (2.1.6). Действительно, эти фейнмановские диаграммы имеют индекс расходимости равный -1 , и, следовательно, являются сходящимися [83]. Следовательно, соответствующие вклады в электрический заряд должны быть конечными как это и отражено в соотношениях (2.2.11) и (2.2.17). Теперь очевидно, что наши результаты не согласуются с расчетами из статьи [54], в которой было вычислено значение заряда безмассового нейтрино и эти две диаграммы содержат ультрафиолетовые расходимости.

Следующий порядок разложения вкладов треугольных диаграмм в заряд нейтрино по массовому параметру нейтрино b может быть получен при помощи разложения подынтегральных выражений в формулах (2.2.7)-(2.2.11). При этом необходимо рассмотреть члены пропорциональные b , а затем выполнить интегрирования по фейнмановским параметрам. Принимая во внимание тот факт, что функции D и D_α также зависят от b , нахо-

дим, что

$$\sum_{i=1}^6 q_1^{(i)}(a, \alpha) = 0.$$

Учитывая то, что вклады $\gamma - Z$ диаграмм не зависят от массы нейтрино, получаем, что слагаемое в разложении заряда нейтрино, пропорциональное массовому параметру нейтрино b , равно нулю.

Теперь давайте рассмотрим вклады $\gamma - Z$ диаграмм в электрический заряд нейтрино. Соответствующие фейнмановские диаграммы изображены на Рис. 2.2(a)-2.2(h). Используя разложение (2.1.15) функций $\Pi_{\mu\nu}^{(j)}(q)$, а также явный вид функций $A^{(j)}(\alpha, q^2)$ [формулы (2.1.16)-(2.1.22)], находим, что каждая из функций $A^{(j)}(\alpha, q^2)$ равна нулю при $q^2 = 0$,

$$A^{(j)}(\alpha, q^2 = 0) = 0.$$

Таким образом, только слагаемые пропорциональные $B^{(j)}(0)$ соответствуют вкладам $\gamma - Z$ диаграмм в электрический заряд нейтрино:

$$Q^{(\gamma-Z)}(\alpha) = \sum_{j=7}^{14} Q^{(j)}(\alpha) = -\frac{g}{4M_Z^2 \cos \theta_W} \sum_{j=7}^{14} B^{(j)}(\alpha, 0).$$

Из формул (2.1.8)-(2.1.14) [см. также соотношение (2.2.6)] для каждого вклада $Q^{(j)}(\alpha)$, $j = 7, \dots, 14$, получаем

$$Q^{(7)}(\alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \cos^2 \theta_W \times \left\{ \omega \left[3 + \frac{3}{4}\alpha(1 + \alpha) \right] - 1 - \frac{5\alpha}{8} - \frac{5\alpha^2}{8} - \frac{3\alpha^3}{4} \frac{\ln \alpha}{(1 - \alpha)} \right\}, \quad (2.2.18)$$

$$Q^{(8)}(\alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \sin^2 \theta_W \times \left\{ \omega \frac{3 + \alpha}{4} - \frac{5 + \alpha}{8} - \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\ln \alpha}{(1 - \alpha)} \right\}, \quad (2.2.19)$$

$$Q^{(9)}(\alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 (\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) \frac{1}{2} \{ -\omega\alpha + \alpha - \alpha \ln \alpha \}, \quad (2.2.20)$$

$$Q^{(10)}(\alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}M_W^2 \cos^2 \theta_W \times \left\{ -\frac{3}{4}\omega(3 + \alpha^2) + \frac{3}{8} + \frac{5\alpha^2}{8} - \frac{3}{4}\alpha^2 \ln \alpha \right\}, \quad (2.2.21)$$

$$Q^{(11)+(12)}(\alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}M_W^2 \cos^2 \theta_W \frac{1}{2} \{-\omega\alpha + \alpha - \alpha \ln \alpha\}, \quad (2.2.22)$$

$$Q^{(13)}(\alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}M_W^2 (\sin^2 \theta_W - \cos^2 \theta_W) \frac{1}{2} \{-\omega\alpha + \alpha - \alpha \ln \alpha\}, \quad (2.2.23)$$

$$Q^{(14)}(\alpha) = 0. \quad (2.2.24)$$

Стоит отметить, что каждый из вкладов $Q^{(j)}(\alpha)$ оказывается независимым от массы заряженного лептона m_ℓ и от массы нейтрино m_ν . В данных вкладах нет также зависимости от масс виртуальных фермионов m_f , которые присутствуют в $\gamma - Z$ диаграммах. Подобная зависимость исчезает благодаря свойствам алгебры γ матриц в пространстве N измерений, определенным в приложении А. Зависимость от калибровочного параметра α_Z сокращается в каждом из вкладов. Заметим, что данная зависимость исчезает при произвольном q^2 еще до того, как интегрирования в соотношениях (2.1.8)-(2.1.14) были выполнены. Окончательно для суммы всех вкладов $\gamma - Z$ диаграмм в электрический заряд нейтрино имеем:

$$Q^{(\gamma-Z)}(\alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}M_W^2 \times \left\{ \frac{3 + \alpha}{4}\omega - \frac{5 + \alpha}{8} - \frac{\alpha \ln \alpha}{2(1 - \alpha)} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \right\}. \quad (2.2.25)$$

Следует обратить внимание на расходящиеся части формул (2.2.13)-(2.2.16) и (2.2.25). Если сложить все коэффициенты в данных слагаемых, то получатся нулевой результат, т.е. электрический заряд массивного нейтрино равен нулю при любом числе измерений N . Аналогичное свойство электрического заряда безмассового нейтрино было обнаружено с работе [61].

Теперь можно завершить исследование заряда нейтрино в нулевом порядке разложения по массовому параметру нейтрино b , сложив для этой

цели вклады треугольных диаграмм из формул (2.2.12)-(2.2.17),

$$Q^{(\text{prop.vert.})}(a, 0, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \sum_{i=1}^6 q_0^{(i)}(a, \alpha), \quad (2.2.26)$$

с $Q^{(\gamma-Z)}(\alpha)$ из соотношения (2.2.25). Окончательно получаем, что электрический заряд нейтрино равен нулю в нулевом порядке разложения по массе нейтрино в согласии с конечными результатами статей [54, 61].

2.2.2 Вычисление в калибровке 'т Хофта-Фейнмана

В калибровке 'т Хофта-Фейнмана возможно явным образом показать, что сумма вкладов однопетлевых фейнмановских диаграмм в электрический заряд нейтрино равна нулю. В этой калибровке калибровочный параметр W -бозона α равен единице ($\alpha = 1$). Суммируя вклады всех диаграмм (2.2.7)-(2.2.11) и (2.2.25), получаем точное выражение для заряда нейтрино при произвольных значениях массовых параметров заряженного лептона a и нейтрино b :

$$Q(a, b, \alpha = 1) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} M_W^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 dz [a(-(a+2) + z(a+4)) + ab(-1 + z + z^2 - z^3) + 2bz^2(1 - 2z) + b^2z^2(1 - z)] \frac{1}{D} + \int_0^1 dz (1 - 4z) \ln D + \frac{a+b}{2} \left(\frac{1}{2} + \int_0^1 dz (1 - 2z) \ln D \right) \right\}. \quad (2.2.27)$$

Чтобы проанализировать выражение (2.2.27), используем формулы

$$\int_0^1 dz \ln D = -1 + \int_0^1 dz (a - bz^2) \frac{1}{D}, \quad (2.2.28)$$

$$\int_0^1 dz z \ln D = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 dz z (a - bz^2) \frac{1}{D}, \quad (2.2.29)$$

которые могут быть выведены при помощи интегрирования по частям. Подставляя формулы (2.2.28) и (2.2.29) в выражение (2.2.27) получаем, что электрический заряд равен нулю при произвольной массе нейтрино в рассматриваемой калибровке.

2.3 Магнитный формфактор нейтрино

Следуя общему разложению электромагнитной вершинной функции нейтрино $\Lambda_\mu(q)$, представленному в соотношении (2.1.1), магнитный формфактор нейтрино $f_M(q^2)$ является коэффициентом в слагаемом, пропорциональном $i\sigma_{\mu\nu}q^\nu$. В данном разделе будет определен $f_M(q^2)$ при ненулевой передаче импульса в произвольной R_ξ -калибровке, а также при произвольных значениях массовых параметров заряженного лептона a и нейтрино b . Заметим, что фейнмановские диаграммы, изображенные на Рис. 2.2(a)-2.2(h), не дают вкладов в магнитный формфактор нейтрино при $q^2 \neq 0$. Таким образом, окончательное выражение для магнитного формфактора нейтрино имеет вид

$$f_M(q^2) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}m_\nu \sum_{i=1}^6 \bar{f}_M^{(i)}(q^2),$$

где коэффициенты $\bar{f}_M^{(i)}(q^2)$ - вклады соответствующих диаграмм в магнитный формфактор нейтрино, показанные на Рис. 2.1(a)-2.1(f). Используя формулы (2.1.2)-(2.1.6), для каждого из этих коэффициентов имеем соответствующие выражения

$$\begin{aligned} \bar{f}_M^{(1)}(q^2) = & \int_0^1 dz \int_0^z dy (2 - 3z + z^2) \frac{1}{D_1} - \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (az^2 - bz^2(1-z) - ty(z-y)(2-z)) \left[\frac{1}{D_1(\alpha)} - \frac{1}{D_1} \right] + \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (2 - 3z) [\ln D_1(\alpha) - \ln D_1], \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\bar{f}_M^{(2)}(q^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy z (a + az - b(1-z)) \frac{1}{D_1(\alpha)}, \quad (2.3.2)$$

$$\bar{f}_M^{(3)}(q^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (2a - 3az + az^2 - bz(1-z)) \frac{1}{D_2(\alpha)}, \quad (2.3.3)$$

$$\bar{f}_M^{(4)}(q^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy z (1 + 2z) \frac{1}{D_2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (b(1-z)^2(z(1-z) - 2y) - ty(z-y)(2y - 3z + z^2) - 2ty) \times \\
& \quad \left[\frac{1}{D_2(\alpha) + y(1-\alpha)} - \frac{1}{D_2} \right] + \\
& \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (-2 + 9z - 4z^2 - 6y) [\ln(D_2(\alpha) + y(1-\alpha)) - \ln D_2] - \\
& \quad \frac{t}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (bz(1 - 3z + z^2 + z^3) - ty(z-y)(2 - z - z^2)) \times \\
& \quad \left[\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_2(\alpha)} - \frac{2}{D_2(\alpha) + y(1-\alpha)} \right] + \\
& \quad \frac{t}{8} \int_0^1 dz \int_0^z dy (8 - 13z + 3z^2) \times \\
& \quad [\ln D_2 + \ln D_2(\alpha) - 2 \ln(D_2(\alpha) + y(1-\alpha))], \quad (2.3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}_M^{(5)+(6)}(q^2) &= \int_0^1 dz \int_0^z dy y \frac{1}{D_2(\alpha) + y(1-\alpha)} + \\
\frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy ((a-bz)(1-z)^2 + ty(z-y)(1-z)) & \left[\frac{1}{D_2(\alpha) + y(1-\alpha)} - \frac{1}{D_2(\alpha)} \right] + \\
\frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (2 - 3z) [\ln(D_2(\alpha) + y(1-\alpha)) - \ln D_2(\alpha)], & \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
D_1(\alpha) &= \alpha + (a - \alpha)z - bz(1 - z) + ty(z - y), \\
D_1 &= D_1(\alpha = 1) = 1 + (a - 1)z - bz(1 - z) + ty(z - y), \\
D_2(\alpha) &= a + (\alpha - a)z - bz(1 - z) + ty(z - y), \\
D_2 &= D_2(\alpha = 1) = a + (1 - a)z - bz(1 - z) + ty(z - y),
\end{aligned}$$

и $t = -q^2/M_W^2$.

2.3.1 Исследование асимптотического поведения магнитного фактора

В этом разделе обсуждается асимптотическое поведение интегралов, которые возникают во вкладах треугольных диаграмм в $f_M(q^2)$ при боль-

ших положительных t . Рассмотрим, например, следующий интеграл при $t \rightarrow +\infty$:

$$J(t) = t \int_0^z dy \frac{y}{D_2(\alpha)} = \int_0^z dy \frac{y}{(y - y_2)(y_1 - y)}, \quad (2.3.6)$$

где

$$y_1 = z + \frac{D}{zt} + \dots, \quad y_2 = -\frac{D_\alpha}{zt} + \dots. \quad (2.3.7)$$

Выполняя элементарные интегрирования получаем, что

$$J(t) \rightarrow \ln t - \ln D. \quad (2.3.8)$$

В формулах (2.3.6)-(2.3.8) были отброшены слагаемые, пропорциональные $1/t$ и $(\ln t)/t$, которые исчезающе малы при больших положительных t . Оставшиеся интегралы оцениваются аналогичным образом. В конечном итоге находим, что

$$\bar{f}_M(t) = \sum_{i=1}^6 \bar{f}_M^{(i)}(t) \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Асимптотическое поведение магнитного формфактора при больших отрицательных q^2 , описанное в настоящей работе, согласуется с общей теоремой Вайнберга [84]. Однако случай магнитного формфактора массивного нейтрино ранее никогда не обсуждался. Стоит отметить, что при выводе соотношений (2.3.6)-(2.3.8) предполагалось, что $\alpha < \infty$. Таким образом, полученный результат, что $\bar{f}_M(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, справедлив в любой калибровке, кроме унитарной. Значение $\bar{f}_M(t \rightarrow +\infty)$ может не быть равным нулю, если сначала положить $\alpha = \infty$, а затем перейти к пределу $t \rightarrow +\infty$. Анализ асимптотического поведения магнитных формфакторов в рамках модели Вайнберга-Салама в унитарной калибровке представлен, например, в статье [81].

С использованием явных выражений для магнитного формфактора массивного нейтрино при произвольном значении калибровочного параметра α на Рис. 2.3 показано поведение функции $\bar{f}_M(t)$ в различных калибровках

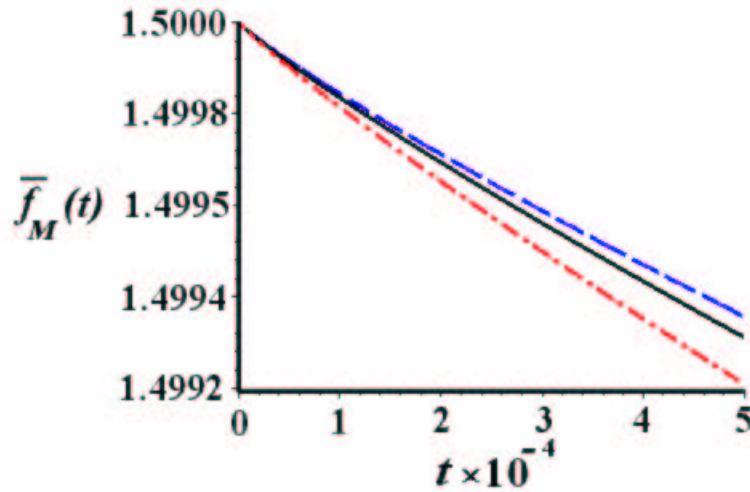


Рис. 2.3: Магнитный формфактор массивного нейтрино как функция t при различных значениях калибровочного параметра. Пунктирная линия соответствует $\alpha = 100$, сплошная — калибровке 'т Хофта-Фейнмана ($\alpha = 1$), а штрих-пунктирная линия — $\alpha = 0.1$.

для широкого диапазона значений t : $0 \leq t \leq 5 \times 10^{-4}$. Из Рис. 2.3 видно, что магнитный формфактор становится калибровочно независимым при $t = 0$, что соответствует фотону на массовой оболочке. Значение $f_M(t = 0)$ равняется магнитному моменту нейтрино, калибровочная независимость которого будет обсуждаться ниже более подробно.

2.3.2 Магнитный момент нейтрино

Как это было уже отмечено в предыдущем разделе, магнитный момент представляет собой значение магнитного формфактора при нулевой передаче импульса

$$\mu(a, b, \alpha) = f_M(q^2 = 0),$$

которое зависит от двух массовых параметров a и b . Заметим, что вклады отдельных диаграмм в магнитный момент могут содержать зависимость от параметра, фиксирующего калибровку α . Следовательно, для того чтобы получить выражение для магнитного момента нейтрино необходимо поло-

жить $q^2 = 0$ в общих выражениях (2.3.1)-(2.3.5) для магнитного формфактора.

Очевидно, что фейнмановские диаграммы, изображенные на Рис. 2.2(a)-2.2(h) не дают вкладов в магнитный момент нейтрино. Таким образом, точное значение магнитного момента нейтрино определяется следующим соотношением

$$\mu(a, b, \alpha) = \sum_{i=1}^6 \mu^{(i)}(a, b, \alpha), \quad (2.3.9)$$

где $\mu^{(i)}(a, b, \alpha)$ - вклады треугольных диаграмм [см. Рис. 2.1(a)-2.1(f)] в магнитный момент. Магнитный момент нейтрино рассматривается аналогичным образом, как это было сделано для электрического заряда нейтрино. Используя формулы (2.1.2)-(2.1.6), для каждого из вкладов в магнитный момент нейтрино получаем

$$\begin{aligned} \mu^{(1)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} m_\nu \left\{ \int_0^1 dz z(1-z)^2 \frac{1}{D} - \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_0^1 dz (1-z)^3 (a-bz) \left[\frac{1}{D_\alpha} - \frac{1}{D} \right] - \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_0^1 dz (1-z)(1-3z) [\ln D_\alpha - \ln D] \right\}, \quad (2.3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} m_\nu \frac{1}{2} \int_0^1 dz (1-z) \times \\ (-3az + az^2 + 2a - bz(1-z)) \frac{1}{D_\alpha}, \quad (2.3.11) \end{aligned}$$

$$\mu^{(3)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} m_\nu \frac{1}{2} \int_0^1 dz z (-3az + az^2 + 2a - bz(1-z)) \frac{1}{D_\alpha}, \quad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(4)}(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} m_\nu \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 dz z^2 (1+2z) \frac{1}{D} + \right. \\ \left. \frac{b}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (1-z)^2 (z(1-z) - 2y) \left[\frac{1}{D_\alpha + y(1-\alpha)} - \frac{1}{D} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (-2 + 9z - 4z^2 - 6y) [\ln(D_\alpha + y(1 - \alpha)) - \ln D] \Big\}, \quad (2.3.13)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(5)+(6)}(a, b, \alpha) = & \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} m_\nu \left\{ \int_0^1 dz \int_0^z dy y \frac{1}{D_\alpha + y(1 - \alpha)} + \right. \\ & \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (1 - z)^2 (a - bz) \left[\frac{1}{D_\alpha + y(1 - \alpha)} - \frac{1}{D_\alpha} \right] + \\ & \left. \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy (2 - 3z) [\ln(D_\alpha + y(1 - \alpha)) - \ln D_\alpha] \right\}. \quad (2.3.14) \end{aligned}$$

Следует отметить, что данные формулы точно учитывают зависимость от массовых параметров заряженного лептона и нейтрино a и b , а также от калибровочного параметра α .

Для того, чтобы продолжить аналитические вычисления, разложим вклады в магнитный момент нейтрино (2.3.10)-(2.3.14) по массовому параметру нейтрино b и рассмотрим два первых слагаемых. Затем из соотношения (2.3.9) получаем, что

$$\mu(a, b, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} m_\nu \sum_{i=1}^6 \{ \bar{\mu}_0^{(i)}(a, \alpha) + b \bar{\mu}_1^{(i)}(a, \alpha) + \mathcal{O}(b^2) \}. \quad (2.3.15)$$

Для каждого из коэффициентов $\bar{\mu}_0^{(i)}(a, \alpha)$ были найдены точные выражения через алгебраические функции, однако данные формулы снова оказались довольно громоздкими. Поэтому рассмотрим более компактные выражения для $\bar{\mu}_0^{(i)}(a, \alpha)$, которые могут быть получены при разложении по массовому параметру заряженного лептона a . Таким образом, учитывая члены вплоть до второго порядка по a , находим для коэффициентов $\bar{\mu}_0^{(i)}(a, \alpha)$ следующие выражения

$$\bar{\mu}_0^{(1)}(a, \alpha) = \frac{2}{3} + \frac{10 - 3\alpha + 6 \ln a - 6 \ln \alpha}{6\alpha} a + \mathcal{O}(a^2), \quad (2.3.16)$$

$$\bar{\mu}_0^{(2)}(a, \alpha) = -\frac{5 + 3 \ln a - 3 \ln \alpha}{3\alpha} a + \mathcal{O}(a^2), \quad (2.3.17)$$

$$\bar{\mu}_0^{(3)}(a, \alpha) = \frac{5a}{12\alpha} + \mathcal{O}(a^2), \quad (2.3.18)$$

$$\bar{\mu}_0^{(4)}(a, \alpha) = \frac{2 - 7\alpha - 3\alpha \ln \alpha + 5\alpha^2}{6(1 - \alpha)^2} - \frac{9 - 12\alpha + \ln \alpha + 5\alpha \ln \alpha + 3\alpha^2}{12(1 - \alpha)^2} a + \mathcal{O}(a^2), \quad (2.3.19)$$

$$\bar{\mu}_0^{(5)+(6)}(a, \alpha) = \frac{1 - \alpha + \alpha \ln \alpha}{2(1 - \alpha)^2} - \frac{5 - 16\alpha - \alpha \ln \alpha + 11\alpha^2 - 5\alpha^2 \ln \alpha}{12\alpha(1 - \alpha)^2} a + \mathcal{O}(a^2). \quad (2.3.20)$$

Формулы (2.3.16)-(2.3.20) вместе с соотношением (2.3.15) дают значение магнитного момента в пределе $b \rightarrow 0$, что соответствует случаю легкого нейтрино.

Можно сравнить данные вычисления коэффициентов $\bar{\mu}_0^{(i)}(a, \alpha)$ с результатами статьи [54]. Результаты настоящей работы для коэффициентов $\mu_0^{(4)}(a, \alpha)$, $\mu_0^{(5)}(a, \alpha)$ и $\mu_0^{(6)}(a, \alpha)$ не согласуются с результатами выше упомянутой статьи. Фейнмановские диаграммы, соответствующие вкладам для $i = 5$ и 6 , содержат нефизический заряженный скалярный бозон. Данная частица должна исчезать в унитарной калибровке, в которой калибровочный параметр α равен бесконечности. Следовательно, вклады этих диаграмм в магнитный момент должны равняться нулю в пределе $\alpha \rightarrow \infty$. Именно это и следует из формулы (2.3.20). Однако, аналогичная формула из статьи [54] вообще не зависит от калибровочного параметра. Еще один аргумент в пользу наших результатов может быть получен, если рассмотреть значение магнитного момента нейтрино в унитарной калибровке. Легко показать, что используя результаты статьи [54], невозможно получить верное значение для магнитного момента нейтрино в данной калибровке. В унитарной калибровке только две диаграммы, показанные на Рис. 2.1(a) и 2.1(d), дают вклады в магнитный момент нейтрино. Результаты для этих

двух вкладов, которые могут быть получены с использованием соответствующих формул из [54], имеют вид

$$\mu_0^{(1)} = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}m_\nu \left\{ \frac{2}{3} - \frac{a}{2} + \mathcal{O}(a^2) \right\}, \quad (2.3.21)$$

$$\mu_0^{(4)} = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}m_\nu \left\{ \frac{7}{12} + \mathcal{O}(a^2) \right\}. \quad (2.3.22)$$

Сумма лидирующих слагаемых в формулах (2.3.21) и (2.3.22) отличается от хорошо известного результата для вычисления магнитного момента нейтрино (см., например, работу [50])

$$\mu = \frac{3eG_F m_\nu}{8\pi^2\sqrt{2}}. \quad (2.3.23)$$

Этот факт указывает на то, что вклады трех диаграмм, показанных на Рис. 2.1(d), 2.1(e) и 2.1(f), были вычислены в [54] с неправильной зависимостью от калибровочного параметра α . Заметим, что вычисления выполненные в статье [54] дают верный результат только в калибровке 'т Хофта-Фейнмана.

Рассмотрим теперь значение магнитного момента нейтрино в нулевом порядке разложения по массовому параметру нейтрино b , учитывая при этом все вклады. Найдено, что сумма коэффициентов (2.3.16)-(2.3.20) не зависит от калибровочного параметра α . Прямой расчет магнитного момента нейтрино в пределе $b \rightarrow 0$ дает

$$\mu_0(a, \alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}}m_\nu \frac{3}{4(1-a)^3} (2 - 7a + 6a^2 - 2a^2 \ln a - a^3), \quad (2.3.24)$$

что согласуется с окончательным результатом статьи [54].

Рассматривая следующий порядок разложения по массовому параметру нейтрино b , обнаруживаем, что сумма соответствующих вкладов (2.3.10)-(2.3.14) в коэффициент $\bar{\mu}_1(a, \alpha)$ имеет форму

$$\bar{\mu}_1(a, \alpha) = \sum_{i=1}^6 \bar{\mu}_1^{(i)}(a, \alpha) = \frac{1}{12(1-a)^5} \times \\ (5 - 26a + 6a \ln a - 36a^2 - 60a^2 \ln a + 58a^3 - 18a^3 \ln a - a^4). \quad (2.3.25)$$

Таким образом, с помощью соотношений (2.3.24) и (2.3.25) явно показано, что в однопетлевом приближении, а также в первом порядке разложения по массовому параметру нейтрино b , магнитный момент нейтрино является калибровочно независимой величиной.

Недавние данные экспериментов в ЦЕРНе на ускорителе ЛЭП (LEP) свидетельствуют в пользу того, число легких нейтрино, взаимодействующих с Z -бозоном, равно трем. Любое дополнительное нейтрино должно быть тяжелее чем 80 ГэВ (см., например, работу [85]). Полученные выражения (2.3.10)-(2.3.14) дают возможность рассмотреть случай очень тяжелого нейтрино, т.к. массовые параметры a и b являются произвольными в этих формулах. Пусть масса нейтрино m_ν будет гораздо больше массы заряженного лептона m_ℓ (этот случай соответствует $b \gg a$). Переходя к пределу $a \rightarrow 0$ в формулах (2.3.24)-(2.3.25), сохраняя при этом значение b постоянным, для магнитного момента нейтрино получаем

$$\mu = \frac{3eG_F}{8\pi^2\sqrt{2}}m_\nu \left\{ 1 + \frac{5}{18}b + \dots \right\}. \quad (2.3.26)$$

Используя общие выражения для вкладов в магнитный момент (2.3.10)-(2.3.14), можно получить величину магнитного момента нейтрино для любого значения массы нейтрино, даже в случае, когда нейтрино гораздо тяжелее, чем W -бозон. Чтобы исследовать данную ситуацию, необходимо зафиксировать калибровочный параметр α в соотношениях (2.3.10)-(2.3.14) для некоторого упрощения вычислений. В последующих выкладках мы будем считать, что $\alpha = 1$. Такой выбор калибровочного параметра соответствует калибровке 'т Хофта-Фейнмана. Таким образом, мы получаем выражение для суммы всех вкладов в магнитный момент

$$\bar{\mu} = \delta_\ell \int_0^1 dz \frac{1}{\mathcal{D}} - (1 - 2\delta_W + 3\delta_\ell) \frac{1}{2} \int_0^1 dz z \frac{1}{\mathcal{D}} + (1 + 2\delta_W + \delta_\ell) \frac{1}{2} \int_0^1 dz z^2 \frac{1}{\mathcal{D}}, \quad (2.3.27)$$

в котором мы переопределили массовые параметры и ввели две новых величины, $\delta_W = 1/b = (M_W/m_\nu)^2$, и $\delta_\ell = a/b = (m_\ell/m_\nu)^2$, $\mathcal{D} = z^2 - z(1 - \delta_W + \delta_\ell) + \delta_\ell$. Случай сверхмассивного нейтрино соответствует значениям новых массовых параметров в диапазоне: $\delta_\ell \ll \delta_W \ll 1$.

Можно доказать при помощи прямых вычислений, что

$$\lim_{\delta_W \rightarrow 0} \delta_W \mathfrak{I}_n = 0, \quad \lim_{\delta_\ell \rightarrow 0} \delta_\ell \mathfrak{I}_n = 0, \quad \text{для } n = 0, 1 \text{ и } 2, \quad (2.3.28)$$

где

$$\mathfrak{I}_n = \int_0^1 dz z^n \frac{1}{\mathcal{D}}. \quad (2.3.29)$$

Используя формулы (2.3.28) и (2.3.29), находим, что функция $\bar{\mu}$ в соотношении (2.3.27) равна $1/2$, что соответствует величине магнитного момента

$$\mu = \frac{eG_F}{8\pi^2\sqrt{2}} m_\nu. \quad (2.3.30)$$

Формула (2.3.30) дает магнитный момент сверхмассивного нейтрино, с массой гораздо большей, чем масса W -бозона.

В конце данного раздела сравним вычисления магнитного момента нейтрино в унитарной и R_ξ -калибровках. Вычисления, выполненные в этих двух калибровках, как это было отмечено в работе [81], формально эквивалентны друг другу, т.е. две фейнмановские амплитуды становятся равными, если к пределу $\alpha \rightarrow \infty$ переходят до вычисления соответствующих фейнмановских интегралов. Диаграммы, которые описывают процессы с участием нефизических скалярных бозонов должны исчезать в унитарной калибровке. Таким образом, процедура перехода к пределу $\alpha \rightarrow \infty$ и интегрирование по виртуальным импульсам должны быть коммутирующими. В настоящей работе данное утверждение проверено на примере прямого расчета магнитного момента массивного нейтрино. Действительно, на основе или точных формул (2.3.10)-(2.3.14) или разложений, представленных в соотношениях (2.3.16)-(2.3.20), находим, что вклады диаграмм, изображенных на Рис. 2.1(b), 2.1(c), 2.1(e) и 2.1(f), которые включают в себя скалярный бозон, раны нулю в пределе $\alpha \rightarrow \infty$.

2.4 Анапольный формфактор нейтрино

В этом разделе рассматривается анапольный формфактор массивного нейтрино. Используя результаты раздела 2.1 для различных вкладов в вершинную функцию нейтрино $\Lambda_\mu(q)$, выделим в формулах (2.1.2)-(2.1.14) коэффициенты, пропорциональные $(q^2\gamma_\mu - \not{q}q_\mu)\gamma_5$, которые, исходя из разложения данного в соотношении (2.1.1), являются соответствующими вкладами в анапольный формфактор $f_A(q^2)$. Заметим, что при выделении рассматриваемых слагаемых во вкладах каждой из диаграмм, изображенных на Рис. 2.1(a)-2.1(f) и 2.2(a)-2.2(h), неизбежно возникают дополнительные члены, пропорциональные матрице $\gamma_\mu\gamma_5$. Следовательно, необходимо проверять, чтобы подобный дополнительный «формфактор» имел нулевое значение даже при $q^2 \neq 0$. Данная проблема была затронута в разделе 2.1.2.

Прежде всего рассмотрим вклады однопетлевых треугольных диаграмм [см. Рис. 2.1(a)-2.1(f)] в анапольный формфактор нейтрино. Производя интегрирование по импульсам виртуальных частиц, используя при этом размерную регуляризацию (детали данной процедуры представлены в приложении В), находим точные выражения для вкладов рассматриваемых диаграмм в анапольный формфактор массивного нейтрино, выраженных через определенные интегралы:

$$f_A(q^2) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} \sum_{i=1}^6 \bar{f}_A^{(i)}(q^2), \quad (2.4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}_A^{(1)}(q^2) = & -\frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy ((2-z-z^2) + 4y(z-y)) \frac{1}{\mathfrak{D}_1} - \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy ((a+b(1-z))z^2 - 4y(z-y)(a-b) - 2\tau y(z-y)(2-z)) \times \\ & \left[\frac{1}{\mathfrak{D}_1(\alpha)} - \frac{1}{\mathfrak{D}_1} \right] - \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (2-3z) [\ln \mathfrak{D}_1(\alpha) - \ln \mathfrak{D}_1], \quad (2.4.2) \end{aligned}$$

$$\bar{f}_A^{(2)}(q^2) = -\frac{a-b}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (z(1-z) + 4y(z-y)) \frac{1}{\mathfrak{D}_1(\alpha)}, \quad (2.4.3)$$

$$\bar{f}_A^{(3)}(q^2) = \frac{a-b}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (z-2y)^2 \frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha)}, \quad (2.4.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_A^{(4)}(q^2) = & -\frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (z(3-2z) + 8y(z-y)) \frac{1}{\mathfrak{D}_2} - \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (bz(1-z^2)(3-z) - 4b(1-z)(z-y(1+z))(z-y) - \\ & \tau(4y^3 - 4y^2z - 2y + yz^2 - 4y^2 + yz)(z-y)) \left[\frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)} - \frac{1}{\mathfrak{D}_2} \right] + \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (6 - 3z - 4z^2 + 12y + 16y(z-y)) \times \\ & [\ln(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)) - \ln \mathfrak{D}_2] - \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (b(1-z^2) + \tau(z + 2y(z-y))) \times \\ & [\ln \mathfrak{D}_2 + \ln \mathfrak{D}_2(\alpha) - 2 \ln(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha))] + \\ & \frac{3}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy [\mathfrak{D}_2 \ln \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_2(\alpha) \ln \mathfrak{D}_2(\alpha) - \\ & 2(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)) \ln(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha))], \quad (2.4.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_A^{(5)+(6)}(q^2) = & -\frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy y \frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)} + \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (a((1+z)^2 - 4y(1+z-y)) - b(z(1+z)^2 - 2y((1+z)^2 - 2y)) + \\ & \tau y(z-y)(1+z-2y)) \left[\frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)} - \frac{1}{\mathfrak{D}_2(\alpha)} \right] - \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (2 + 3z - 6y) [\ln(\mathfrak{D}_2(\alpha) + y(1-\alpha)) - \ln \mathfrak{D}_2(\alpha)]. \quad (2.4.6) \end{aligned}$$

Заметим, что в выражениях (2.4.2)-(2.4.6) точно учитываются значения массовых параметров заряженного лептона a , нейтрино b , значение калибровочного параметра α также является произвольным. Все вычисления были выполнены при произвольном значении q^2 .

Вклады $\gamma - Z$ диаграмм, показанных на Рис. 2.2(a)-2.2(h), в анапольный формфактор нейтрино могут быть получены на основе разложения (2.1.41) и имеют следующий вид

$$f_A^{(j)}(q^2) = \frac{g}{4 \cos \theta_W} \frac{1}{q^2 - M_Z^2} \left\{ \frac{A^{(j)}(\alpha, q^2)}{q^2} + (1 - \alpha_Z) \frac{B^{(j)}(\alpha, q^2)}{q^2 - \alpha_Z M_Z^2} \right\},$$

$$j = 7, \dots, 14. \quad (2.4.7)$$

Используя явный вид функций $A^{(j)}(\alpha, q^2)$ [формулы (2.1.16)-(2.1.22)], и $B^{(j)}(\alpha, q^2)$ [формулы (2.1.23)-(2.1.29)], а также с помощью соотношения (2.4.7) можно получить выражения для вкладов $\gamma - Z$ диаграмм при произвольных значениях калибровочных параметров, α и α_Z и $q^2 \neq 0$. Однако, ввиду громоздкости данных формул здесь они приводиться не будут.

2.4.1 Анапольный момент

В данном разделе мы рассмотрим анапольный момент массивного нейтрино. Нами были получены вклады треугольных диаграмм [формулы (2.4.2)-(2.4.6)], и $\gamma - Z$ диаграмм [формула (2.4.7)], в анапольный формфактор нейтрино при произвольном значении q^2 . Поскольку анапольный момент представляет собой статическую электромагнитную характеристику нейтрино, то значение q^2 в рассматриваемых формулах следует положить равным нулю. Заметим, что при выделении слагаемых, соответствующих анапольному моменту, необходимо принимать во внимание проблему, затронутую в разделе 2.1.1 настоящей работы, т.е. нужно проверить, чтобы сумма дополнительных слагаемых, пропорциональных матрице $\gamma_\mu \gamma_5$ была равна нулю.

В случае безмассового нейтрино величина анапольного момента связана с зарядовым радиусом посредством соотношения (см., например, работу [63])

$$a_\nu = \frac{1}{6} \langle r_\nu^2 \rangle.$$

В случае же массивной частицы эта простая зависимость нарушается в силу причин, описанных в разделе 2.1.

В выражение для анапольного момента дают вклады как треугольные диаграммы, показанные на Рис. 2.1(a)-2.1(f), так и $\gamma - Z$ диаграммы, изображенные на Рис. 2.2(a)-2.2(h). Таким образом, полное выражение для анапольного момента имеет форму

$$a_\nu = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} \left\{ \sum_{i=1}^6 \bar{a}^{(i)}(a, b, \alpha) + \sum_{j=7}^{14} \bar{a}^{(j)}(a, \alpha) \right\}.$$

Вклады треугольных диаграмм $\bar{a}^{(i)}(a, b, \alpha)$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \bar{a}^{(1)}(a, b, \alpha) = & -\frac{1}{6} \int_0^1 dz (2 + 3z - 6z^2 + z^3) \frac{1}{D} - \\ & \frac{1}{12} \int_0^1 dz (1 - z)^3 (a + 2b + 3bz) \left[\frac{1}{D_\alpha} - \frac{1}{D} \right] + \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz (1 - z)(1 - 4z + 3z^2) [\ln D_\alpha - \ln D], \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\bar{a}^{(2)}(a, b, \alpha) = -\frac{a - b}{12} \int_0^1 dz (2 - 3z + z^3) \frac{1}{D_\alpha}, \quad (2.4.9)$$

$$\bar{a}^{(3)}(a, b, \alpha) = \frac{a - b}{12} \int_0^1 dz z^3 \frac{1}{D_\alpha}, \quad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}^{(4)}(a, b, \alpha) = & -\frac{1}{12} \int_0^1 dz z^2 (9 - 2z) \frac{1}{D} - \\ & \frac{b}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (z(1 - z^2)(3 - z) - 4(1 - z)(z - y(1 + z))(z - y)) \times \\ & \left[\frac{1}{D_\alpha + y(1 - \alpha)} - \frac{1}{D} \right] + \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (6 - 3z - 4z^2 + 12y + 16y(z - y)) \times \\ & [\ln(D_\alpha + y(1 - \alpha)) - \ln D] - \\ & \frac{b}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (1 - z^2) [\ln D + \ln D_\alpha - 2 \ln(D_\alpha + y(1 - \alpha))] + \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy [D \ln D + D_\alpha \ln D_\alpha - 2(D_\alpha + y(1 - \alpha)) \ln (D_\alpha + y(1 - \alpha))], \quad (2.4.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}^{(5)+(6)}(a, b, \alpha) = & -\frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^z dy y \frac{1}{D_\alpha + y(1 - \alpha)} + \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (a((1 + z)^2 - 4y(1 + z - y)) - \\ & b(z(1 + z)^2 - 2y((1 + z)^2 - 2y))) \left[\frac{1}{D_\alpha + y(1 - \alpha)} - \frac{1}{D_\alpha} \right] - \\ & \frac{1}{4} \int_0^1 dz \int_0^z dy (2 + 3z - 6y) [\ln (D_\alpha + y(1 - \alpha)) - \ln D_\alpha]. \quad (2.4.12) \end{aligned}$$

Заметим, что также, как и в случае безмассового нейтрино, вклады треугольных диаграмм в анапольный момент являются конечными.

Для того, чтобы получить вклады $\gamma - Z$ диаграмм в анапольный момент удобно воспользоваться формулой (2.4.7), положив при этом $q^2 = 0$. Таким образом, выражения для

$$a^{(j)}(\alpha) = \frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} \bar{a}^{(j)}(\alpha),$$

принимают следующую форму

$$a^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{M_Z^2} Q^{(j)} - \frac{g}{4M_Z^2 \cos \theta_W} \frac{A^{(j)}(\alpha, q^2)}{q^2} \Big|_{q^2 \rightarrow 0}, \quad j = 7, \dots, 14, \quad (2.4.13)$$

в которых вклады в заряд даются выражениями (2.2.18)-(2.2.24). При выводе соотношения (2.4.13) мы положили $\alpha_Z = +\infty$. Используя формулу (2.4.13) получаем следующие выражения для $\bar{a}^{(j)}(\alpha)$

$$\begin{aligned} \bar{a}^{(7)}(\alpha) = & \cos^2 \theta_W \left\{ \cos^2 \theta_W \left(\omega \left[3 + \frac{3}{4} \alpha(1 + \alpha) \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. 1 - \frac{5\alpha}{8} - \frac{5\alpha^2}{8} - \frac{3\alpha^3}{4} \frac{\ln \alpha}{(1 - \alpha)} \right) - \frac{1}{2} \left(\omega \left[-\frac{14}{3} + \alpha \right] - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{18(1-\alpha)^3} \left(11 - 54\alpha + 54\alpha^2 - 2\alpha^3 - 9\alpha^4 - 18\alpha^2 \ln \alpha - 12\alpha^3 \ln \alpha + 18\alpha^4 \ln \alpha \right) \Bigg\}, \quad (2.4.14)$$

$$\bar{a}^{(8)}(\alpha) = \sin^2 \theta_W \left\{ \cos^2 \theta_W \left(\omega \frac{3+\alpha}{4} - \frac{5+\alpha}{8} - \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\ln \alpha}{(1-\alpha)} \right) - \frac{1}{18(1-\alpha)^3} (11 - 18\alpha + 9\alpha^2 - 2\alpha^3 + 6 \ln \alpha) \right\}, \quad (2.4.15)$$

$$\bar{a}^{(9)}(\alpha) = (\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) \cos^2 \theta_W \frac{1}{2} \{-\omega\alpha + \alpha - \alpha \ln \alpha\}, \quad (2.4.16)$$

$$\bar{a}^{(10)}(\alpha) = \cos^4 \theta_W \left\{ -\frac{3}{4} \omega (3 + \alpha^2) + \frac{3}{8} + \frac{5\alpha^2}{8} - \frac{3}{4} \alpha^2 \ln \alpha \right\}, \quad (2.4.17)$$

$$\bar{a}^{(11)+(12)}(\alpha) = \cos^2 \theta_W \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 \theta_W (-\omega\alpha + \alpha - \alpha \ln \alpha) - \frac{1}{3} (\omega + \ln \alpha) \right\}, \quad (2.4.18)$$

$$\bar{a}^{(13)}(\alpha) = (\sin^2 \theta_W - \cos^2 \theta_W) \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 \theta_W (-\omega\alpha + \alpha - \alpha \ln \alpha) + \frac{1}{6} (\omega + \ln \alpha) \right\}, \quad (2.4.19)$$

$$\bar{a}^{(14)}(\alpha) = - \left\{ \omega \left(-1 - \frac{28}{9} \sin^2 \theta_W \right) + \frac{1}{3} \sum_f Q_f \left(\pm \frac{1}{2} - 2Q_f \sin^2 \theta_W \right) \ln \left(\frac{m_f}{M} \right)^2 \right\}. \quad (2.4.20)$$

Выражения (2.4.14)-(2.4.20) являются расходящимися. Следовательно, окончательный вид данных формул зависит от метода регуляризации фейнмановских интегралов (2.1.8)-(2.1.14). Этим обстоятельством может быть объяснено некоторое различие между соотношениями (2.4.14)-(2.4.20) и соответствующими вкладами в зарядовый радиус, которые были получены в статье [69].

Глава 3

Эволюция спина нейтрино в произвольных внешних полях

В различных расширениях стандартной модели предсказываются новые типы взаимодействий для массивного нейтрино. Проблеме распространения нейтрино в среде в случае произвольных типов взаимодействия с фермионами вещества уделяется большое внимание (см., например, статьи [86, 87]). В работах [88–92] был развит релятивистски инвариантный формализм для описания спиновых и спин-флейворных осцилляций нейтрино, участвующего в векторных и аксиально-векторных взаимодействиях (в рамках стандартной модели) с движущейся средой под воздействием произвольных электромагнитных полей. В частности, используя общие предположения, такие как релятивистская инвариантность и линейность по вектору спина нейтрино S^μ , а также по характеристикам вещества (токи и поляризации фермионов), было выведено уравнение эволюции спина нейтрино. Данное уравнение применялось для описания осцилляций нейтрино в электромагнитных полях и веществе с учетом векторных и аксиально-векторных взаимодействий с фермионами вещества, что соответствует слабым взаимодействиям в рамках стандартной модели.

Дальнейшее развитие теории спиновых и флейворных осцилляций в различных электромагнитных полях и движущихся поляризованных средах

содержится в [93].

Заметим, что квазиклассический подход к описанию релаксации спина нейтрино в стохастических электромагнитных полях также применялся в статье [94]. Однако, проблема нахождения уравнения эволюции спина нейтрино, учитывающего новые, более общие типы взаимодействий нейтрино на сегодняшний день остается открытой.

В данной главе мы рассмотрим эволюцию спина нейтрино, взаимодействующего с веществом в рамках физической модели, допускающей новые, более общие типы взаимодействия нейтрино. Цель этого раздела состоит в том, чтобы вывести уравнение эволюции спина нейтрино напрямую из лагранжиана взаимодействия нейтрино. Результаты данной главы опубликованы в нашей статье [95].

Предположим, что лагранжиан взаимодействия нейтрино включает в себя не только векторное и аксиально-векторное взаимодействия стандартной модели, но также скалярное, псевдоскалярное, тензорное и псевдотензорное взаимодействия (не учитывающие производные от волновой функции нейтрино).

Вывод уравнения эволюции спина нейтрино, представленный в настоящей работе, основывается на общем уравнении эволюции спина в гейзенберговском представлении. Данный подход позволяет детально проанализировать влияние различных внешних полей на эволюцию спина нейтрино.

Для того, чтобы вывести квазиклассическое уравнение эволюции спина нейтрино, необходимо записать квантовое уравнение в гейзенберговском представлении, которое описывает эволюцию спина фермиона, имеющего энергию E_ν , импульс \mathbf{p} и массу m_ν (см., например, статью [96])

$$\dot{\mathbf{O}} = i[\mathcal{H}, \mathbf{O}]_- . \quad (3.0.1)$$

Оператор спина определяется как

$$\mathbf{O} = \rho_3 \Sigma + \rho_1 \frac{\mathbf{p}}{E_\nu} - \rho_3 \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\Sigma)}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)}, \quad (3.0.2)$$

где $\rho_1 = -\gamma^5$, $\rho_3 = \gamma^0$, $\Sigma = \gamma^0\gamma^5\boldsymbol{\gamma}$. Заметим, что в данной формуле мы положили $\hbar = c = 1$. Гамильтониан \mathcal{H} в уравнении (3.0.1) описывает поведение четырехкомпонентной волновой функции нейтрино $\nu(x)$.

Лагранжиан \mathcal{L} , учитывающий общие типы взаимодействий нейтрино с внешними полями (без производных от волновой функции нейтрино), может быть записан в следующей форме:

$$- \mathcal{L} = g_s s(x) \bar{\nu} \nu + g_p \pi(x) \bar{\nu} \gamma^5 \nu + g_v V^\mu(x) \bar{\nu} \gamma_\mu \nu + \\ g_a A^\mu(x) \bar{\nu} \gamma_\mu \gamma^5 \nu + \frac{g_t}{2} T^{\mu\nu}(x) \bar{\nu} \sigma_{\mu\nu} \nu + \frac{g'_t}{2} \Pi^{\mu\nu}(x) \bar{\nu} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \nu, \quad (3.0.3)$$

где s , π , $V^\mu = (V^0, \mathbf{V})$, $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, $T_{\mu\nu} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\Pi_{\mu\nu} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ - скалярное, псевдоскалярное, векторное, аксиально-векторное, тензорное и псевдотензорное поля, а g_i ($i = s, p, v, a, t, t'$) - соответствующие константы связи, $\sigma_{\mu\nu} = (i/2)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. Используя лагранжиан в форме (3.0.3) получаем выражение для гамильтониана \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = g_s s \rho_3 - i g_p \pi \rho_2 + g_v (V^0 - (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{V})) - g_a (\rho_1 A^0 - (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A})) - \\ g_t (\rho_3 (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{b}) + \rho_2 (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a})) - i g'_t (\rho_3 (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}) - \rho_2 (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{d})), \quad (3.0.4)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$, $\rho_2 = i \rho_1 \rho_3$. Таким образом, из уравнения (3.0.1) следует, что

$$\frac{d\mathbf{O}}{dt} = -2g_s s \frac{\mathbf{p}}{E_\nu} + 2i g_p \pi \left\{ \rho_1 \boldsymbol{\Sigma} - \rho_3 \frac{\mathbf{p}}{E_\nu} - \rho_1 \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\boldsymbol{\Sigma})}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} \right\} - \\ 2g_v \rho_2 \left\{ \mathbf{V} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{V})}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} \right\} - \\ 2g_a \left\{ A^0 \rho_2 \left(\boldsymbol{\Sigma} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\boldsymbol{\Sigma})}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} \right) - \rho_3 \left(\mathbf{A} \times \boldsymbol{\Sigma} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{A}[\mathbf{p} \times \boldsymbol{\Sigma}])}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} \right) \right\} + \\ 2g_t \left\{ [\boldsymbol{\Sigma} \times \mathbf{b}] + \rho_2 \frac{\mathbf{p}}{E_\nu} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{b}) + \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{p} \times \mathbf{b}])}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} + \right. \\ \left. \rho_1 \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{a})}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} \right) - \rho_3 \frac{\mathbf{p}}{E_\nu} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}) \right\} +$$

$$2ig'_t \left\{ [\boldsymbol{\Sigma} \times \mathbf{c}] + \rho_2 \frac{\mathbf{p}}{E_\nu} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}) + \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{p} \times \mathbf{c}])}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} - \right. \\ \left. \rho_1 \left(\mathbf{d} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \mathbf{d})}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} \right) + \rho_3 \frac{\mathbf{p}}{E_\nu} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{d}) \right\}. \quad (3.0.5)$$

При выводе данного уравнения мы предполагали, что все внешние поля являлись независимыми от пространственных координат.

Следует отметить, что полученное уравнение, по-видимому, не имеет классической интерпретации из-за шредингеровского дрожания (*zitterbewegung*) [97]. Для того, чтобы устранить данное явление, необходимо вычислить четную часть уравнения (3.0.5) согласно правилу, сформулированному в статье [96]:

$$\left\{ \dot{\mathbf{O}} \right\} = \frac{1}{2E_\nu} \left\{ \dot{\mathbf{O}}, \mathcal{H}_0 \right\}_+, \quad (3.0.6)$$

где $\mathcal{H}_0 = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \rho_3 m_\nu$.

Выполняя антикоммутации в соотношении (3.0.6) мы получаем следующее выражение:

$$\left\{ \frac{d\mathbf{O}}{dt} \right\} = 2g_a \left(\frac{A^0}{E_\nu} [\mathbf{O} \times \mathbf{p}] - \frac{m_\nu}{E_\nu} [\mathbf{O} \times \mathbf{A}] - \frac{1}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} (\mathbf{A} \mathbf{p}) [\mathbf{O} \times \mathbf{p}] \right) + \\ 2g_t \left([\mathbf{O} \times \mathbf{b}] - \frac{1}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} (\mathbf{p} \mathbf{b}) [\mathbf{O} \times \mathbf{p}] + \frac{1}{E_\nu} [\mathbf{O} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{p}]] \right) + \\ 2ig'_t \left([\mathbf{O} \times \mathbf{c}] - \frac{1}{E_\nu(E_\nu + m_\nu)} (\mathbf{p} \mathbf{c}) [\mathbf{O} \times \mathbf{p}] - \frac{1}{E_\nu} [\mathbf{O} \times [\mathbf{d} \times \mathbf{p}]] \right). \quad (3.0.7)$$

Для любого оператора \hat{F} в квазиклассическом приближении ($\hbar \rightarrow 0$) справедливо соотношение [96]

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \left\{ \frac{d\hat{F}}{dt} \right\}.$$

Именно поэтому для того, чтобы получить квазиклассическое уравнение для эволюции спина нейтрино, мы заменяем

$$\left\{ \frac{d\mathbf{O}}{dt} \right\} \longrightarrow \frac{d\mathbf{O}}{dt}.$$

в уравнении (3.0.7). Затем, усредняя исследуемое уравнение по стационарной волновой функции нейтрино и принимая во внимание, что в этом случае справедливы соотношения

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \boldsymbol{\zeta}_\nu, \quad \langle \mathbf{P} \rangle = \boldsymbol{\beta} E_\nu,$$

где $\boldsymbol{\beta}$ - скорость нейтрино, мы получаем релятивистски инвариантное уравнение для вектора спина нейтрино $\boldsymbol{\zeta}_\nu$ в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\zeta}_\nu}{dt} = & 2g_a \left\{ A^0 [\boldsymbol{\zeta}_\nu \times \boldsymbol{\beta}] - \frac{m_\nu}{E_\nu} [\boldsymbol{\zeta}_\nu \times \mathbf{A}] - \frac{E_\nu}{E_\nu + m_\nu} (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) [\boldsymbol{\zeta}_\nu \times \boldsymbol{\beta}] \right\} + \\ & 2g_t \left\{ [\boldsymbol{\zeta}_\nu \times \mathbf{b}] - \frac{E_\nu}{E_\nu + m_\nu} (\boldsymbol{\beta}\mathbf{b}) [\boldsymbol{\zeta}_\nu \times \boldsymbol{\beta}] + [\boldsymbol{\zeta}_\nu \times [\mathbf{a} \times \boldsymbol{\beta}]] \right\} + \\ & 2ig'_t \left\{ [\boldsymbol{\zeta}_\nu \times \mathbf{c}] - \frac{E_\nu}{E_\nu + m_\nu} (\boldsymbol{\beta}\mathbf{c}) [\boldsymbol{\zeta}_\nu \times \boldsymbol{\beta}] - [\boldsymbol{\zeta}_\nu \times [\mathbf{d} \times \boldsymbol{\beta}]] \right\}. \end{aligned} \quad (3.0.8)$$

Стоит отметить, что в согласии с результатами работы [87] ни скалярное, ни псевдоскалярное, ни векторное взаимодействия не дают вкладов в эволюцию спина нейтрино.

Релятивистски инвариантная форма уравнения (3.0.8) в явном виде может быть получена с использованием четырехмерного вектора S^μ , который определяется трехмерным вектором $\boldsymbol{\zeta}_\nu$ с помощью соотношения:

$$S^\mu = \left(\frac{(\boldsymbol{\zeta}_\nu \langle \mathbf{P} \rangle)}{m_\nu}, \boldsymbol{\zeta}_\nu + \frac{\langle \mathbf{P} \rangle (\boldsymbol{\zeta}_\nu \langle \mathbf{P} \rangle)}{m_\nu (m_\nu + E_\nu)} \right). \quad (3.0.9)$$

Таким образом, мы получаем релятивистски инвариантную форму для уравнения эволюции спина нейтрино S^μ , учитывающего общие взаимодействия нейтрино с внешними полями

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = 2g_t (T^{\mu\nu} S_\nu - u^\mu T^{\lambda\rho} u_\lambda S_\rho) + 2ig'_t (\tilde{\Pi}^{\mu\nu} S_\nu - u^\mu \tilde{\Pi}^{\lambda\rho} u_\lambda S_\rho) + 2g_a G^{\mu\nu} S_\nu, \quad (3.0.10)$$

где $G^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\alpha u_\beta$, $u^\mu = (E_\nu/m_\nu)(1, \boldsymbol{\beta})$, $\tilde{\Pi}^{\mu\nu} = (1/2)\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta}$. Тензор $G_{\mu\nu}$ может быть описан с помощью двух векторов $G_{\mu\nu} = (-\mathbf{P}, \mathbf{M})$, которые

представляются в форме,

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \gamma(A^0\boldsymbol{\beta} - \mathbf{A}), \\ \mathbf{P} &= -\gamma[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{A}],\end{aligned}\tag{3.0.11}$$

где $\gamma = E_\nu/m_\nu$. Производная в левой части уравнения (3.0.10) вычисляется по собственному времени нейтрино $\tau = (m_\nu/E_\nu)t$, где t - время в лабораторной системе отсчета.

Уравнение эволюции спина нейтрино (3.0.10) может применяться в любой теоретической модели, в которой нейтрино имеет вышеупомянутые типы взаимодействий.

Теперь давайте обсудим случай взаимодействий стандартной модели, которые несомненно являются одними из возможных приложений рассматриваемого подхода. Также предположим, что вещество состоит из электронов, протонов и нейтронов. Следовательно, константы связи, входящие в лагранжиан (3.0.3) имеют вид: $g_i = 0$ (для $i = s, p, t'$), $g_v = g_a = G_F/\sqrt{2}$, $g_t = \mu$, где G_F - константа Ферми, а μ - магнитный момент нейтрино. Векторное и аксиально-векторное поля могут быть выражены в форме (см., например, статью [42])

$$A^\mu = V^\mu = \sum_{f=e,p,n} j_f^\mu q_f^{(1)} + \lambda_f^\mu q_f^{(2)},\tag{3.0.12}$$

где

$$\begin{aligned}q_f^{(1)} &= (I_{3L}^{(f)} - 2Q^{(f)} \sin^2 \theta_W + \delta_{ef}), & q_f^{(2)} &= -(I_{3L}^{(f)} + \delta_{ef}), \\ \delta_{ef} &= \begin{cases} 1, & f = e; \\ 0, & f = n, p; \end{cases}\end{aligned}\tag{3.0.13}$$

а $I_{3L}^{(f)}$ - величина третьей компоненты изоспина фермиона f , $Q^{(f)}$ - значение его электрического заряда, θ_W - угол Вайнберга. В случае стандартной модели тензорное поле соответствует электромагнитному взаимодействию

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{B}),\tag{3.0.14}$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} - векторы напряженностей электрического и магнитного полей соответственно. Суммирование в соотношении (3.0.12) выполняется по электронам, протонам и нейтронам среды. Выражение (3.0.12) для внешнего поля A^μ зависит (см. также [89–92]) от фермионных токов j_f^μ , и поляризаций λ_f^μ , которые, в свою очередь, выражаются через плотности n_f , скорости систем отсчета \mathbf{v}_f , в которых средняя скорость каждого из типов фермионов $f = e, p, n$, равна нулю, а также через векторы поляризации ζ_f :

$$j_f^\mu = (n_f, n_f \mathbf{v}_f), \quad (3.0.15)$$

$$\lambda_f^\mu = \left(n_f (\zeta_f \mathbf{v}_f), n_f \zeta_f \sqrt{1 - v_f^2} + \frac{n_f \mathbf{v}_f (\zeta_f \mathbf{v}_f)}{1 + \sqrt{1 - v_f^2}} \right). \quad (3.0.16)$$

Детали процедуры усреднения по фермионам среды также обсуждались в статье [89].

Ковариантное уравнение эволюции спина нейтрино во внешних полях, определяемое формулами (3.0.10)-(3.0.15), позволяет описать прецессию спина нейтрино в случае произвольно движущейся и поляризованной среды, причем масса нейтрино учитывается точно¹. На основе уравнения (3.0.10) (см. также (3.0.8)), рассмотрим теперь уравнение для трехмерного вектора спина нейтрино ζ_ν ,

$$\frac{d\zeta_\nu}{dt} = \frac{2\mu}{\gamma} [\zeta_\nu \times \mathbf{B}_0] + \frac{\sqrt{2}G_F}{\gamma} [\zeta_\nu \times \mathbf{M}_0], \quad (3.0.17)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \gamma \boldsymbol{\beta} \left(A^0 - \frac{E_\nu}{E_\nu + m_\nu} (\mathbf{A} \boldsymbol{\beta}) \right) - \mathbf{A}, \\ \mathbf{B}_0 &= \gamma \left\{ \mathbf{B} + [\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}] - \frac{E_\nu}{E_\nu + m_\nu} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \mathbf{B}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.0.18)$$

¹В данном подходе нигде не использовалось предположение $E_\nu \gg m_\nu$.

являются величинами, определенными в системе покоя нейтрино. Выведенные уравнения (3.0.17)-(3.0.18) воспроизводят аналогичные уравнения для нейтрино, распространяющихся в плазме из электронов, которые были получены в статье [89] на основе обобщения уравнения Баргмана-Мишеля-Телегди. Подчеркнем, что в подходе, разработанном в настоящей работе, на начальном этапе был использован *релятивистки инвариантный лагранжиан* взаимодействия нейтрино для вывода *релятивистки инвариантного уравнения* эволюции спина нейтрино.

Следует отметить, что к проблеме эволюции спина нейтрино в присутствии вещества из фермионов можно подойти с точки зрения метода кинетических уравнений [98]. Было показано, что используя кинетические уравнения можно вывести аналог уравнений (3.0.17)-(3.0.18) для особых случаев не движущейся ($\mathbf{v}_f = 0$) и неполяризованной ($\zeta_f = 0$) среды при рассмотрении ультрарелятивистского нейтрино. Однако, наш подход, как это уже было отмечено ранее, справедлив для случаев произвольной скорости нейтрино, а также произвольно движущейся и поляризованной среды.

Теперь давайте детально обсудим те приближения, которые были сделаны при выводе уравнения эволюции спина нейтрино. Прежде всего, мы пренебрегли зависимостью от пространственных координат во всех внешних полях. Чтобы проанализировать адекватность данного приближения рассмотрим противоположную ситуацию. Для простоты, будем исследовать взаимодействия нейтрино в рамках стандартной модели, а также не движущуюся и не поляризованную среду. Тогда гамильтониан (3.0.4) принимает форму,

$$\mathcal{H} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} n_{\text{eff}} (1 + \gamma_5), \quad (3.0.19)$$

где

$$n_{\text{eff}} = \sum_{f=e,p,n} n_f q_f^{(1)},$$

эффективная плотность среды, которая, как это теперь предполагается, за-

висит от пространственных координат. Для того, чтобы изучить поправки к уравнению (3.0.8), мы должны принять во внимание коммутационное соотношение: $[n_{\text{eff}}, \mathbf{p}]_- = i\hbar \nabla n_{\text{eff}}$. В противоположность к принятому ранее соглашению, теперь мы будем считать, что $\hbar \neq 1$. Таким образом, удерживая поправки первого порядка в разложении по \hbar мы получаем аналог уравнения (3.0.8),

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_\nu}{dt} = \frac{\sqrt{2}G_F}{\hbar} \left\{ n_{\text{eff}} [\zeta_\nu \times \beta] - \right. \\ \left. \frac{\hbar}{2(E_\nu + m_\nu)} \left[[[\beta \times \nabla n_{\text{eff}}] \times \zeta_\nu] + (\nabla n_{\text{eff}} \beta) \left(\frac{E_\nu}{E_\nu + m_\nu} (\beta \zeta_\nu) - 1 \right) \right] - \right. \\ \left. \frac{i\hbar}{2E} [\nabla n_{\text{eff}} \times \langle \rho_3 \Sigma \rangle] \right\}, \quad (3.0.20) \end{aligned}$$

где среднее в последнем слагаемом имеет вид

$$\langle \rho_3 \Sigma \rangle = \int d^3\mathbf{x} \nu^\dagger(x) \rho_3 \Sigma \nu(x).$$

Отсюда следует, что для релятивистских нейтрино ($E_\nu \gg m_\nu$) дополнительные квантовые слагаемые ($\sim \hbar$) стремятся к нулю если выполняется следующее условие:

$$\frac{\hbar}{E_\nu} \left| \frac{\nabla n_{\text{eff}}}{n_{\text{eff}}} \right| \ll 1. \quad (3.0.21)$$

Данное ограничение подразумевает очень медленное изменение эффективной плотности на расстояниях, порядка ширины волнового пакета нейтрино $L = \hbar/E_\nu$.

Давайте рассмотрим второе приближение, сделанное при выводе уравнения (3.0.8), которое позволило производить вычисления в квазиклассическом пределе. Для того, чтобы пренебречь шредингеровским дрожанием, должно быть удовлетворено следующее условие [96]

$$\frac{\hbar}{2E_\nu} \left| \langle \dot{\mathbf{O}} \rangle \right| \ll 1. \quad (3.0.22)$$

Применительно к случаю взаимодействий стандартной модели это ограничение может быть переписано в виде

$$\frac{G_F}{E_\nu} n_{\text{eff}} \ll 1. \quad (3.0.23)$$

В рассматриваемом случае вещество снова считалось неподвижным и неполяризованным. Данное условие означает, что квантовые эффекты не существенны при рассеянии нейтрино на частицах среды. Действительно, если для простоты мы рассмотрим только электронную компоненту вещества (электронную плазму), то ограничение (3.0.23) может быть выражено в следующей форме:

$$L^2 \ll \lambda \sqrt{\sigma}, \quad (3.0.24)$$

где σ - сечение рассеяния нейтрино на электронах, $\lambda \sim 1/(n_e \sigma)$ - средняя длина свободного пробега нейтрино в данной среде, а n_e - плотность электронов. Если условие (3.0.24) выполнено, то характерные размеры (λ и σ), соответствующие процессу рассеяния, гораздо больше характерной ширины волнового пакета нейтрино L . В противном случае рассеяние нейтрино на электронах следует рассматривать в рамках существенно квантового подхода.

В заключение отметим, что в данной главе было получено квазиклассическое уравнение для описания эволюции спина нейтрино в случае, когда нейтрино взаимодействует с внешними полями посредством самых общих типов взаимодействий (без учета производных от волновой функции нейтрино), причем на начальном этапе мы использовали лишь лагранжиан взаимодействия нейтрино, содержащий скалярное, псевдоскалярное, векторное, аксиально-векторное, тензорное и псевдотензорное слагаемые. Преимущество предложенного нового метода вывода уравнения эволюции спина нейтрино состоит в том, что он может применяться в любой теоретической модели, в которой предсказываются вышеупомянутые взаимодействия нейтрино. Кроме того, используемый подход позволяет исследовать

ограничения на характеристики среды и нейтрино, при которых справедлив квазиклассический подход к описанию эволюции спина нейтрино. В качестве примера мы получили уравнение эволюции спина нейтрино для взаимодействий стандартной модели в случае движущейся и поляризованной среды.

Глава 4

Релаксация спина нейтрино в веществе со стохастическими характеристиками

На основе формализма для описания эволюции спина нейтрино в произвольных внешних полях, разработанного в главе 3, можно рассмотреть случай взаимодействия нейтрино с веществом посредством слабых токов в рамках стандартной модели. Соответствующие формулы (см. (3.0.12)-(3.0.18)) были также получены в разделе 3. Заметим, что подход, разработанный в предыдущем разделе, позволяет рассмотреть прецессию спина даже без воздействия внешних электромагнитных полей, а только за счет взаимодействия с веществом. Отметим, что впервые прецессия спина нейтрино за счет слабых взаимодействий с частицами внешней обсуждалась в работах [89, 92]. Данная ситуация представляет интерес, например, для нейтрино, описываемого в рамках минимально расширенной стандартной модели. Оценка величины магнитного момента может быть получена исходя из результатов раздела 2.3.2 (см. формулу (2.3.23), а также работу [50]) и составляет

$$\mu = 3 \times 10^{-19} \left(\frac{m_\nu}{1 \text{ эВ}} \right) \mu_B.$$

Следовательно, влияние электромагнитных полей на динамику спина нейтрино является крайне слабым. Таким образом, в некоторых ситуациях прецессия спина может происходить даже без учета влияния внешних элек-

ромагнитных полей.

Рассмотрим эволюцию спина нейтрино на основе уравнения, аналогичного уравнениям (3.0.17)-(3.0.18), которое описывает прецессию спина при взаимодействии нейтрино с движущимся и поляризованным веществом. Данный подход был развит в работах [89, 92] и [99]. В частности, используя общие предположения, такие как релятивистская инвариантность и линейность по вектору спина нейтрино S^μ , а также по характеристикам вещества (токи и поляризации фермионов), было выведено уравнение эволюции спина нейтрино. Хотя данное уравнение можно записать в явно ковариантном виде для четырехмерного вектора спина S^μ с использованием тензора $G_{\mu\nu}$, в настоящем разделе удобно представить его как уравнение для трехмерного вектора спина нейтрино ζ_ν

$$\frac{d\zeta_\nu}{dt} = \frac{2}{\gamma} [\zeta_\nu \times \mathbf{M}'_0] - \frac{2}{\gamma} [\zeta_\nu \times \mathbf{P}'_0], \quad (4.0.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_0 &= \gamma\beta \left(g^0 - \frac{(\beta\mathbf{g})}{1 + \gamma^{-1}} \right) - \mathbf{g}, \\ \mathbf{P}'_0 &= -\gamma\beta \left(f^0 - \frac{(\beta\mathbf{f})}{1 + \gamma^{-1}} \right) + \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (4.0.2)$$

Четырехмерные векторы $g^\mu = (g^0, \mathbf{g})$ и $f^\mu = (f^0, \mathbf{f})$ связаны с четырехмерными векторами тока j_f^μ , и поляризации λ_f^μ , частиц среды посредством соотношений

$$\begin{aligned} g^\mu &= \sum_f (\rho_f j_f^\mu + \omega_f \lambda_f^\mu), \\ f^\mu &= \sum_f (\xi_f j_f^\mu + \kappa_f \lambda_f^\mu), \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

где ρ_f , ω_f , ξ_f и κ_f - константы, которые определяются конкретным типом взаимодействия нейтрино со средой. Суммирование в формулах (4.0.3) выполняется по всем типам фермионов среды.

Основываясь на соотношениях (4.0.1)-(4.0.3), получаем уравнение для описания эволюции спиральности нейтрино $h = (\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\zeta}_\nu)/\beta$, которое имеет вид

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{2}{\gamma}((\mathbf{g}[\mathbf{n} \times \boldsymbol{\zeta}_\nu]) + (\mathbf{f}[\mathbf{n} \times \boldsymbol{\zeta}_\nu])), \quad (4.0.4)$$

где \mathbf{n} - единичный вектор в направлении скорости нейтрино.

Будем решать уравнения (4.0.1)-(4.0.4) методом последовательных итераций. Представляем формальное решение уравнения (4.0.1) в интегральной форме

$$\boldsymbol{\zeta}_\nu(t) = \frac{2}{\gamma} \int_0^t dt' ([\boldsymbol{\zeta}_\nu(t') \times \mathbf{M}'_0(t')] - [\boldsymbol{\zeta}_\nu(t') \times \mathbf{P}'_0(t')])$$

в правую часть уравнения (4.0.4). Аналогичный метод исследования уравнения эволюции спина нейтральной частицы применялся в работе [94] при рассмотрении релаксации спина в стохастических электромагнитных полях. После несложных, но довольно длинных вычислений, приходим к следующему соотношению

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(t) = & - \left(\frac{2}{\gamma}\right)^2 \left[\int_0^t dt' \{[(\mathbf{g}_\perp(t)\mathbf{f}_\perp(t')) + (\mathbf{f}_\perp(t)\mathbf{g}_\perp(t'))]h(t') + \right. \\ & \gamma [(\mathbf{g}_\perp(t)\boldsymbol{\zeta}_{\nu\perp}(t'))[\beta f^0(t') - f_\parallel(t')] + (\mathbf{f}_\perp(t)\boldsymbol{\zeta}_{\nu\perp}(t'))[\beta g^0(t') - g_\parallel(t')] \} + \\ & \int_0^t dt' \{ (\mathbf{g}_\perp(t)\mathbf{g}_\perp(t'))h(t') + \gamma(\mathbf{g}_\perp(t)\boldsymbol{\zeta}_{\nu\perp}(t'))[\beta g^0(t') - g_\parallel(t')] \} + \\ & \left. \int_0^t dt' \{ (\mathbf{f}_\perp(t)\mathbf{f}_\perp(t'))h(t') + \gamma(\mathbf{f}_\perp(t)\boldsymbol{\zeta}_{\nu\perp}(t'))[\beta f^0(t') - f_\parallel(t')] \} \right], \quad (4.0.5) \end{aligned}$$

где символы \parallel и \perp обозначают продольную и поперечную составляющую вектора по отношению к скорости нейтрино.

Перейдем теперь к исследованию усредненных характеристик, которые мы будем обозначать посредством символа $\langle \dots \rangle$. Под усредненной величиной мы будем понимать среднее по ансамблю частиц или среднее по времени одной частицы. Будем считать, что спиральность частицы в правой части уравнения (4.0.5) является приблизительно постоянной на протяжении короткого времени релаксации характеристик вещества. Таким

образом, необходимо учитывать корреляции характеристик среды только между собой.

Далее мы будем использовать гипотезу стохастического изотропного вещества, т.е. корреляционные функции компонент скорости и поляризации частиц среды имеют вид

$$\begin{aligned}\langle v_{fi}(t)v_{f'j}(t') \rangle &= \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{ff'}\langle (\mathbf{v}_f(t)\mathbf{v}_f(t')) \rangle, \\ \langle \zeta_{fi}(t)\zeta_{f'j}(t') \rangle &= \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{ff'}\langle (\boldsymbol{\zeta}_f(t)\boldsymbol{\zeta}_f(t')) \rangle.\end{aligned}\quad (4.0.6)$$

Заметим, что в соотношениях (4.0.6) мы пренебрегли членами порядка α_{em} , где α_{em} - постоянная тонкой структуры (см., например, книгу [100]).

Усредняя уравнение (4.0.5) с использованием формул (4.0.6), получаем уравнение эволюции среднего значения спиральности нейтрино в изотропной стохастической среде

$$\begin{aligned}\frac{\langle dh(t) \rangle}{dt} &= - \left(\frac{2}{\gamma} \right)^2 \int_0^t dt' \{ \langle (\mathbf{g}_\perp(\mathbf{r}, t)\mathbf{g}_\perp(\mathbf{r}', t')) \rangle + \langle (\mathbf{f}_\perp(\mathbf{r}, t)\mathbf{f}_\perp(\mathbf{r}', t')) \rangle + \\ &\quad \langle (\mathbf{g}_\perp(\mathbf{r}, t)\mathbf{f}_\perp(\mathbf{r}', t')) \rangle + \langle (\mathbf{f}_\perp(\mathbf{r}, t)\mathbf{g}_\perp(\mathbf{r}', t')) \rangle \} \langle h(t') \rangle.\end{aligned}\quad (4.0.7)$$

В формуле (4.0.7) мы явно указали зависимость поперечных полей \mathbf{g}_\perp и \mathbf{f}_\perp , которые являются двумерными векторами, перпендикулярными скорости нейтрино, от пространственных координат \mathbf{r} и \mathbf{r}' , соответствующих положению нейтрино в моменты времени t и t' .

Уравнение (4.0.7) является основным при изучении релаксации спина нейтрино, распространяющегося в веществе со стохастическими характеристиками (скорость и поляризация среды). Существенным условием при выводе данного уравнения являлось условие электронейтральности нейтрино, а также предположение о том, что среднее значение внешних полей равно нулю.

Уравнение (4.0.7) может быть преобразовано к более удобному для дальнейших исследований виду [101]. Корреляционные функции полей материи

отличны от нуля только в течение времени корреляции. Предполагая однородность системы по времени, а именно, то, что корреляционные функции могут зависеть только от $(t-t')$, получаем, что рассматриваемое уравнение принимает следующую форму

$$\frac{d\langle h \rangle}{dt} = -\lambda \langle h \rangle, \quad (4.0.8)$$

где

$$\lambda = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^2 \int_0^\infty dt' \{ \langle (\mathbf{g}_\perp(\mathbf{r}, t) \mathbf{g}_\perp(0, 0)) \rangle + \langle (\mathbf{f}_\perp(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}_\perp(0, 0)) \rangle + \langle (\mathbf{g}_\perp(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}_\perp(0, 0)) \rangle + \langle (\mathbf{f}_\perp(\mathbf{r}, t) \mathbf{g}_\perp(0, 0)) \rangle \}, \quad (4.0.9)$$

и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ - положение частицы в момент времени t . В дальнейшем мы будем полагать, что $\mathbf{r} = \beta t$. Это является хорошим приближением для нейтральной частицы, распространяющейся вдоль прямой линии на расстояние, соответствующее длине корреляции.

В качестве примера использования уравнений (4.0.8)-(4.0.9) рассмотрим случай взаимодействия нейтрино с веществом, состоящем из ультрарелятивистских частиц, т. е. мы будем полагать, что $v_f^2 \sim 1$. Используя формулы (3.0.15), четырехмерный вектор поляризации становится равным

$$\lambda_f^\mu = (\zeta_f \mathbf{v}_f) j_f^\mu = (\zeta_f \mathbf{v}_f) (n_f, n_f \mathbf{v}_f). \quad (4.0.10)$$

В дальнейшем будет удобно перейти от корреляций между функциями \mathbf{g} и \mathbf{f} в уравнениях (4.0.8)-(4.0.9) к корреляционным функциям

$$\langle (\mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_f(0, 0)) \rangle, \quad \text{и} \quad \langle (\zeta_f(\mathbf{r}, t) \zeta_f(0, 0)) \rangle.$$

Используя соотношения (4.0.6) и (4.0.10), получаем выражение для коэффициента λ в форме

$$\lambda \approx \frac{8}{3} \left(\frac{m_\nu}{E_\nu}\right)^2 \sum_f n_f^2 \left\{ (\rho_f + \xi_f)^2 \int_0^\infty dt \langle (\mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_f(0, 0)) \rangle + (\omega_f + \kappa_f)^2 \frac{1}{9} \int_0^\infty dt \langle (\zeta_f(\mathbf{r}, t) \zeta_f(0, 0)) \rangle [4 \langle (\mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_f(0, 0)) \rangle^2 + 1] \right\}. \quad (4.0.11)$$

При выводе формулы (4.0.11) мы приближенно считали, что плотность среды постоянна во времени и не зависит от пространственных координат, $n_f(\mathbf{r}, t) = n_f$.

Необходимо отметить, что уравнения (4.0.8) и (4.0.11) справедливы для широкого класса взаимодействий нейтрино с внешними полями, описанных в разделе 3. Для того, чтобы зафиксировать тип взаимодействия, а также охарактеризовать состав вещества, необходимо определить коэффициенты ρ_f , ξ_f , ω_f и κ_f . Давайте рассмотрим мюонное нейтрино, распространяющееся в ультрарелятивистской плазме из электронов и позитронов, причем взаимодействие с частицами среды осуществляется в рамках стандартной модели посредством нейтральных токов. В этом случае коэффициенты ρ_f , ξ_f , ω_f и κ_f имеют следующую форму

$$\begin{aligned} \rho_{e^-} = -\rho_{e^+} &= -\frac{G_F}{2\sqrt{2}}(1 - 4\sin^2\theta_W); & \xi_f &= 0, \quad \text{при } f = e^\pm; \\ \omega_{e^-} = -\omega_{e^+} &= \frac{G_F}{2\sqrt{2}}; & \kappa_f &= 0, \quad \text{при } f = e^\pm. \end{aligned} \quad (4.0.12)$$

В дальнейших оценках для простоты мы пренебрежем спиновыми корреляционными функциями частиц среды в формуле (4.0.11). Таким образом, с помощью соотношений (4.0.12) получаем выражение для коэффициента λ в следующем виде

$$\lambda \approx \frac{1}{3} \frac{m_\nu^2}{E_\nu^2} G_F^2 (1 - 4\sin^2\theta_W)^2 n_e^2 \sum_{f=e^\pm} \int_0^\infty dt \langle (\mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_f(0, 0)) \rangle. \quad (4.0.13)$$

Заметим, что в формуле (4.0.13) мы положили $n_{e^-} = n_{e^+} = n_e$, что соответствует случаю электронейтральной плазмы.

Корреляционные функции в формуле (4.0.13) можно приблизительно оценить как

$$\langle (\mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_f(0, 0)) \rangle \approx \exp(-t/l), \quad \text{при } f = e^\pm, \quad (4.0.14)$$

где $l \sim 1/(n\sigma)$ - длина свободного пробега фермиона в плазме.

Соотношение (4.0.13) можно применить для описания эволюции спиральности нейтрино в ранней Вселенной. Рассмотрим раннюю Вселенную на стадии, соответствующей температуре T , примерно равной 1.3×10^{11} К. При такой температуре процентное содержание протонов и нейтронов в ранней Вселенной чрезвычайно мало [102]. Напомним, что масса мюона составляет порядка 100 МэВ. Следовательно практически все мюоны распадаются к данному моменту эволюции Вселенной. Таким образом, можно считать, что плазма ранней Вселенной состоит главным образом из фотонов, электронов и позитронов, находящихся в тепловом равновесии, причем электроны и позитроны необходимо считать релятивистскими частицами.

Физический смысл величины λ состоит в том, что данная характеристика определяет скорость рождения право-поляризованных нейтрино в ранней Вселенной при взаимодействии с веществом посредством слабых токов. Следовательно, скорость рождения правых нейтрино должна быть меньше, чем скорость расширения Вселенной, т.е. данный процесс не должен находиться в равновесии с другими процессами. Таким образом, должно удовлетворяться неравенство [102]: $\lambda < H$, где H - параметр Хаббла. Используя соотношения (4.0.13) и (4.0.14) для случая плазмы состоящей из электронов и позитронов при температуре 1.3×10^{11} К получаем оценку величины массы мюонного нейтрино

$$m_{\nu_\mu} < 56 \text{ кэВ}. \quad (4.0.15)$$

Оценка (4.0.15) представляет собой более жесткое космологическое ограничение на массу нейтрино. Напомним, что масса мюонного нейтрино на сегодняшний день ограничена величиной $115 \div 1000$ кэВ (см. работы [38, 103], а также раздел 1.5.2 диссертации).

Глава 5

Осцилляции нейтрино в электромагнитных полях различной конфигурации

С тех пор, как в 1958 г. была теоретически предсказана возможность нейтринных осцилляций [8], предпринимались многочисленные попытки обнаружить это явление. Однако, несмотря на достигнутые успехи в объяснении проблемы солнечных и атмосферных нейтрино (см., например, статью [77], посвященную современному статусу вопроса о смешивании и осцилляциях нейтрино), на данный момент не существует однозначного окончательного механизма для описания нейтринных осцилляций.

Электромагнитные свойства нейтрино и, в частности, взаимодействие нейтрино с электромагнитными полями является одной из главных проблем физики нейтрино. Объясняется это тем, что наряду с возможностью существования ненулевой массы, нетривиальные электромагнитные свойства нейтрино (т.е. отличие от нуля электромагнитных формфакторов) явились бы явным указанием на необходимость выхода за рамки стандартной теории электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама-Глешоу. В большинстве выполненных ранее исследований влияния электромагнитных полей на нейтрино и возникающих при этом нейтринных осцилляци-

ях (см., например, работы [41, 43–47, 104–108]) рассматривался конкретный случай постоянного во времени поперечного относительно движения нейтрино магнитного поля \mathbf{B}_\perp . В недавно выполненных работах [53, 88] (см. также [91, 93]) на основе обобщения уравнения Баргманна-Мишеля-Телегди на случай движения нейтрино в классическом электромагнитном поле получен новый эффективный гамильтониан, входящий в шредингеровское уравнение эволюции нейтрино, который позволяет рассматривать переходы с изменением спиральности $\nu_{i-} \leftrightarrow \nu_{j+}$ между нейтринными состояниями, принадлежащими как одинаковым, так и различным поколениям. Использование нового гамильтониана позволило впервые рассмотреть переходы нейтрино $\nu_{i-} \leftrightarrow \nu_{j+}$ и предсказать возможность резонансного усиления соответствующих нейтринных осцилляций в поле электромагнитной волны круговой поляризации и в конфигурациях электромагнитных полей, содержащих продольное относительно движения нейтрино магнитное поле \mathbf{B}_\parallel .

Известно, что наряду с эффектом Михеева-Смирнова-Вольфенштейна [39, 40] (а также аналогом данного эффекта для случая спин-флейворных осцилляций нейтрино [44, 106]) может существовать и другой механизм усиления осцилляций нейтрино, в основе которого лежит явление параметрического резонанса [109–117].

Необходимо отметить, что упомянутые механизмы усиления нейтринных осцилляций радикально отличаются друг от друга. В случае эффекта МСВ увеличение амплитуды нейтринных осцилляций достигается за счет определенного выбора параметров, описывающих нейтрино и внешние условия, например, плотность среды. Следует подчеркнуть, что данные параметры считаются постоянными или, по крайней мере, слабо меняющимися вдоль пути нейтрино. Таким образом можно добиться того, чтобы эффективный угол смешивания был близок к $\pi/4$ даже при малом угле смешивания в вакууме. В случае же параметрического резонанса

эффективный угол смешивания не является, в общем случае, большой величиной. Однако предполагается, что такие внешние параметры, как, например, плотность среды, периодически изменяются вдоль пути нейтрино. Увеличение вероятности перехода нейтрино из одного состояния в другое достигается за счет особых фазовых соотношений.

В одной из первых работ [118], посвященных исследованию явления параметрического резонанса в физике элементарных частиц, изучались осцилляции между нейтроном и антинейтроном в периодически меняющемся магнитном поле. Сформулированный в статье [118] подход к рассмотрению возникновения параметрического резонанса, а также метод нахождения приближенного решения уравнения эволюции двухуровневой системы использовались при изучении данного явления в нейтринных осцилляциях (см., например, [109]).

Возникновение параметрического резонанса в осцилляциях нейтрино в случае меняющейся плотности среды неоднократно обсуждалось в литературе. В первую очередь необходимо отметить работу [109], в которой представлено приближенное решение уравнения эволюции пучка нейтрино при прохождении через вещество, плотность которого меняется по гармоническому закону. В работе [110] было проведено численное моделирование прохождения пучка нейтрино через Землю, причем плотность вещества Земли считалась переменной. Аналитическое решение уравнения в случае распространения нейтрино в среде с переменной плотностью было найдено в работе [111]. Однако эффективный угол смешивания и эффективная длина осцилляций считались мало отличающимися от соответствующих значений в вакууме. Следует также упомянуть работу [112], в которой изучались переходы между нейтринными состояниями при учете как эффекта МСВ, так и параметрического резонанса, а также были рассмотрены некоторые астрофизические приложения.

Особого внимания заслуживает случай, когда плотность среды скачком

меняется от одного постоянного значения до другого, поскольку плотность вещества Земли может быть аппроксимирована такой функцией. В недавно опубликованных работах [113, 114] обсуждается именно такой случай. В этих статьях найдено точное аналитическое решение уравнения эволюции системы нейтрино для подобного профиля плотности. Получено, что даже полутора периодов изменения плотности среды достаточно для достижения значительных вероятностей перехода нейтрино из одного состояния в другое. Таким образом, результаты данных исследований оказываются крайне важными при изучении прохождения солнечных и атмосферных нейтрино через вещество Земли. В этой связи следует также отметить работы последнего времени, в которых анализируются новые возможности изучения распределения плотности вещества в Земле методом нейтринной томографии (см. [115–117] и цитируемую там литературу).

На основе предложенного в главе 3 подхода для описания эволюции спина нейтрино в произвольных внешних полях, можно построить эффективный гамильтониан, определяющий эволюцию спина нейтрино в произвольном электромагнитном поле (см. также работы [53, 88, 91, 93]). Используя данный гамильтониан, в разделе 5.1 рассмотрены осцилляции нейтрино $\nu_{i-} \leftrightarrow \nu_{j+}$ в присутствии поля линейно поляризованной электромагнитной волны. Детально проанализировано условие резонансного усиления осцилляций и разработан подход к качественному исследованию решения уравнения эволюции нейтрино вблизи точки резонанса, который может быть использован при рассмотрении нейтринных осцилляций в полях различной конфигурации.

В разделе 5.2 показано, что при осцилляциях нейтрино в переменных электромагнитных полях может возникать явление параметрического резонанса. Для двух типов электромагнитных полей (амплитудно-модулированной электромагнитной волны [раздел 5.2.1] и постоянного во времени поперечного магнитного поля с периодически меняющейся в простран-

стве амплитудой [раздел 5.2.2]) найдены вероятности нейтринных переходов $\nu_i \leftrightarrow \nu_j$ и показано, что амплитуды вероятностей возрастают со временем при определенном подборе параметров внешних электромагнитных полей. Некоторые возможные приложения явления параметрического резонанса обсуждаются в разделе 5.2.3.

Результаты данной главы опубликованы в наших статьях [119–122].

5.1 Осцилляции нейтрино в поле линейно поляризованной электромагнитной волны

В данном разделе рассматриваются нейтринные осцилляции в поле линейно поляризованной электромагнитной волны. Сформулирован метод нахождения и качественного исследования решения вблизи точки резонанса. Этот метод особенно полезен в тех случаях, когда точное решение уравнения Шредингера, описывающее переходы между двумя состояниями нейтрино, невозможно. Предлагаемый подход может быть использован при изучении нейтринных осцилляций в электромагнитных полях различной конфигурации.

Рассмотрим систему из двух нейтрино $\nu = (\nu_{j+}, \nu_{i-})$ соответствующих различным состояниям спиральности. Эволюция ν под действием электромагнитной волны с частотой ω может быть описана с помощью уравнения:

$$i \frac{\partial \nu}{\partial t} = H \nu, \quad (5.1.1)$$

где гамильтониан H представим в виде [53, 88, 91, 93]:

$$H = (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) \left(\frac{\Delta m^2 \Theta}{4E} - \frac{V_{\text{eff}}}{2} \right) - \frac{\mu(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}^{(0)})}{\gamma}, \quad (5.1.2)$$

здесь \mathbf{n} - единичный вектор в направлении скорости нейтрино $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ - матрицы Паули, V_{eff} - разность эффективных потенциалов взаимодействия нейтрино со средой, Θ - функция вакуумного угла смешивания (явный вид Θ для различных типов переходов $\nu_{i-} \leftrightarrow \nu_{j+}$ можно найти,

например, в работах [43, 107, 108]), $\mathbf{B}^{(0)}$ - напряженность магнитного поля в системе покоя нейтрино, $\gamma = (1 - \beta)^{-1/2}$. Используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

Обозначим через \mathbf{e}_3 - единичный вектор параллельный \mathbf{n} и через ϕ - угол между \mathbf{e}_3 и направлением распространения волны. Тогда, используя преобразования Лоренца для электромагнитных полей, получаем, что в системе покоя частицы возникает магнитное поле:

$$\mathbf{B}^{(0)} = \gamma \left[(\cos \phi - \beta) B_1 \mathbf{e}_1 + (1 - \beta \cos \phi) B_2 \mathbf{e}_2 - \frac{\sin \phi}{\gamma} B_1 \mathbf{e}_3 \right], \quad (5.1.3)$$

$\mathbf{e}_{1,2,3}$ - единичные перпендикулярные векторы. Для электромагнитной волны с линейной поляризацией имеем:

$$B_1 = \cos \alpha \cos \psi, \quad B_2 = \sin \alpha \cos \psi, \quad (5.1.4)$$

где $\psi = \omega t(1 - (\beta/\beta_0) \cos \phi)$ - фаза волны, β_0 - скорость волны (которая, вообще говоря может быть меньше единицы $\beta_0 \leq 1$), α - угол, определяющий ориентацию плоскости поляризации волны. Используя (5.1.3) и (5.1.4) и проводя разложение по малому параметру $1/\gamma \ll 1$ мы на основе общего выражения (5.1.2) получаем для гамильтониана:

$$H = -\tilde{\rho} \sigma_3 - \mathfrak{A} \cos \psi (\sigma_1 \cos \alpha - \sigma_2 \sin \alpha), \quad (5.1.5)$$

где $\mathfrak{A} = -\mu B(1 - \beta \cos \phi)$, $\tilde{\rho} = V_{\text{eff}}/2 - (\Delta m^2 \Theta)/4E$.

Для дальнейшего исследования удобно ввести оператор эволюции $V(t)$, который определяет состояние нейтрино $\nu(t)$ в момент времени t по начальному состоянию $\nu(0)$: $\nu(t) = V(t)\nu(0)$. Для $V(t)$ из (5.1.1) и (5.1.5) получаем уравнение:

$$\dot{V}(t) = i[\tilde{\rho} \sigma_3 + \mathfrak{A} \cos \psi (\sigma_1 \cos \alpha - \sigma_2 \sin \alpha)]V(t), \quad (5.1.6)$$

Заметим, что если перейти от оператора $V(t)$ к новому оператору

$$U(t) = \exp\left(-i\sigma_3 \frac{\alpha}{2}\right) V(t) \exp\left(i\sigma_3 \frac{\alpha}{2}\right),$$

то для $U(t)$ получаем уравнение:

$$\dot{U}(t) = i[\tilde{\rho}\sigma_3 + \mathfrak{A}\sigma_1 \cos \psi]U(t). \quad (5.1.7)$$

Следовательно, ориентация плоскости поляризации не оказывает влияния на динамику нейтринных переходов $\nu_{i-} \leftrightarrow \nu_{j+}$.

Пусть в уравнении (5.1.7) выполнено условие:

$$\tilde{\rho} = 0, \quad (5.1.8)$$

что соответствует наличию резонанса в нейтринных осцилляциях. Тогда решение уравнения (5.1.7) имеет вид:

$$U_1(t) = \exp(i\sigma_1 f(t)), \quad (5.1.9)$$

где $f(t) = (\mathfrak{A}/\dot{\psi}) \sin \dot{\psi}t$. Для вероятности нейтринных переходов в этом случае мы получаем:

$$P_{ij}(t) = |\langle \nu_{j+} | V(t) | \nu_{i-} \rangle|^2 = \sin^2 2f(t) = \sin^2 \left(\frac{\mathfrak{A}}{\dot{\psi}} \sin \dot{\psi}t \right), \quad (5.1.10)$$

откуда следует, что вероятность перехода будет достигать единицы при выполнении условия:

$$\left| \frac{\mathfrak{A}}{\dot{\psi}} \right| \geq \frac{\pi}{2}. \quad (5.1.11)$$

Полученное условие (5.1.11) может служить ограничением на характеристики нейтрино (μ , β) и электромагнитной волны (ω , B , ϕ , β_0). В качестве иллюстрации необходимости выполнения условия (5.1.11) для достижения резонанса ($P_{ij}(t) = 1$) приведем графики зависимости $P_{ij}(t)$ для различных значений величины $\xi = \left| \mathfrak{A}/\dot{\psi} \right|$ (Рис. 5.1 соответствует величине $\xi < \pi/2$, а Рис. 5.2 – $\xi \geq \pi/2$). Из этих графиков видно, что вероятность может достигать единицы только при выполнении дополнительного условия (5.1.11). Заметим, что в случае $\xi \geq \pi/2$ недопустимо введение такого основополагающего понятия, как эффективная длина осцилляций, так как отсутствует

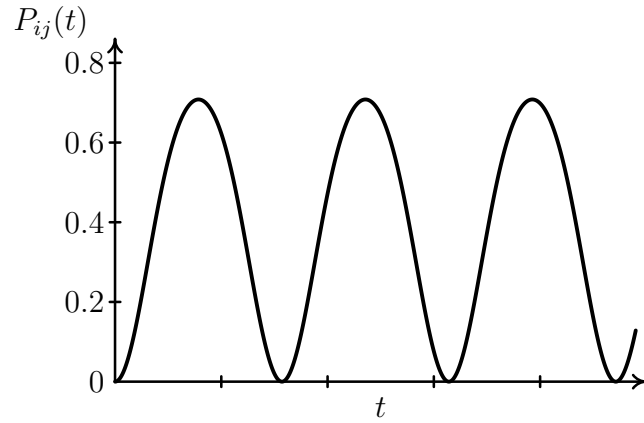


Рис. 5.1: Зависимость вероятности перехода P_{ij} от времени t для случая $|\mathfrak{A}/\dot{\psi}| = 1 < \pi/2$. Нули функции P_{ij} определяются из уравнения $\sin \dot{\psi}t = 0$.

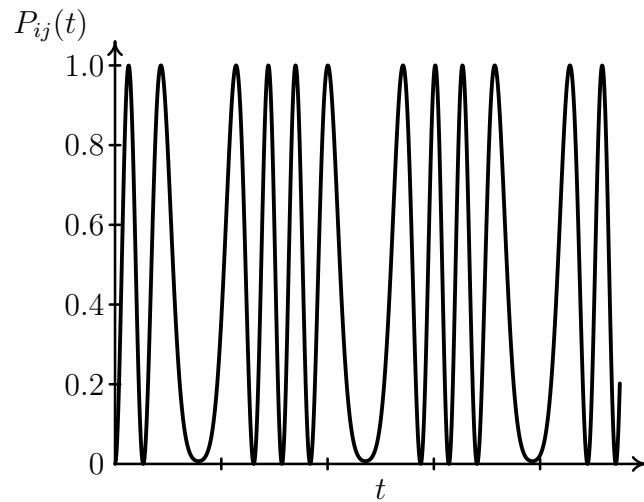


Рис. 5.2: Зависимость вероятности перехода P_{ij} от времени t для случая $|\mathfrak{A}/\dot{\psi}| = 6.2 > \pi/2$. Нули функции P_{ij} определяются из уравнения $6.2 \sin \dot{\psi}t = \pi n$, где $n = 0, 1$.

строгая периодичность в чередовании максимальных и минимальных значений вероятности перехода.

Исследуем теперь более детально условие (5.1.8). Пусть $\tilde{\rho} \gg \mathfrak{A}$, тогда из (5.1.7) получаем уравнение:

$$\dot{U} = i\tilde{\rho}\sigma_3 U, \quad (5.1.12)$$

решение которого в этом пределе может быть представлено в виде:

$$U = \exp(i\sigma_3 \tilde{\rho} t).$$

Вероятность перехода в этом случае равна нулю:

$$P_{ij} = |\langle \nu_{j+} | \exp(i\sigma_3 \tilde{\rho} t) | \nu_{i-} \rangle|^2 = 0.$$

Покажем, что (5.1.8) действительно является условием резонансного усиления осцилляций $\nu_{i-} \leftrightarrow \nu_{j+}$. Рассмотрим случай, когда имеет место малое отклонение от условия (5.1.8). Пусть $\tilde{\rho} = \varepsilon$, где ε - малая величина. Представим уравнение (5.1.7) в виде:

$$\dot{U} = i(\varepsilon\sigma_3 + H_1)U, \quad H_1 = \mathfrak{A}\sigma_1 \cos \psi. \quad (5.1.13)$$

Решение (5.1.13) будем искать в форме:

$$U = U_1 F.$$

Так как U_1 [см. (5.1.9)] удовлетворяет уравнению

$$\dot{U}_1 = iH_1 U_1, \quad (5.1.14)$$

то для матрицы F получаем уравнение

$$\dot{F} = i\varepsilon H_\varepsilon F, \quad H_\varepsilon = \sigma_3 \cos 2f(t) + \sigma_2 \sin 2f(t). \quad (5.1.15)$$

Решение уравнения (5.1.15) ищем в виде ряда

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F^{(k)},$$

где $F^{(0)} = \hat{1}$ - единичная матрица. Для $F^{(k)}$ можно получить рекуррентное соотношение:

$$F^{(k+1)}(t) = i \int_0^t H_\varepsilon(t') F^{(k)}(\tau) dt', \quad (5.1.16)$$

из которого следует выражение для F (с точностью до членов порядка ε^2):

$$F(t) = \hat{1} + i\varepsilon(\sigma_2\gamma(t) + \sigma_3\delta(t)) + \varepsilon^2(-\mathcal{A}(t) + i\sigma_1\mathcal{B}(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= - \int_0^t \sin 2f(t') dt', & \mathcal{A}(t) &= \int_0^t [\delta(t') \cos 2f(t') - \gamma(t') \sin 2f(t')] dt', \\ \delta(t) &= \int_0^t \cos 2f(t') dt', & \mathcal{B}(t) &= \int_0^t [\gamma(t') \cos 2f(t') + \delta(t') \sin 2f(t')] dt'. \end{aligned}$$

Вероятность перехода $\nu_{i-} \leftrightarrow \nu_{j+}$ в этом случае определяется выражением

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \sin^2 f + \\ &\varepsilon^2 [2 \sin f (\mathcal{B} \cos f - \mathcal{A} \sin f) + (\gamma \cos f - \delta \sin f)^2] + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Пусть будет выполнено условие (5.1.11). Рассмотрим значение вероятности в точках максимума: $f(t) = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда соотношение (5.1.17) принимает вид:

$$P_{ij}^{\max} = 1 + \varepsilon^2(\delta^2 - 2\mathcal{A}).$$

Можно показать, что в точках $f(t) = \pi/2 + \pi k$ выполняется строгое неравенство

$$\delta^2 - 2\mathcal{A} = - \left(\int_0^t \sin 2f(t') dt' \right)^2 < 0.$$

Отсюда следует, что $P_{ij}^{\max}(\varepsilon \neq 0) < 1$. Таким образом мы показали, что малое отклонение от условия резонанса (5.1.8) приводит к тому, что вероятность $P_{ij}(t)$ никогда не достигнет единицы. На Рис. 5.3 приведен примерный вид зависимости P_{ij}^{\max} от $\tilde{\rho}$ при выполнении условия (5.1.11).

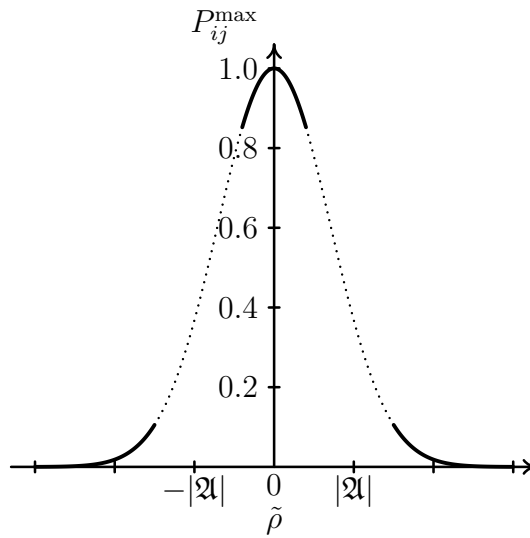


Рис. 5.3: Зависимость максимального значения вероятности перехода от параметра $\tilde{\rho}$ при $|\tilde{\rho}| \ll |\alpha|$ и $|\tilde{\rho}| \gg |\alpha|$.

В заключении данного раздела обсудим более подробно возникновение дополнительного условия (5.1.11). Как известно (см., например, [44, 106]), в случае осцилляций в постоянном поперечном магнитном поле резонансное условие характеризуется одним соотношением [аналог формулы (5.1.8)]. В нашем случае появление условия (5.1.11) обусловлено специфической конфигурацией электромагнитного поля. Действительно, эволюцию спина мы описывали в рамках подхода [53, 88, 91, 93], основанного на использовании уравнения типа Баргманна-Мишеля-Телегди [123]. В этом подходе квантовый оператор эволюции $V(t)$ приобретает смысл матрицы эволюции спин-тензора $S = (\sigma \zeta_\nu)$, где ζ_ν - вектор спина частицы. В присутствии электромагнитного поля спин частицы начинает прецессировать вокруг определенного вектора \mathbf{l} , направление которого задается конфигурацией электромагнитного поля. Резонансное усиление спиновых осцилляций будет наблюдаться в том случае, когда вектор \mathbf{l} направлен практически перпендикулярно к движению нейтрино. Таким образом, полагая $\tilde{\rho} = 0$ мы задаем благоприятную ориентацию вектора \mathbf{l} .

Однако, в линейно поляризованной электромагнитной волне вектор на-

пряженности магнитного поля \mathbf{B} колеблется в плоскости. Тогда, если \mathbf{B} параллелен оси \mathbf{e}_1 , вектор спина ζ_ν вращается в одну сторону, а когда \mathbf{B} становится антипараллельным оси \mathbf{e}_1 , ζ_ν вращается в другую сторону. Следовательно, в данном случае вектор спина будет колебаться вокруг направления, перпендикулярного движению нейтрино. Для возникновения эффективных нейтринных осцилляций необходимо, чтобы амплитуда этих колебаний была больше или равна π . Детальный анализ показывает, что для этого необходимо ввести ограничение на амплитуду магнитного поля, которое совпадает с условием (5.1.11).

5.2 Параметрический резонанс при осцилляциях нейтрино в периодически меняющихся электромагнитных полях

В этом разделе впервые рассмотрена возможность возникновения параметрического резонанса в нейтринных осцилляциях в неоднородном электромагнитном поле [120–122]. Рассмотрение электромагнитного поля обусловлено тем, что с точки зрения экспериментального изучения нейтринных осцилляций создать электромагнитное поле заданной конфигурации неизмеримо проще, чем аналогичный профиль плотности. Рассмотрен случай амплитудно-модулированной электромагнитной волны и магнитного поля типа поля плоского ондулятора, т.е. постоянного во времени поперечного магнитного поля, амплитуда которого изменяется скачком от одного фиксированного значения до другого. Показано, что при определенном выборе параметров, описывающих нейтрино, электромагнитное поле и среду, в случаях амплитудно-модулированной электромагнитной волны и магнитного поля типа поля плоского ондулятора, возникает параметрический резонанс. Получена оценка для возможности возникновения параметрического резонанса в космическом микроволновом излучении. Также предложена

схема возможного эксперимента по изучению нейтринных осцилляций в лабораторных условиях.

5.2.1 Осцилляции нейтрино в поле электромагнитной волны

Сначала рассмотрим параметрический резонанс в поле амплитудно-модулированной электромагнитной волны. В основе нашего обсуждения будет лежать эволюция системы из двух нейтрино $\nu = (\nu_{j+}, \nu_{i-})$, соответствующих различным состояниям спиральности, под действием электромагнитной волны частоты ω с круговой поляризацией. Заметим, что состояния (ν_{j+}, ν_{i-}) могут, в принципе, принадлежать к различным поколениям нейтрино (при $i \neq j$). Мы обозначим посредством \mathbf{e}_3 ось, которая параллельна направлению движения нейтрино, а посредством ϕ - угол между \mathbf{e}_3 и направлением распространения волны. Для описания эволюции данной системы необходимо использовать релятивистски-инвариантный подход, развитый в работах [53, 88, 91, 93].

Динамическое уравнение для описания эволюции ν может быть записано в виде уравнения Шредингера:

$$i \frac{\partial \nu}{\partial t} = H \nu. \quad (5.2.1)$$

Выражение для гамильтониана H выводится аналогично работам [53, 88, 119] на основе разложения по малому параметру $\sqrt{1 - \beta^2} \ll 1$ (β - скорость нейтрино) и имеет вид

$$H = -\tilde{\rho} \sigma_3 - \mathfrak{A}(t)(\sigma_1 \cos \psi - \sigma_2 \sin \psi), \quad (5.2.2)$$

где $\mathfrak{A}(t) = -\mu B(t)(1 - \beta \cos \phi)$, $\tilde{\rho} = V_{\text{eff}}/2 - (\Delta m^2 \Theta)/4E$, E - энергия нейтрино, Δm^2 - разность квадратов масс состояний ν_j и ν_i , $\psi = g\omega t(1 - (\beta/\beta_0) \cos \phi)$ - фаза волны, зависящая от ее скорости β_0 в среде ($\beta_0 \leq 1$), величины $g = \pm 1$ соответствуют двум состояниям поляризации волны, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ - матрицы Паули, $B(t)$ - амплитуда волны, которая в нашем случае зависит от времени, V_{eff} - разность эффективных потенциалов

взаимодействия нейтрино со средой, μ - магнитный момент нейтрино, Θ - функция вакуумного угла смешивания θ_{vac} (явный вид Θ для различных типов переходов $\nu_{i-} \leftrightarrow \nu_{j+}$ можно найти, например, в работах [43, 107, 108]). Используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

Аналитическое решение уравнения (5.2.1) при произвольном виде функции $B(t)$ наталкивается на серьезные математические трудности. Поэтому выясним условия возникновения параметрического резонанса в том случае, когда функция $B(t)$ мало отличается от некоторой постоянной величины B (случай амплитудно-модулированной электромагнитной волны):

$$B(t) = B(1 + hf(t)), \quad (5.2.3)$$

где h - малая ($|h| \ll 1$) постоянная величина, знак которой будет зафиксирован ниже, $f(t)$ - произвольная ограниченная функция времени.

Для дальнейшего исследования удобно ввести оператор эволюции $V(t)$, который определяет состояние нейтрино $\nu(t)$ в момент времени t по начальному состоянию $\nu(0)$: $\nu(t) = V(t)\nu(0)$. Исходя из вида гамильтониана (5.2.2) и зависимости амплитуды поля от времени (5.2.3), для $V(t)$ получаем уравнение:

$$\dot{V}(t) = i[\tilde{\rho}\sigma_3 + (\mathfrak{A} + \varepsilon f(t))(\sigma_1 \cos \psi - \sigma_2 \sin \psi)]V(t), \quad (5.2.4)$$

где $\varepsilon = \mathfrak{A}h$, $\mathfrak{A} = -\mu B(1 - \beta \cos \phi)$. Будем искать решение уравнения (5.2.4) в виде:

$$V(t) = U_{\mathbf{e}_3}(t)U_1(t)F(t), \quad (5.2.5)$$

где $U_{\mathbf{e}_3}(t) = \exp(i\sigma_3\dot{\psi}t/2)$ - оператор вращения вокруг оси \mathbf{e}_3 , а $U_1(t) = \exp(i\sigma_1 t)$ - оператор вращения вокруг оси $\mathbf{l} = (\mathfrak{A}, 0, \tilde{\rho} - \dot{\psi}/2)$. Везде используются базисные векторы $\mathbf{e}_{1,2,3}$, причем \mathbf{e}_3 - единичный вектор в направлении скорости нейтрино. Заметим, что $U_0(t) = U_{\mathbf{e}_3}(t)U_1(t)$ представляет собой решение уравнения (5.2.4) при $\varepsilon = 0$ (см. [53, 88]). Для неизвестного оператора $F(t)$ на основе (5.2.4) получаем уравнение

$$\dot{F}(t) = i\varepsilon H_\varepsilon(t)F(t), \quad (5.2.6)$$

где

$$H_\varepsilon(t) = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{y}(t))f(t), \quad (5.2.7)$$

$$y_1 = 1 - 2n_3^2 \sin^2 \Omega t, \quad y_2 = n_3 \sin 2\Omega t, \quad y_3 = 2n_1 n_3 \sin^2 \Omega t,$$

а $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{l}/\Omega$ - единичный вектор, $\Omega = |\mathbf{l}|$.

Для исследования решений уравнения (5.2.6) применим метод, изложенный в работе [119] (см. также раздел 5.1). Используя малость параметра ε , будем искать решение уравнения (5.2.6) в форме:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F^{(k)}, \quad (5.2.8)$$

где $F^{(0)} = \hat{1}$ - единичная матрица. Для операторов $F^{(k)}$ получаем рекуррентное соотношение:

$$F^{(k+1)}(t) = i \int_0^t H_\varepsilon(t') F^{(k)}(t') dt'. \quad (5.2.9)$$

Опуская вычислительные детали, находим на основании формул (5.2.8) и (5.2.9) выражение для F (с точностью до членов порядка ε):

$$F(t) = \hat{1} + i\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{x}(t)) + O(\varepsilon^2), \quad (5.2.10)$$

где

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \mathbf{y}(t') f(t') dt'. \quad (5.2.11)$$

Заметим, что аналогичный подход при описании осцилляций нейтрино в среде с непрерывно меняющейся плотностью обсуждался в работе [124].

Для вероятности нейтринных переходов $\nu_{i-} \leftrightarrow \nu_{j+}$ исходя из формул (5.2.5)-(5.2.11) мы получаем

$$P(t) = |\langle \nu_{j+} | U_{\mathbf{e}_3}(t) U_1(t) F(t) | \nu_{i-} \rangle|^2 = n_1^2 \sin^2 \Omega t + 2\varepsilon n_1 \sin \Omega t (x_1(t) \cos \Omega t + n_3 x_2(t) \sin \Omega t). \quad (5.2.12)$$

Для проведения дальнейшего исследования конкретизируем явный вид функции $f(t)$. Как отмечалось в работе [113], между процессом осцилляций нейтрино и механическими колебаниями установлены определенные аналогии. Исходя из этого факта, выберем функцию $f(t)$ такой же, как и в аналогичной задаче о параметрическом резонансе в механических колебаниях [125], т.е. $f(t) = \sin 2\Omega t$. Заметим, что величина Ω представляет собой «собственную» частоту двухуровневой колебательной системы. Как мы увидим ниже, параметрический резонанс проявляется именно при таком выборе функции $f(t)$, т.е. когда частота изменения $f(t)$ равна удвоенной «собственной» частоте.

Найдем вероятность нейтринных переходов для данного конкретного выбора $f(t)$. Элементарное вычисление в этом случае дает

$$P(t) = \left[n_1^2 + \varepsilon n_1 n_3^2 t + \frac{\varepsilon n_1}{\Omega} \left(1 - \frac{n_3^2}{2} \right) \sin 2\Omega t \right] \sin^2 \Omega t. \quad (5.2.13)$$

Выберем знак ε так, чтобы $n_1 \varepsilon > 0$ (следовательно, знак h определится из соотношения: $n_1 \mathfrak{A} h > 0$). Тогда из формулы (5.2.13) видно, что среди слагаемых в квадратных скобках появляется член, линейно растущий со временем, который приводит к росту значения вероятности перехода. Этот результат может быть истолкован как проявление параметрического резонанса.

Заметим, что из соотношения (5.2.13) формально следует, что при достаточно больших значениях времени наблюдения t вероятность перехода $P(t)$ может превысить единицу. В связи с этим напомним, что при изучении явления параметрического резонанса в механике аналогом вероятности перехода является амплитуда колебаний. Хорошо известно, что одним из основных критериев применимости соответствующего подхода в механике является рассмотрение сравнительно малых амплитуд колебаний. Следовательно, исходя из физического смысла полученного решения, мы можем утверждать, что, также как и в случае механических колебаний, соотно-

шение (5.2.13) будет заведомо справедливо, если мы ограничимся рассмотрением сравнительно небольших, допустим, порядка 10%, увеличений вероятности перехода.

К сожалению, качественное описание явления параметрического резонанса, предложенное в данной работе, не позволяет изучить точное поведение вероятности перехода вблизи единичного значения. Однако численное моделирование, проведенное в работе [109] для случая параметрического резонанса, возникающего при взаимодействии нейтрино со средой с периодически меняющейся плотностью, показало, что вероятность перехода асимптотически приближается к единице, так что условие $P(t) \leq 1$ всегда выполняется.

Оценим характерное время, за которое нейтрино может перейти из одного типа в другой с вероятностью 10%. Из соотношения (5.2.13) получаем:

$$t \sim \frac{1}{10\epsilon n_1}. \quad (5.2.14)$$

Здесь мы считали, что $n_3^2 \sim 1$. Обоснование такого выбора параметров будет дано ниже.

Для сравнения приведем выражение для вероятности перехода в случае, когда дополнительное возбуждение отсутствует ($h = 0$):

$$P(t)|_{h=0} = \sin^2 2\theta_{\text{eff}} \sin^2 \left(\frac{\pi t}{L_{\text{eff}}} \right), \quad (5.2.15)$$

где $L_{\text{eff}} = \pi/\Omega$ - эффективная длина осцилляций,

$$\sin^2 2\theta_{\text{eff}} = \frac{l_1^2}{l_1^2 + l_3^2} = P_{\text{max}}|_{h=0},$$

максимальная вероятность перехода в отсутствии дополнительного возбуждения. При изучении параметрического резонанса особо интересен случай, когда $P_{\text{max}}|_{h=0} \ll 1$, т.е. когда переходы между двумя состояниями нейтрино практически отсутствуют, что соответствует $n_3^2 \sim 1$. Выбирая конкретный случай:

$$|l_1| = 0.1|l_3|, \quad (5.2.16)$$

получаем, что $P_{\max}|_{h=0} \approx 0.01$, т.е. при любых значениях времени наблюдения вероятность перехода не сможет превысить 10^{-2} . В случае наличия дополнительного возбуждения ($h \neq 0$) присутствие слагаемого, пропорционального t , в выражении для вероятности перехода позволяет достичь значений, превышающих 10^{-2} .

Оценим значения $x_c = t_c$ для случая (5.2.16). Выбирая $|h| = 0.1$, получаем:

$$x_c \sim \frac{10}{|\mu B(1 - \beta \cos \phi)|}. \quad (5.2.17)$$

Заметим, что для выбора параметров, описывающих внешнее электромагнитное поле, среду и нейтрино, соответствующего соотношению (5.2.16), можно пренебречь первым и третьим слагаемыми по сравнению со вторым в формуле (5.2.13). Действительно:

$$\begin{aligned} n_1^2 &\approx 0.01, & |\varepsilon n_1 n_3^2 t_c| &\approx 0.1, \\ \left| \frac{\varepsilon n_1}{\Omega} \left(1 - \frac{n_3^2}{2} \right) \sin 2\Omega t_c \right| &\approx 4 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Таким образом, увеличение вероятности перехода происходит именно за счет параметрического резонанса.

5.2.2 Осцилляции нейтрино в поле плоского ондулятора

Рассмотрим теперь осцилляции нейтрино ν в магнитном поле типа поля плоского ондулятора. Динамическое уравнение для описания эволюции ν идентично уравнению (5.2.1). Выражение для гамильтониана H может быть формально получено из соотношения (5.2.2) заменой: $\mathfrak{A}(t) \rightarrow \mu B(t)$, $\omega = 0$, и имеет следующий вид:

$$H = -\tilde{\rho}\sigma_3 - \mu B(t)\sigma_1. \quad (5.2.18)$$

Как уже отмечалось, амплитуда магнитного поля в случае плоского ондулятора является периодической функцией:

$$B(t) = \begin{cases} B_1, & 0 \leq t < T_1, \\ B_2, & T_1 \leq t < T_1 + T_2, \end{cases} \quad (5.2.19)$$

$$B(t + T) = B(t), \quad T = T_1 + T_2, \quad (5.2.20)$$

где $B_{1,2}$ - постоянные величины. Очевидно, что гамильтониан $H(t)$ также является периодической функцией с тем же периодом T : $H(t + T) = H(t)$. Причем если $t \in [0, T_1)$, то $H(t) = H_1$, а если $t \in [T_1, T)$, то $H(t) = H_2$, где $H_{1,2}$ - постоянные операторы. Обозначим через $U_{1,2}$ операторы эволюции для интервалов $[0, T_1)$ и $[T_1, T)$, соответственно. Исходя из выше сказанного, легко видеть, что

$$U_a = \exp(-iH_a T_a), \quad a = 1, 2. \quad (5.2.21)$$

Тогда оператор эволюции за один период имеет вид:

$$U_T = U_2 U_1. \quad (5.2.22)$$

Введем единичные векторы:

$$\mathbf{n}_a = \frac{1}{\omega_a} (E_a, 0, -\tilde{\rho}) = (\sin 2\theta_a, 0, -\cos 2\theta_a), \quad a = 1, 2, \quad (5.2.23)$$

где $E_a = -\mu B_a$, $\omega_a = \sqrt{\tilde{\rho}^2 + E_a^2}$, θ_a - эффективный угол смешивания, учитывающий влияние среды и магнитного поля. Используя формулы (5.2.19)-(5.2.23), получаем следующий вид оператора эволюции за один период:

$$U_T = Y - i(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{X}) = \exp(-i(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_X) \Phi), \quad (5.2.24)$$

где

$$\begin{aligned} Y &= c_1 c_2 - (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) s_1 s_2, & \mathbf{X} &= s_1 c_2 \mathbf{n}_1 + s_2 c_1 \mathbf{n}_2 - (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) s_1 s_2, \\ \Phi &= \arccos Y = \arcsin X, & \mathbf{n}_X &= \mathbf{X}/X, & X &= |\mathbf{X}|. \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Здесь мы также использовали обозначения:

$$s_a = \sin \phi_a, \quad c_a = \cos \phi_a, \quad \phi_a = \omega_a T_a, \quad a = 1, 2. \quad (5.2.26)$$

Заметим, что $Y^2 + \mathbf{X}^2 = 1$, как следствие унитарности U_T . Запишем вектор \mathbf{X} в компонентах:

$$\mathbf{X} = \left(\frac{s_1 c_2 E_1}{\omega_1} + \frac{s_2 c_1 E_2}{\omega_2}, \tilde{\rho} \frac{s_1 s_2}{\omega_1 \omega_2} (E_2 - E_1), -\tilde{\rho} \left(\frac{s_1 c_2}{\omega_1} + \frac{s_2 c_1}{\omega_2} \right) \right). \quad (5.2.27)$$

Оператор эволюции за n периодов может быть получен возведением U_T в n -ую степень:

$$U_{nT} = \exp(-i(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_X) n \Phi). \quad (5.2.28)$$

Вероятность перехода из состояния ν_{i-} в состояние ν_{j+} за время t определяется явным видом оператора эволюции:

$$P(t) = |\langle \nu_{j+} | U(t) | \nu_{i-} \rangle|^2. \quad (5.2.29)$$

Рассмотрим тот случай, когда $t = nT$. Тогда из общего выражения (5.2.29) с учетом (5.2.24)-(5.2.26) и (5.2.28) для $P(t = nT)$ получаем формулу:

$$P(nT) = \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \sin^2(n\Phi) = \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \sin^2 \left(\Phi \frac{t}{T} \right). \quad (5.2.30)$$

Выражение (5.2.30) очень похоже на формулу для вероятности перехода при осцилляциях в постоянном магнитном поле. Однако имеется важное принципиальное различие: в случае постоянного поля множитель перед синусом не превосходит $\sin^2(2\theta_a)$, который, вообще говоря, является малой величиной. В случае, когда $B_1 \neq B_2$, можно так подобрать соответствующие параметры, что множитель перед синусом обращается в единицу. Это и есть проявление параметрического резонанса. Действительно, положив:

$$X_3^2 = \tilde{\rho}^2 \left(\frac{s_1 c_2}{\omega_1} + \frac{s_2 c_1}{\omega_2} \right)^2 = 0, \quad (5.2.31)$$

мы добьемся того, что в некоторые моменты времени (см. ниже) вероятность перехода может достигать единичного значения.

Рассмотрим ситуацию, когда

$$(\mu B_a)^2 = E_a^2 \ll \tilde{\rho}^2, \quad (5.2.32)$$

т.е. мы изучаем случай, когда магнитное поле является довольно слабым, что представляет определенный интерес для возможного экспериментального исследования осцилляций нейтрино. Тогда с использованием соотношения (5.2.32) получаем, что в этом случае $\tilde{\rho} \neq 0$ и формула (5.2.31) эквивалентна условию

$$\phi_1 + \phi_2 = \pi k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.2.33)$$

Обозначим через Ω среднюю частоту осцилляций:

$$\Omega = \frac{\omega_1 T_1 + \omega_2 T_2}{T}. \quad (5.2.34)$$

Тогда резонансное условие (5.2.33) перейдет в

$$\omega_B = \frac{2\Omega}{k}, \quad (5.2.35)$$

где $\omega_B = 2\pi/T$ - частота изменения амплитуды магнитного поля. Формула (5.2.35) выражает хорошо известное свойство параметрического резонанса: он возникает в случае, когда удвоенная «собственная» частота 2Ω кратна частоте изменения параметра колебательной системы ω_B [125].

Обсудим более подробно выражение для вероятности перехода (5.2.30). При выполнении резонансного условия (5.2.33) квадрат модуля вектора \mathbf{X} запишется в форме

$$\mathbf{X}_{\text{res}}^2 = \frac{1}{\tilde{\rho}^2} (s_1^2 E_1^2 + s_2^2 E_2^2 + 2s_1 E_1 s_2 E_2 (-1)^k). \quad (5.2.36)$$

Аналогично работе [113] можно показать, что

$$\phi_a = \frac{\pi}{2} + \pi k_a, \quad a = 1, 2, \quad (5.2.37)$$

где $k_a \in \mathbb{Z}$, причем выполнено дополнительное условие, следующее из (5.2.33): $k_1 + k_2 \geq 0$. Учитывая (5.2.32) и (5.2.37), получаем из (5.2.36), что

$$|\mathbf{X}|_{\text{res}} = \left| \frac{E_1 - E_2}{\tilde{\rho}} \right| \ll 1. \quad (5.2.38)$$

Из формул (5.2.38) и (5.2.2) следует, что $\Phi_{\text{res}} \approx |\mathbf{X}|_{\text{res}}$. Для вероятности перехода при выполнении резонансного условия (5.2.33) получаем:

$$P(t = nT) = \sin^2 \left(n \frac{(E_1 - E_2)}{\tilde{\rho}} \right) = \sin^2(2n(\theta_1 - \theta_2)). \quad (5.2.39)$$

Здесь мы считали, что $\theta_a \ll 1$, поэтому $\sin 2\theta_a \approx 2\theta_a$. Заметим, что $|\tilde{\rho}| = \pi k/T$, поэтому выражение (5.2.39) можно переписать в виде:

$$P(t = nT) = \sin^2 \left(\frac{(E_1 - E_2)}{\pi k} t \right). \quad (5.2.40)$$

Из формулы (5.2.40) видно, что максимальное усиление осцилляций достигается при $k = 1$. Этот результат также хорошо известен из теории параметрического резонанса в механических колебаниях [125], что еще раз подчеркивает корректность построения соответствующих аналогий.

5.2.3 Возможные применения явления параметрического резонанса при осцилляциях нейтрино

В заключение данного раздела обсудим возможность возникновения параметрического резонанса в некоторых переменных электромагнитных полях. Приведем оценку величины x_c , т.е. характерного расстояния, проходя которое нейтрино может перейти из одного типа в другой с вероятностью 10%, для осцилляций нейтрино в поле космического микроволнового излучения. Предположим, что космическое микроволновое излучение является амплитудно-модулированным, т.е. применение подхода, развитого в первом разделе обоснованно. Как видно из формулы (5.2.17), наиболее реалистические значения x_c получаются для случая, когда нейтрино движется навстречу электромагнитной волне, т.е. когда $\phi = \pi$. Амплитуда B электромагнитной волны в этом случае может достигать величины 10^{-6} Гс [88]. Полагая $\mu \approx 10^{-10} \mu_B$, получаем для характерной длины пути, проходя который нейтрино перейдет из одного типа в другой с вероятностью 10%, значение $x_c \sim 10^{20}$ м, что сравнимо с размером Галактики $R_G \approx 3 \times 10^{20}$ м.

Таким образом, можно сделать вывод, что в этом случае переход нейтрино из одного состояния в другое, обусловленный параметрическим резонансом, становится заметным.

Обсудим теперь возможный эксперимент по изучению нейтринных осцилляций в лабораторных условиях, в котором наблюдалось бы 10% уменьшение первоначального потока нейтрино. Данный эксперимент состоял бы в пропускании потока нейтрино через цепочку соленоидов с противоположно направленным постоянным во времени магнитным полем. Таким образом, в данном случае необходимо использовать результаты второго раздела настоящей главы, где были изучены осцилляции нейтрино в магнитном поле типа поля плоского ондулятора. Рассмотрим переходы между состояниями, принадлежащими к различным поколениям, например, $\nu_{e-} \leftrightarrow \nu_{\mu+}$. В этой ситуации эффектами взаимодействия нейтрино с частицами среды можно пренебречь, т.е. $|\tilde{\rho}| \approx (\Delta m^2 \Theta)/4E$, что является естественным для экспериментального изучения осцилляций нейтрино в земных условиях. Предположим, что $T_1 = T_2 = D$. Тогда из соотношения (5.2.35) следует выражение для D :

$$D = \frac{2\pi k E}{\Delta m^2 \Theta}. \quad (5.2.41)$$

Как уже отмечалось выше, для достижения максимального усиления осцилляций необходимо положить $k = 1$. Считая $\Delta m^2 = 10^{-2} \text{эВ}^2$, $E = 10^4 \text{эВ}$, $\theta_{\text{vac}} = 0$, получаем, что $D \approx 1 \text{ м}$. Полагая далее $B_1 = -B_2 = B$, получаем, что формула (5.2.39) примет вид:

$$P(nT) = \sin^2(4n\theta), \quad (5.2.42)$$

где

$$2\theta = \mu B \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \right)^{-1}.$$

Для значений $\mu = 10^{-10} \mu_{\text{В}}$, $B = 10^7 \text{ Гс}$ получаем, что $2\theta \approx 2.3 \times 10^{-5}$. Отсюда следует выражение для вероятности перехода:

$$P(nT) \approx \sin^2(4.6 \times 10^{-5} n). \quad (5.2.43)$$

Из формулы (5.2.43) видно, что при $n \approx 7000$ вероятность достигнет требуемого значения.

Из приведенных оценок можно заключить, что подобный эксперимент по изучению нейтринных осцилляций в лабораторных условиях на сегодняшний день, по-видимому, практически не осуществим¹. Однако полученный характерный размер предполагаемой экспериментальной установки $L = 2nD \approx 14$ км вселяет надежду на то, что развитие экспериментальной техники позволит в будущем приблизиться к осуществлению подобного эксперимента.

¹Постоянные магнитные поля, используемые в ускорительной технике, на сегодняшний день могут достигать величины порядка 10^5 Гс.

Глава 6

Заключение

Диссертация посвящена изучению электромагнитных свойств нейтрино, разработке подходов к описанию осцилляций нейтрино в различных внешних полях, а также рассмотрению приложений полученных результатов в астрофизике и космологии.

Основные результаты работы, изложенной в диссертации, можно сформулировать следующим образом:

1. С использованием размерной регуляризации вычислены вклады однопетлевых фейнмановских диаграмм в электромагнитную вершинную функцию нейтрино $\Lambda_\mu(q)$ в общей R_ξ -калибровке в минимально расширенной стандартной модели с $SU(2)$ -синглетным правым нейтрино. При вычислении вкладов всех диаграмм точно учитывалась ненулевая масса нейтрино. Изучена структура электромагнитной вершинной функции нейтрино. Исследовано разложение вершинной функции фермиона на формфакторы и подтверждена его справедливость с помощью прямого расчета для случая массивного нейтрино в рамках минимально расширенной стандартной модели, дополненной $SU(2)$ -синглетным правым нейтрино. Показано, что при определенном выборе калибровочных параметров электромагнитная вершинная функция массивного нейтрино становится конечной, т.е. выражения для всех электромагнитных формфакторов не содержат ультрафиолето-

вых расходимостей.

2. Вычислены вклады всех фейнмановских диаграмм в зарядовый формфактор массивного нейтрино, причем значение квадрата импульса внешнего фотона при этом не фиксировалось. Полученные выражения точно учитывают зависимость от массовых параметров заряженного лептона a и нейтрино b . Значения калибровочных параметров W - и Z -бозонов в данных формулах также были произвольными. На основе выражения для зарядового формфактора получены вклады различных фейнмановских диаграмм в электрический заряд массивного нейтрино. С помощью прямых вычислений показано, что электрический заряд нейтрино не зависит от выбора калибровки и равен нулю в нулевом и первом порядках разложения суммы вкладов всех однопетлевых диаграмм по массовому параметру нейтрино b . Кроме того, явным образом продемонстрировано, что в калибровке 'т Хофта-Фейнмана заряд нейтрино равен нулю при произвольной массе нейтрино. Полученный нулевой результат для заряда массивного нейтрино, в частности, подтверждает правильность развиваемой в работе методики расчета фейнмановских диаграмм в случае массивного нейтрино.
3. Получены вклады всех фейнмановских диаграмм в магнитный формфактор массивного нейтрино, причем значение квадрата импульса внешнего фотона при этом не фиксировалось. Данные вклады точно учитывают значения массовых параметров заряженного лептона a и нейтрино b . Значение калибровочного параметра W -бозона в данных формулах также было произвольным. Исследована зависимость магнитного формфактора массивного нейтрино от квадрата импульса внешнего фотона при различных значениях калибровочного параметра. На основе выражения для магнитного формфактора найдены вклады однопетлевых фейнмановских диаграмм в магнитный момент массив-

ного нейтрино. При помощи прямого расчета показано, что сумма вкладов всех диаграмм не зависит от выбора калибровки. Полученные результаты дают возможность исследовать зависимость магнитного момента нейтрино от масс всех частиц. В частности, рассмотрены следующие диапазоны масс: $m_\nu \ll m_\ell \ll M_W$, $m_\ell \ll m_\nu \ll M_W$ и $m_\ell \ll M_W \ll m_\nu$, которые охватывают практически все экспериментально допустимые значения масс нейтрино, заряженного лептона и W -бозона.

4. Вычислены вклады всех однопетлевых фейнмановских диаграмм в анапольный формфактор массивного нейтрино, причем значение квадрата импульса внешнего фотона при этом не фиксировалось. Данные вклады точно учитывают значения массовых параметров заряженного лептона a и нейтрино b . Значения калибровочных параметров W - и Z -бозонов в данных формулах также были произвольными. Получены вклады различных фейнмановских диаграмм в анапольный момент массивного нейтрино на основе выражения для анапольного формфактора при нулевой передаче импульса. Показано, что анапольный момент массивного нейтрино является расходящейся величиной и зависит от выбора калибровки.
5. Изучена эволюция спина нейтрино в произвольных внешних полях. Рассмотрена эволюция спина нейтрино, взаимодействующего с веществом в рамках физической модели, допускающей новые, более общие типы взаимодействия нейтрино. Выведено квазиклассическое уравнение эволюции спина нейтрино напрямую из лагранжиана взаимодействия нейтрино, который включает в себя не только векторное и аксиально-векторное взаимодействия стандартной модели, но также скалярное, псевдоскалярное, тензорное и псевдотензорное взаимодействия.

6. Исследована релаксация спина нейтрино в веществе со стохастическими характеристиками, такими как плотность, скорость и поляризация среды. В качестве приложения рассматриваемого явления изучена релаксация спина нейтрино в веществе ранней Вселенной. Получено космологическое ограничение на массу мюонного нейтрино.
7. Изучены осцилляции нейтрино в электромагнитных полях различной конфигурации. С использованием гамильтониана, определяющего эволюцию спина нейтрино в произвольном электромагнитном поле, рассмотрены осцилляции нейтрино в присутствии поля линейно поляризованной электромагнитной волны. Детально проанализировано условие резонансного усиления осцилляций и разработан подход к качественному исследованию решения уравнения эволюции нейтрино вблизи точки резонанса, который может быть использован при рассмотрении нейтринных осцилляций в полях различной конфигурации.
8. Показано, что при осцилляциях нейтрино в переменных электромагнитных полях может возникать явление параметрического резонанса. Для двух типов электромагнитных полей (амплитудно-модулированной электромагнитной волны и постоянного во времени поперечного магнитного поля с периодически меняющейся в пространстве амплитудой) найдены вероятности нейтринных переходов и показано, что амплитуды вероятностей возрастают со временем при определенном подборе параметров внешних электромагнитных полей. Предложены некоторые возможные приложения явления параметрического резонанса.

Основные результаты, вошедшие в диссертацию, содержатся в публикациях [55, 95, 99, 119–122, 126] и докладывались на следующих конференциях: 1) Les Recontres de Physique de la Vallée d'Aoste, «Results and Perspectives in Particle Physics» (La Thuile, Italy, 2001 и 2002); 2) 9th Lomonosov Conference

on Elementary Particle Physics (Moscow, 1999); 3) 3rd International Workshop on «New Worlds in Astroparticle Physics»(Faro, Portugal, 2000).

Благодарности

В заключение хочу поблагодарить моего научного руководителя — доктора физико-математических наук, профессора Александра Ивановича Студеникина за помощь и поддержку, оказанные мне в течение 6 лет совместной работы.

Хотел бы выразить благодарность Анатолию Викторовичу Борисову, Андрею Евгениевичу Лобанову, Льву Борисовичу Окуню и Константину Викторовичу Спепаньянцу за интерес к работе и полезные дискуссии по теме проведенных исследований.

Глубоко признателен всем сотрудникам кафедры теоретической физики физического факультета МГУ за внимание к работе и доброжелательное отношение.

Приложение А

Правила Фейнмана

В этом приложении представлен полный перечень правил Фейнмана [127], необходимых для вычисления электромагнитной функции нейтрино. В R_ξ -калибровке пропагаторы векторных W - и Z -бозонов, скалярного бозона χ , а также заряженных духовых полей c и \bar{c} , имеют следующую форму

$$D_{\mu\nu}^{(W)}(k) = \frac{1}{k^2 - M_W^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \alpha M_W^2 + i\epsilon} \right],$$
$$D_{\mu\nu}^{(Z)}(k) = \frac{1}{k^2 - M_Z^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \alpha_Z) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \alpha_Z M_Z^2 + i\epsilon} \right],$$
$$D^{(\chi)}(k) = \frac{1}{\alpha M_W^2 - k^2 - i\epsilon},$$
$$D^{(c)}(k) = D^{(\bar{c})}(k) = \frac{1}{\alpha M_W^2 - k^2 - i\epsilon}.$$

Пропагатор фермионов имеет стандартную форму

$$S(k) = \frac{\not{k} + m_n}{m_n^2 - k^2 - i\epsilon},$$

где n обозначает тип фермиона.

Все вершины могут быть подразделены на несколько классов. Ниже перечислены соответствующие диаграммы и правила Фейнмана для каждого из этих классов.

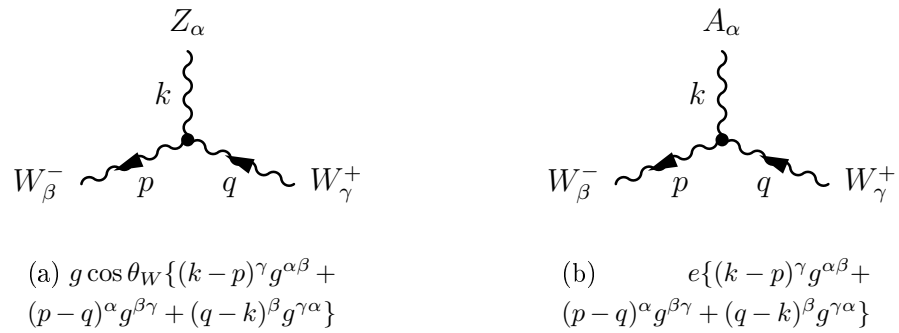


Рис. А.1: (а)-(б) вершины, содержащие три векторных бозона.

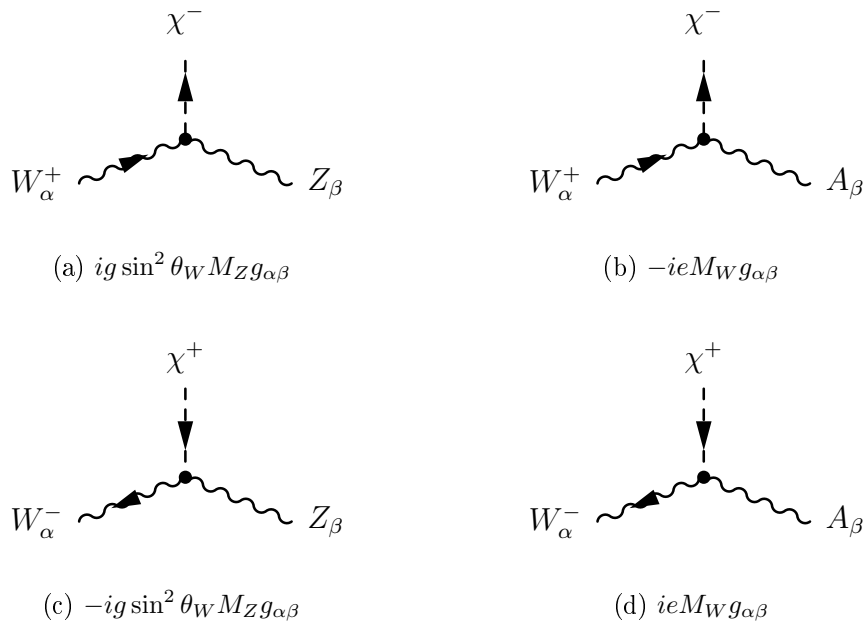
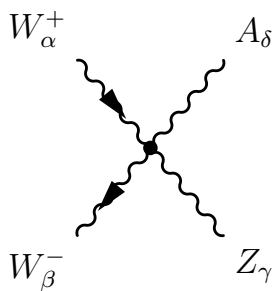
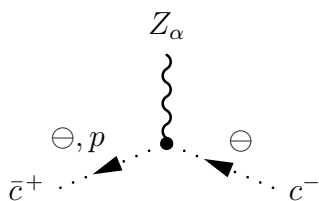


Рис. А.2: (а)-(д) вершины, содержащие два векторных бозона и один скалярный бозон.

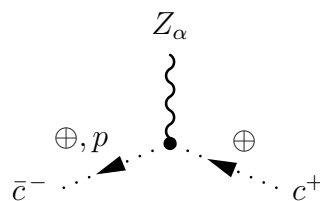


$$(a) \quad eg \cos \theta_W \times \\ \{g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} - \\ 2g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}\}$$

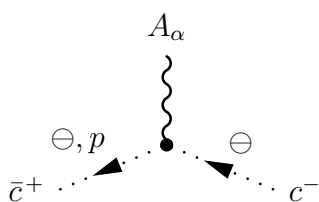
Рис. А.3: (а) вершина, содержащая четыре векторных бозона.



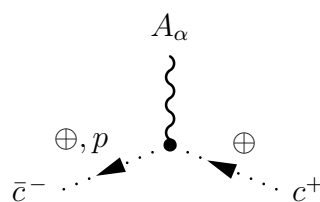
$$(a) \quad -g \cos \theta_W p_\alpha$$



$$(b) \quad g \cos \theta_W p_\alpha$$



$$(c) \quad -ep_\alpha$$



$$(d) \quad ep_\alpha$$

Рис. А.4: (а)-(d) вершины, содержащие один скалярный бозон и два заряженных фермионных поля.

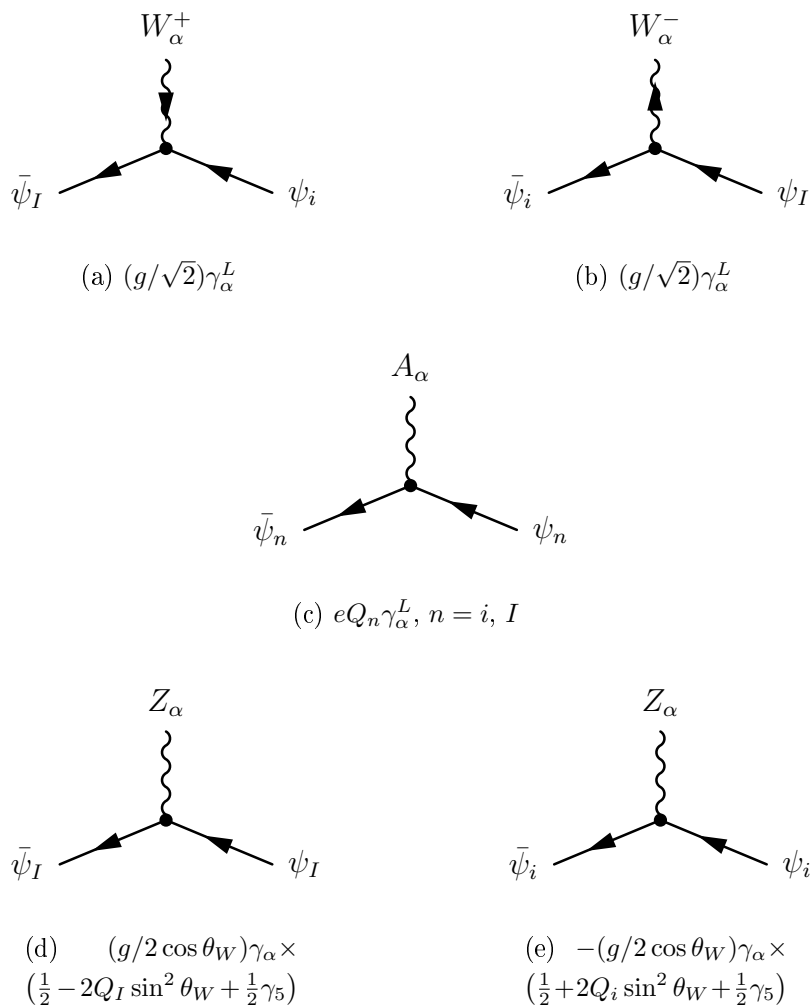


Рис. А.5: (а)-(е) вершины, содержащие один векторный бозон и два фермиона.

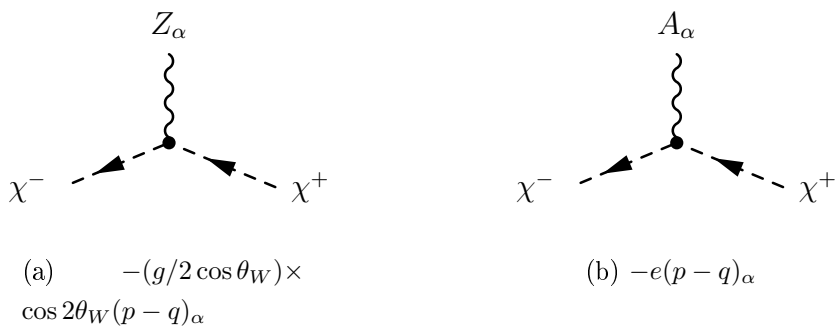
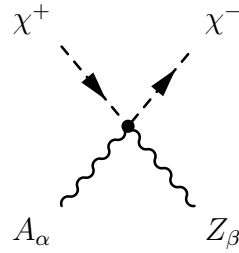
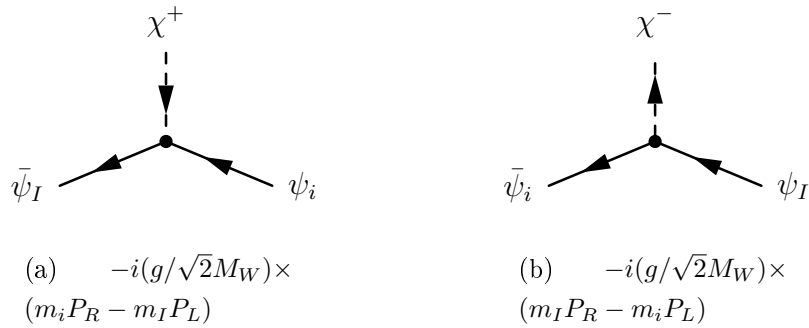


Рис. А.6: (а)-(б) вершины, содержащие один векторный бозон и два скалярных бозона.



(a) $eg g_{\alpha\beta} \times$
 $\cos 2\theta_W / \cos \theta_W$

Рис. А.7: (а) вершина, содержащая два векторных бозона и два скалярных бозона.



(a) $-i(g/\sqrt{2}M_W) \times$
 $(m_i P_R - m_I P_L)$

(b) $-i(g/\sqrt{2}M_W) \times$
 $(m_I P_R - m_i P_L)$

Рис. А.8: (а)-(б) вершины, содержащие один скалярный бозон и два фермиона.

Все импульсы частиц, связанные с вершинами считаются втекающими в вершину; $Q_{i,I}$ - электромагнитные заряды фермионных полей $\psi_{i,I}$ в единицах e ; $\psi_{i,I}$ - три поколения лептонов и кварков, соответствующие обычным «верхним» (все типы нейтрино, а также u , c и t кварки; $I_3 = +1/2$) и «нижним» (все типы лептонов, а также d , s и b кварки; $I_3 = -1/2$) компонентам изодублета, I_3 - третья компонента изоспина. Стрелка на линиях обозначает направление движения определенного квантового числа: заряда для W^\pm , χ^\pm , фермионного числа для ψ и духового числа для ψ , $\bar{\psi}$. Символы \oplus или \ominus у линий заряженных духовых полей указывают на знак заряда, переносимого вдоль линии.

Приложение В

Фейнмановские интегралы

При вычислении фейнмановских интегралов по виртуальным импульсам была использована размерная регуляризация со следующими естественными свойствами алгебры γ -матриц:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = N,$$

где $N = 4 - 2\varepsilon$ - число измерений. Размерная регуляризация фейнмановских интегралов в евклидовом пространстве выполняется следующим образом:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^N} \int d^Nk \equiv \frac{\lambda^{2\varepsilon}}{(2\pi)^N} \int_{\Omega(N)} d\Omega \int_0^\infty k^{N-1} dk,$$

где $\Omega(N) = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ - площадь единичной сферы в N измерениях. Зависимость от произвольного положительного параметра λ , который имеет размерность массы, введена из соображений сохранения общей размерности. Общая техника вычисления разнообразных фейнмановских интегралов в размерной регуляризации описана, например, в книге [82]. Однако, стоит привести некоторые типичные интегралы, с которыми сталкиваются при расчетах электромагнитной вершинной функции:

$$F_L^{(0)} = \frac{i}{\pi^2} \int d^Nk \frac{1}{(k^2 + X)^L} = - \left(\frac{\lambda^2 i^2}{\pi} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(L - 2 + \varepsilon)}{\Gamma(L)} \frac{1}{X^{L-2+\varepsilon}},$$

$$F_1^{(0)} = X \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(-\frac{\pi X}{\lambda^2} \right) - \mathbb{C} + 1 \right], \quad F_2^{(0)} = -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(-\frac{\pi X}{\lambda^2} \right) + \mathbb{C},$$

$$F_3^{(0)} = -\frac{1}{2X}, \quad F_4^{(0)} = -\frac{1}{6X^2}, \quad F_5^{(0)} = -\frac{1}{12X^3},$$

$$F_L^{(1)} = \frac{i}{\pi^2} \int d^N k \frac{k^2}{(k^2 + X)^L} = \left(\frac{\lambda^2 i^2}{\pi} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(L - 3 + \varepsilon)}{\Gamma(L)} \frac{\varepsilon - 2}{X^{L-3+\varepsilon}},$$

$$F_2^{(1)} = 2X \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(-\frac{\pi X}{\lambda^2} \right) - \mathbb{C} + \frac{1}{2} \right], \quad F_3^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(-\frac{\pi X}{\lambda^2} \right) + \mathbb{C} + \frac{1}{2},$$

$$F_4^{(1)} = -\frac{1}{3X}, \quad F_5^{(1)} = -\frac{1}{12X^2},$$

$$F_L^{(2)} = \frac{i}{\pi^2} \int d^N k \frac{(k^2)^2}{(k^2 + X)^L} = - \left(\frac{\lambda^2 i^2}{\pi} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(L - 4 + \varepsilon)}{\Gamma(L)} \frac{(\varepsilon - 2)(\varepsilon - 3)}{X^{L-4+\varepsilon}},$$

$$F_3^{(2)} = 3X \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln \left(-\frac{\pi X}{\lambda^2} \right) - \mathbb{C} + \frac{1}{6} \right], \quad F_4^{(2)} = -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(-\frac{\pi X}{\lambda^2} \right) + \mathbb{C} + \frac{5}{6},$$

$$F_5^{(2)} = -\frac{1}{4X},$$

где $\mathbb{C} \approx 0.5772157$ - постоянная Эйлера.

Литература

- [1] *Понтекорво Б. М.* Мезоний и антимезоний // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 33. — С. 549–551.
- [2] *Wu C. S. et al.* Experimental test of parity conservation in beta decay // *Phys. Rev.* — 1957. — Vol. 105. — Pp. 1413–1414.
- [3] *Landau L. D.* On the conservation laws for weak interactions // *Nucl. Phys.* — 1957. — Vol. 3. — Pp. 127–131.
- [4] *Lee T. D., Yang C. N.* Parity nonconservation and a two component theory of the neutrino // *Phys. Rev.* — 1957. — Vol. 105. — Pp. 1671–1675.
- [5] *Salam A.* On parity conservation and neutrino mass // *Nuovo Cim.* — 1957. — Vol. 5. — Pp. 299–301.
- [6] *Ожунь Л. Б.* Лептоны и кварки. — 2-е изд. — Москва: Наука, 1990. — 345 с.
- [7] *Reines F., Cowan C.* Free anti-neutrino absorption cross-section. 1: Measurement of the free anti-neutrino absorption cross-section by protons // *Phys. Rev.* — 1959. — Vol. 113. — P. 273.
- [8] *Понтекорво Б. М.* Обратные β -процессы и несохранение лептонного заряда // *ЖЭТФ.* — 1958. — Т. 34. — С. 247.
- [9] *Понтекорво Б. М.* Нейтринные опыты и вопрос о сохранении лептонного заряда // *ЖЭТФ.* — 1967. — Т. 53. — С. 1717–1725.

- [10] *Gribov V. N., Pontecorvo B.* Neutrino astronomy and lepton charge // *Phys. Lett. B.* — 1969. — Vol. 28. — P. 493.
- [11] *Bilenky S. M., Pontecorvo B.* Quark-lepton analogy and neutrino oscillations // *Phys. Lett. B.* — 1976. — Vol. 61. — P. 493.
- [12] *Биленький С. М., Понтекорво Б. М.* Аналогия между лептонами и кварками и лептонный заряд // *ЯФ.* — 1976. — Т. 24. — С. 603–608.
- [13] *Bilenky S. M., Pontecorvo B.* Again on neutrino oscillations // *Lett. Nuovo Cim.* — 1976. — Vol. 17. — P. 569.
- [14] *Maki Z., Nakagawa M., Sakata S.* Remarks on the unified model of elementary particles // *Prog. Theor. Phys.* — 1962. — Vol. 28. — P. 870.
- [15] *Bahcall J. N., Davis Jr. R.* The evolution of neutrino astronomy. — 1999. — astro-ph/9911486.
- [16] *Alberico W. M., Bilenky S. M.* Neutrino oscillations, masses and mixing. — 2003. — hep-ph/0306239.
- [17] *Alberico W. M., Bilenky S. M.* Astrophysical neutrinos: 20th century and beyond. — 2000. — hep-ph/0009044.
- [18] *Bahcall J. N.* Neutrino Astrophysics. — Cambridge University Press, 1989.
- [19] *Abdurashitov J. N. et al.* Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal // *Phys. Rev. C.* — 1999. — Vol. 60. — P. 055801.
- [20] *Hampel W. et al.* GALLEX solar neutrino observations: Results for GALLEX IV // *Phys. Lett. B.* — 1999. — Vol. 447. — Pp. 127–133.
- [21] *Ahmad Q. R. et al.* Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 011301. — nucl-ex/0204008.

- [22] *Ahmad Q. R. et al.* Measurement of day and night energy spectra at SNO and constraints on neutrino mixing parameters // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 011302. — nucl-ex/0204009.
- [23] *Bahcall J. N., Pinsonneault M. H., Basu S.* Solar models: Current epoch and time dependences, neutrinos and helioseimological properties // *Astrophys. J.* — 2001. — Vol. 555. — Pp. 990–1012.
- [24] *Fukuda S. et al.* Solar ^8B and hep neutrino measurements from 1258 days of Super-Kamiokande data // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — Pp. 5651–5655.
- [25] *Fukuda Y. et al.* Evidence for oscillations of atmospheric neutrinos // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 81. — Pp. 1562–1567.
- [26] *Fukuda Y. et al.* Measurement of the flux and zenith-angle distribution of upward through-going muons by Super-Kamiokande // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 82. — Pp. 2644–2648.
- [27] *Fukuda Y. et al.* Tau neutrinos favored over sterile neutrinos in atmospheric muon neutrino oscillations // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — Pp. 3999–4003.
- [28] *Ahn M. H. et al.* Indications of neutrino oscillation in a 250-km long-baseline experiment // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 041801. — hep-ex/0212007.
- [29] *Apollonio M. et al.* Limits on neutrino oscillations from the CHOOZ experiment // *Phys. Lett. B.* — 1999. — Vol. 466. — Pp. 415–430.
- [30] *Boehm F. et al.* Results from the Palo Verde neutrino oscillation experiment // *Phys. Rev. D.* — 2000. — Vol. 62. — P. 072002.

- [31] *Eguchi K. et al.* First results from KamLAND: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 021802. — hep-ex/0212021.
- [32] *Lobashev V. M. et al.* Direct search for neutrino mass and anomaly in the tritium beta-spectrum: Status of 'Troitsk Neutrino Mass' experiment // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* — 2001. — Vol. 91. — Pp. 280–286.
- [33] *Klapdor-Kleingrothaus H. V. et al.* Latest results from the Heidelberg-Moscow double-beta-decay experiment // *Eur. Phys. J. A.* — 2001. — Vol. 12. — Pp. 147–154.
- [34] *Aalseth C. E. et al.* The IGEX Ge-76 neutrinoless double-beta decay experiment: Prospects for next generation experiments // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 65. — P. 092007. — hep-ex/0202026.
- [35] *Feruglio F., Strumia A., Vissani F.* Neutrino oscillations and signals in beta and $0\nu 2\beta$ experiments // *Nucl. Phys. B.* — 2002. — Vol. 637. — Pp. 345–377. — hep-ph/0201291.
- [36] *Aalseth C. E. et al.* Comment on 'Evidence for neutrinoless double beta decay' // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2002. — Vol. 17. — Pp. 1475–1478. — hep-ex/0202018.
- [37] *Klapdor-Kleingrothaus H. V. et al.* Search for neutrinoless double beta decay with enriched ^{76}Ge in Gran Sasso 1990-2003 // *Phys. Lett. B.* — 2004. — Vol. 586. — Pp. 198–212. — hep-ph/0404088.
- [38] *Hagiwara K. et al.* Review of particle physics // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 66. — P. 010001.
- [39] *Мухеев С. П., Смирнов А. Ю.* Резонансное усиление осцилляций нейтрино в веществе и спектроскопия солнечных нейтрино // *ЯФ.* — 1985. — Т. 42. — С. 1441–1448.

- [40] *Wolfenstein L.* Neutrino oscillations in matter // *Phys. Rev. D.* — 1978. — Vol. 17. — Pp. 2369–2374.
- [41] *Волошин М. Б., Высоцкий М. И., Окунь Л. Б.* Об электромагнитных свойствах нейтрино и возможных полугодовых вариациях потока нейтрино от Солнца // *ЯФ.* — 1986. — Т. 44. — С. 677–680.
- [42] *Pal P. B.* Particle physics confronts the solar neutrino problem // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 1992. — Vol. 7, no. 22. — Pp. 5387–5459.
- [43] *Лухачев Г. Г., Студеникин А. И.* Осцилляции нейтрино в магнитном поле Солнца, сверхновых и нейтронных звезд // *ЖЭТФ.* — 1995. — Т. 108. — С. 769–782.
- [44] *Akhmedov E.* Resonant amplification of neutrino spin rotation in matter and the solar-neutrino problem // *Phys. Lett. B.* — 1988. — Vol. 213. — Pp. 64–68.
- [45] *Vidal J., Wudka J.* Non-dynamical contributions to left-right transitions in the solar neutrino problem // *Phys. Lett. B.* — 1990. — Vol. 249. — Pp. 473–477.
- [46] *Smirnov A. Y.* The geometrical phase in neutrino spin precession and the solar neutrino problem // *Phys. Lett. B.* — 1991. — Vol. 260. — Pp. 161–164.
- [47] *Akhmedov E. K., Petcov S. T., Smirnov A. Y.* Neutrinos with mixing in twisting magnetic fields // *Phys. Rev. D.* — 1993. — Vol. 48. — Pp. 2167–2181.
- [48] *Akhmedov E. K., Pulido J.* Solar neutrino oscillations and bounds on neutrino magnetic moment and solar magnetic field // *Phys. Lett. B.* — 2003. — Vol. 553. — Pp. 7–17.

- [49] *Couvidat S., Turck-Chieze S., Kosovichev A. G.* New solar seismic models and the neutrino puzzle. — 2002. — astro-ph/0203107.
- [50] *Lee B. W., Shrock R. E.* Natural suppression of symmetry violation in gauge theories: Muon- and electron-lepton-number nonconservation // *Phys. Rev. D.* — 1977. — Vol. 16, no. 5. — Pp. 1444–1473.
- [51] *Fujikawa K., Shrock R. E.* Magnetic moment of a massive neutrino and neutrino-spin rotation // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Vol. 45. — Pp. 963–966.
- [52] *Shrock R. E.* Electromagnetic properties and decays of Dirac and Majorana neutrinos in a general class of gauge theories // *Nucl. Phys. B.* — 1982. — Vol. 206. — Pp. 359–379.
- [53] *Egorov A. M., Lobanov A. E., Studenikin A. I.* Electromagnetic neutrino properties and neutrino oscillations in electromagnetic fields // *New Worlds in Astroparticle Physics* / Ed. by A. M. Mourão, M. Pimento, P. M. Sá. — Singapore: World Scientific, 1999. — P. 153. — hep-ph/9902447.
- [54] Charge and magnetic moment of the neutrino in the background field method and in the linear R_ξ^L gauge / L. G. Cabral-Rosetti, J. Bernabéu, J. Vidal, A. Zepeda // *Eur. Phys. J. C.* — 2000. — Vol. 12. — Pp. 633–642. — hep-ph/9907249.
- [55] *Dvornikov M., Studenikin A.* Electric charge and magnetic moment of a massive neutrino // *Phys. Rev. D.* — 2004. — Vol. 69, no. 7. — P. 073001. — hep-ph/0305206.
- [56] *Волошин М. Б.* О совместности малой массы и большого магнитного момента нейтрино // *ЯФ.* — 1988. — Т. 48. — С. 804–810.

- [57] *Leurer M., Marcus N.* A model for a large neutrino magnetic transition moment and naturally small mass // *Phys. Lett. B.* — 1990. — Vol. 237. — Pp. 81–87.
- [58] *Babu K. S., Mohapatra R. N.* Model for large transition magnetic moment of the electron neutrino // *Phys. Rev. Lett.* — 1989. — Vol. 63. — Pp. 228–231.
- [59] *Babu K. S., Mohapatra R. N.* Large transition magnetic moment of the neutrino from horizontal symmetry // *Phys. Rev. D.* — 1990. — Vol. 42. — Pp. 3778–3793.
- [60] *Chang D., Keung W. Y., Senjanović G.* Neutrino transitional magnetic moment and non-Abelian discrete symmetry // *Phys. Rev. D.* — 1990. — Vol. 42. — Pp. 1599–1603.
- [61] *Lucio Martínez J. L., Rosado A., Zepeda A.* Neutrino charge in the linear R_ξ gauge // *Phys. Rev. D.* — 1984. — Vol. 29, no. 7. — Pp. 1539–1541.
- [62] *Denner A., Weiglein G., Dittmaier S.* Application of the background-field method to the electroweak standard model // *Nucl. Phys. B.* — 1995. — Vol. 440. — Pp. 95–128.
- [63] *Rosado A.* Physical electroweak anapole moment for the neutrino // *Phys. Rev. D.* — 2000. — Vol. 61. — P. 013001.
- [64] *Dubovik V., Kuznetsov V.* The toroid moment of majorana neutrino // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 1998. — Vol. 13. — Pp. 5257–5278. — hep-ph/9606258.
- [65] *Bukina E. N., Dubovik V. M., Kuznetsov V. E.* The third electromagnetic characteristic of neutrino: appearance, estimations, and applications // *ЯФ.* — 1998. — T. 61. — C. 1129–1134.

- [66] *Radescu E.* On the electromagnetic properties of majorana fermions // *Phys. Rev. D.* — 1985. — Vol. 32. — Pp. 1266–1268.
- [67] *Kim J. E.* Neutrino magnetic moment // *Phys. Rev. D.* — 1976. — Vol. 14. — Pp. 3000–3002.
- [68] *Bég M. A. B., Marciano W. J., Ruderman M.* Properties of neutrinos in a class of gauge theories // *Phys. Rev. D.* — 1978. — Vol. 17. — Pp. 1395–1401.
- [69] *Lucio J. L., Rosado A., Zepeda A.* Characteristic size for the neutrino // *Phys. Rev. D.* — 1985. — Vol. 31, no. 5. — Pp. 1091–1096.
- [70] Charge radius of the neutrino / J. Bernabéu, L. G. Cabral-Rosetti, J. Papavassiliou, J. Vidal // *Phys. Rev. D.* — 2000. — Vol. 62. — P. 113012. — hep-ph/0008114.
- [71] Радиационные поправки к массе нейтрино во внешнем электромагнитном поле / А. В. Борисов, В. Ч. Жуковский, А. В. Курилин, А. И. Тернов // *ЯФ.* — 1985. — Т. 41. — С. 743–748.
- [72] *Борисов А. В., Жуковский В. Ч., Тернов А. И.* Электромагнитные свойства массивного дираковского нейтрино во внешнем электромагнитном поле // *Изв. вузов. Физика.* — 1988. — № 3. — С. 64–70.
- [73] *Борисов А. В., Жуковский В. Ч., Тернов А. И.* Электромагнитные свойства массивных нейтрино // *ДАН СССР.* — 1989. — Т. 308. — С. 841–849.
- [74] *Жуковский В. Ч., Шоня Т. Л., Эминов П. А.* Сдвиг энергии и амальный магнитный момент нейтрино в постоянном магнитном поле при конечной температуре и плотности // *ЖЭТФ.* — 1993. — Т. 104. — С. 3269–3279.

- [75] *Тернов А. И.* Электромагнитные свойства массивных нейтрино: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / МГУ им. М.В. Ломоносова. — М., 1988.
- [76] *Тернов И. М., Родионов В. Н., Дорофеев О. Ф.* Влияние сильного электромагнитного поля на бэ́та-распад // *ЭЧАЯ*. — 1989. — № 1. — С. 51–96.
- [77] *Bilenky S. M. et al.* Absolute values of neutrino masses: status and prospects // *Phys. Rep.* — 2003. — Vol. 379. — Pp. 69–148. — hep-ph/0211462.
- [78] *Bardeen W., Gastmans R., Lautrup B.* Static quantities in Weinberg's model of weak and electromagnetic interactions // *Nucl. Phys. B.* — 1972. — Vol. 46. — Pp. 319–331.
- [79] *Marciano W. J., Sirlin A.* Radiative corrections to neutrino-induced neutral-current phenomena in the $SU(2)_L \times U(1)$ theory // *Phys. Rev. D.* — 1980. — Vol. 22. — Pp. 2695–2717.
- [80] *Sakakibara S.* Radiative corrections to the neutral-current interactions in the Weinberg-Salam model // *Phys. Rev. D.* — 1981. — Vol. 24. — Pp. 1149–1168.
- [81] *Fujikawa K., Lee B. W., Sanda A. I.* Generalized renormalizable gauge formulation of spontaneously broken gauge theories // *Phys. Rev. D.* — 1972. — Vol. 6, no. 10. — Pp. 2923–2943.
- [82] *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — 4-е изд. — Москва: Наука, 1984. — 597 с.
- [83] *Weinberg S.* The quantum theory of fields. — Second edition. — Cambridge University Press, 1996. — P. 500.
- [84] *Ицциксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. — Москва: Мир, 1984. — Т. 2. — С. 47–49.

- [85] *Acciarri M. et al.* Search for heavy isosinglet neutrinos in e^+e^- annihilation at $130 < \sqrt{s} < 189$ GeV // *Phys. Lett. B.* — 1999. — Vol. 461. — Pp. 397–404. — hep-ex/9909006.
- [86] Neutrino conversions in a polarized medium / H. Nunokava, V. B. Semikoz, A. Y. Smirnov, J. W. F. Valle // *Nucl. Phys. B.* — 1997. — Vol. 501. — Pp. 17–40. — hep-ph/9701420.
- [87] *Bergmann S., Grossman Y., Nardi E.* Neutrino propagation in matter with general interactions // *Phys. Rev. D.* — 1999. — Vol. 60. — P. 093008. — hep-ph/9903517.
- [88] *Egorov A., Lobanov A., Studenikin A.* Neutrino oscillations in electromagnetic fields // *Phys. Lett. B.* — 2000. — Vol. 491. — Pp. 137–142. — hep-ph/9910476.
- [89] *Lobanov A. E., Studenikin A. I.* Neutrino oscillations in moving and polarized matter under the influence of electromagnetic fields // *Phys. Lett. B.* — 2001. — Vol. 515. — Pp. 94–98. — hep-ph/0106101.
- [90] *Grigoriev A., Lobanov A., Studenikin A.* Effect of matter motion and polarization in neutrino flavour oscillations // *Phys. Lett. B.* — 2002. — Vol. 535. — Pp. 187–192. — hep-ph/0202276.
- [91] *Studenikin A.* Relativistic treatment of neutrino oscillations in moving matter // *Electroweak Interactions and Unified Theories* / Ed. by J. Trân Thanh Vân. — Moriond Particle Physics Meetings. — Vietnam: THE GIOI Publishers, 2002. — Pp. 317–322. — hep-ph/0205200.
- [92] *Lobanov A., Studenikin A.* Spin light of neutrino in matter and electromagnetic fields // *Phys. Lett. B.* — 2003. — Vol. 564. — Pp. 27–34. — hep-ph/0212393.

- [93] *Студеникин А. И.* Нейтрино в электромагнитных полях и движущихся средах // *ЯФ*. — 2004. — Т. 67, № 5. — С. 1014–1024.
- [94] *Loeb A., Stodolsky L.* Relativistic spin relaxation in stochastic electromagnetic fields // *Phys. Rev. D*. — 1989. — Vol. 40, no. 10. — Pp. 3520–3524.
- [95] *Dvornikov M., Studenikin A.* Neutrino spin evolution in presence of general external fields // *J. High Energy Phys.* — 2002. — Vol. 09. — P. 016. — hep-ph/0202113.
- [96] *Тернов И. М.* Уравнение эволюции спина релятивистского электрона в гейзенберговском представлении // *ЖЭТФ*. — 1990. — Т. 98. — С. 1169.
- [97] *Schrödinger E.* Über die kräftefreie bewegung in der relativistischen quantenmechanik // *Sitzungsb. Preuß. Akad. Wiss. Phys. Math.* — 1930. — Vol. 24. — P. 418.
- [98] *Semikoz V.* Neutrino spin kinetics in a medium with magnetic field // *Phys. Rev. D*. — 1993. — Vol. 48. — Pp. 5264–5273.
- [99] Covariant treatment of neutrino spin (flavour) conversion in matter under the influence of electromagnetic fields / M. S. Dvornikov, A. M. Egorov, A. E. Lobanov, A. I. Studenikin // Particle Physics at the Start of the New Millennium / Ed. by A. Studenikin. — Singapore: World Scientific, 1999. — P. 178. — hep-ph/0103015.
- [100] *Лифшиц Е. М., Питаеский Л. П.* Физическая кинетика. — 2-е изд. — Москва: Физ.-мат. лит., 2002. — Т. 10 из *Теоретическая физика*. — С. 256–264.

- [101] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. — 2-е изд. — Москва: Физ.-мат. лит., 2002. — Т. 5 из *Теоретическая физика.* — С. 403–413.
- [102] *Dolgov A. D.* Neutrinos in cosmology // *Phys. Rep.* — 2002. — Vol. 370. — Pp. 333–535. — hep-ph/0202122.
- [103] *Bilenky S. M., Giunti C., Grimus W.* Phenomenology of neutrino oscillations. — 1998. — hep-ph/9812360.
- [104] *Cisneros R.* Effect of magnetic moment on solar neutrino observations // *Astrophys. Space Sci.* — 1971. — Vol. 10. — P. 87.
- [105] *Schechter J., Valle J. W. F.* Majorana neutrinos and magnetic fields // *Phys. Rev. D.* — 1981. — Vol. 24, no. 7. — Pp. 1883–1889. — Erratum— 1982.—Vol. 25—No. 1.
- [106] *Lim C., Marciano W. J.* Resonant spin-flavor precession of solar and supernova neutrinos // *Phys. Rev. D.* — 1988. — Vol. 37. — Pp. 1368–1373.
- [107] *Egorov A., Likhachev G., Studenikin A.* Neutrino spin and flavour conversion and oscillations in magnetic field // Les Recontres de Physique de la Vallée d’Aoste / Ed. by M. Greco. — Vol. 2 of *Frascati Physics Series.* — Italy: INFN Laboratori Nazionale di Frascati, 1995. — Pp. 55–72. — astro-ph/9506013.
- [108] *Likhachev G. G., Studenikin A. I.* Neutrino oscillations in twisting magnetic fields // *Grav. & Cosm.* — 1995. — Vol. 1. — Pp. 22–24.
- [109] *Ермилова В. К., Царев В. А., Чечин В. А.* Параметрическое усиление осцилляций нейтрино в веществе // *Кр. сообщ. по физике.* — 1986. — Т. 5. — С. 26–27.

- [110] *Ермилова В. К., Царев В. А., Чечин В. А.* Усиление осцилляций нейтрино в веществе Земли // *Письма в ЖЭТФ*. — 1986. — Т. 43. — С. 353–355.
- [111] *Ахмедов Е. Х.* Об осцилляциях нейтрино в неоднородной среде // *ЯФ*. — 1988. — Т. 47. — С. 475–478.
- [112] *Krastev P. I., Smirnov A. Y.* Parametric effects in neutrino oscillations // *Phys. Lett. B*. — 1989. — Vol. 226. — Pp. 341–346.
- [113] *Akhmedov E.* Parametric resonance of neutrino oscillations and passage of solar and atmospheric neutrinos through the earth // *Nucl. Phys. B*. — 1999. — Vol. 538. — Pp. 25–51. — hep-ph/9805272.
- [114] *Petcov S.* Diffractive-like (or parametric-resonance-like?) enhancement of the earth (day-night) effect for solar neutrinos crossing the earth core // *Phys. Lett. B*. — 1998. — Vol. 434. — P. 321. — hep-ph/9805262, Erratum— 1998.—Vol. 444—P. 584.
- [115] *Ohlsson T., Snellman H.* Neutrino oscillations with three flavors in matter: Applications to neutrinos traversing the earth // *Phys. Lett. B*. — 2000. — Vol. 474. — Pp. 153–162. — hep-ph/9912295, Erratum— 2000.— Vol. 480—P. 419.
- [116] *Ohlsson T., Winter W.* Reconstruction of the earth’s matter density profile using a single neutrino baseline // *Phys. Lett. B*. — 2001. — Vol. 512. — Pp. 357–364. — hep-ph/0105293.
- [117] *Ioannisian A., Smirnov A.* Matter effects of thin layers: Detecting oil by oscillations of solar neutrinos. — 2002. — hep-ph/0201012.
- [118] *Pusch G. D.* Neutron oscillations in a periodically varying magnetic field // *Nuovo Cim. A*. — 1983. — Vol. 74, no. 2. — Pp. 149–157.

- [119] *Дворников М. С., Студеникин А. И.* Осцилляции нейтрино в поле линейно поляризованной электромагнитной волны // *ЯФ*. — 2001. — Т. 64, № 9. — С. 1705–1708.
- [120] *Dvornikov M., Studenikin A.* Parametric resonance of neutrino oscillations in electromagnetic wave // Proceedings of the 3rd International Workshop on 'New Worlds in Astroparticle Physics' / Ed. by A. M. Mourão, M. Pimento, P. M. Sá, J. M. Velhinho. — Singapore: World Scientific, 2000. — P. 126. — hep-ph/0102099.
- [121] *Dvornikov M. S., Studenikin A. I.* Parametric resonance amplification of neutrino oscillations in electromagnetic wave with varying amplitude and 'castle wall' magnetic field // Les Rencontres de Physique de la Vallée d'Aoste / Ed. by M. Greco. — Vol. 22 of *Frascati Physics Series*. — Italy: INFN Laboratori Nazionale di Frascati, 2001. — P. 93. — hep-ph/0107109.
- [122] *Дворников М. С., Студеникин А. И.* Параметрический резонанс при осцилляциях нейтрино в периодически меняющихся электромагнитных полях // *ЯФ*. — 2004. — Т. 67, № 4. — С. 741–747.
- [123] *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. — 3-е изд. — Москва: Наука, 1989. — Т. 4 из *Теоретическая физика*. — 723 с.
- [124] *Fishbane P. M., Gasirowicz S. G.* Equations for neutrino propagation in matter // *Phys. Rev. D*. — 2001. — Vol. 64. — P. 113017. — hep-ph/0012230.
- [125] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. — 2-е изд. — Москва: Наука, 1965. — Т. 1 из *Теоретическая физика*. — 203 с.
- [126] *Dvornikov M., Studenikin A.* Neutrino spin evolution in general external fields // Les Rencontres de Physique de la Vallée d'Aoste / Ed. by

M. Greco. — Vol. 27 of *Frascati Physics Series*. — Italy: INFN Laboratori Nazionale di Frascati, 2002. — P. 171.

- [127] *Aoki K. et al.* Electroweak theory: Framework of on-shell renormalization and study of higher-order effects // *Progr. Theor. Phys. Suppl.* — 1982. — Vol. 73. — P. 1.