Виноградова, Елизавета Павловна

1. Комбинаторные задачи в системе развивающего обучения четырехлетней начальной школы

1.1. Российская государственная библиотека

Виноградова, Елизавета Павловна

Комбинаторные задачи в системе развивающего обучения четырехлетней начальной школы

М. 2003

Московский государственный открытый
педагогический университет им. М.А. Шолохова

На правах рукописи

Виноградова Елизавета Павловна

Комбинаторные задачи в системе развивающего обучения четырехлетней начальной школы

13.00.02 – теория и методика обучения
и воспитания (математика)

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата педагогических наук

Научный руководитель -
доктор педагогических наук,
профессор Истомина Н.Б.

Москва - 2003

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современное развитие российского общества поставило перед школой задачу воспитания личности, которая могла бы самостоятельно и критически мыслить, сопоставлять и анализировать факты, находить различные варианты решения возникающих проблем, выбирать из них оптимальные, учитывая различные условия и конкретные ситуации.

В связи с этим модернизация общеобразовательной школы на современном этапе ее развития «предполагает ориентацию образования не только на усвоение обучающимися определенной суммы знаний, но и на развитие его личности, его познавательных и созидательных возможностей» [89].

В свете этих тенденций изменяется приоритет математического образования, которое на современном этапе рассматривается как процесс становления личности человека посредством овладения им основами математических знаний.

Одним из направлений модернизации содержания математического образования на современном этапе является включение элементов статистики и теории вероятностей в программу школьного курса математики. В новом проекте концепции образовательной области «Математика» Министерства образования Российской Федерации в разделе «Общая характеристика математического образования» отмечается, «что элементы статистики и теории вероятностей становятся обязательным компонентом школьного образования, усиливающим его прикладное и практическое значение».

При изучении этого материала обогащаются представления учащихся о современной картине мира и методах его исследования.

Возможность включения комбинаторики и теории вероятностей в школьный курс математики была обоснована в ряде диссертационных

исследований семидесятых и восьмидесятых годов прошлого столетия. Рассматривались различные аспекты этой проблемы: совместное изучение элементов комбинаторики и теории вероятностей [53]; выделения в школьном курсе математики сквозной комбинаторико-вероятностной линии [79]; изучение комбинаторики с помощью графов [20,40]; разработка методики обучения решению комбинаторных задач [114]. Названные исследования ориентировались на учеников основной и средней школы, тем не менее, во всех работах отмечалась целесообразность решения комбинаторных задач в начальной и основной школе как основы сознательного использования учащимися средней школы комбинаторных правил и формул.

Новый этап исследований, связанных с включением комбинаторных и вероятностных задач в школьный курс математики относится к девяностым годам двадцатого века.

Он знаменуется усилением развивающей функции математического образования и появлением работ, в которых выявляется роль комбинаторных задач в развитии мышления учащихся [105].

С точки зрения диссертационного исследования особый интерес представляет работа Е. Е. Белокуровой, в которой обоснована роль комбинаторных рассуждений в совершенствовании умственных операций: анализа, синтеза, сравнения, обобщения и абстрагирования; в развитии действенного, образного и словесно-логического компонентов мышления и их взаимосвязи; в формировании таких качеств мышления как вариативность, гибкость и критичность. Результаты анализа современных учебников математики для начальной школы позволяют констатировать, что тенденция включения комбинаторных задач в процесс обучения младших школьников математике активно реализуется в массовой школьной практике [11,67,68,69,70,111,121].

С одной стороны это обусловлено развивающими возможностями

комбинаторных задач, а с другой – преемственностью курса математики начальной и основной школы. Так в некоторые учебники математики 5-го класса включена тема «Перебор возможных вариантов» [103].

Однако задачи комбинаторного характера по-прежнему классифицируются, как задачи повышенной трудности, они не связаны с усвоением основных вопросов курса и не согласованы с логикой построения его содержания. В связи с этим комбинаторные задачи включаются в учебный процесс эпизодически, бессистемно, что в значительной мере снижает их развивающие и дидактические возможности.

Таким образом, **актуальность диссертационного** исследования определяется:

1. Модернизацией содержания математического образования на современном этапе развития школы.

2. Отсутствием исследований, выявляющих возможность использования комбинаторных задач в курсе математики четырехлетней начальной школы.

3. Потребностью школьной практики в разработке системы комбинаторных задач для младших школьников и методики их решения.

4. Необходимостью решения проблемы преемственности между начальной и основной школой.

Проблемой исследования является поиск возможных методических путей включения комбинаторных задач в процесс усвоения младшими школьниками программного содержания курса математики четырехлетней начальной школы.

Объект исследования – процесс обучения младших школьников математике.

Предмет исследования – комбинаторные задачи как средство усвоения младшими школьниками программного содержания развивающего курса математики начальной школы.

Цель исследования – разработать систему комбинаторных задач для младших школьников и обосновать возможность и целесообразность ее включения в процесс усвоения программного содержания развивающего курса математики начальной школы.

Гипотеза исследования.

Если в русле единой методической концепции, направленной на развитие учащихся, разработать систему комбинаторных задач, в процессе решения которых учащиеся усваивают основные вопросы программного содержания, то это позволит повысить качество математических знаний младших школьников и сформировать у них умение решать комбинаторные задачи.

Для достижения поставленных целей и проверки гипотезы необходимо решить ***следующие задачи:***

1.Проанализировать опыт включения комбинаторных задач в школьный курс математики.

2.Разработать систему комбинаторных задач для четырехлетней начальной школы, обеспечивающую усвоение программного содержания.

3.В русле концепции, нацеленной на развитие мышления младших школьников, разработать методику обучения младших школьников решению комбинаторных задач.

Экспериментально проверить ее эффективность.

Методологической основой – исследования явились: принцип единства и диалектического взаимодействия теории и практики в научном познании; основные положения теории деятельности; современные представления о развитии ребенка в процессе обучения; методическая концепция развивающего обучения младших школьников математике [авт. Н.Б. Истомина].

Организация исследования. Исследование проводилось с 1997 по 2003 года и включало в себя несколько этапов.

На первом этапе (1997-1998гг.) анализировалась психолого-педагогическая и методическая литература по проблеме развития мышления младших школьников; исследования, связанные с обучением младших школьников решению комбинаторных задач; действующие программы и учебники для четырехлетней начальной школы; проводился поисковый эксперимент по отбору комбинаторных задач, связанных с программным содержанием начального курса математики.

На втором этапе (1998-2002гг.) велась теоретическая разработка методики обучения младших школьников решению комбинаторных задач; проводился обучающий эксперимент в рамках методической системы развивающего обучения математике младших школьников; сравнительный эксперимент для проверки эффективности предложенной системы комбинаторных задач, включенной в программное содержание начального курса математики.

На третьем этапе (2002-2003гг.) анализировались и обобщались результаты исследования; были сделаны выводы; выполнено литературное оформление диссертации.

Научная новизна и теоретическая значимость проведенного исследования заключается в том что:

1. Впервые комбинаторные задачи рассматриваются как средство усвоения программного содержания развивающего курса математики в начальных классах;

2. Разработана система комбинаторных задач, сориентированная на основные вопросы начального курса математики;

3. Определены этапы обучения младших школьников решению комбинаторных.

Практическая значимость исследования заключается в том, что его материалы могут быть использованы для совершенствования учебников математики для начальных классов; при разработке спецкурсов и

спецсеминаров для студентов педагогических колледжей и педагогических вузов; в системе повышения квалификации педагогов; в практике работы учителей начальных классов.

Достоверность и обоснованность – полученных результатов диссертационного исследования обеспечивается использованием предшествующих результатов методических исследований; выбором взаимодополняющих методов педагогического исследования, соответствующих поставленным задачам; опорой на идеи и методы математической науки; на экспериментальную проверку разработанной системы комбинаторных задач.

Апробация результатов исследования.

Основные положения диссертационного исследования были представлены автором на Всероссийской научно-практической конференции посвященной 90-летию Уфимского учительского института в г. Уфа (1999г.); на Всероссийской конференции «Развитие и саморазвитие ученика и учителя» г. Орск (2001г.); на межрегиональной научно-практической конференции «Форум: Инновации 2002. Актуальные проблемы подготовки кадров для развития экономики Оренбуржья» г.Оренбург (2002г.), на международной научно-практической конференции «Народное образование в XXI веке" г.Москва (2002г.), на заседаниях кафедры методики начального обучения МГПОУ.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Комбинаторные задачи в развивающем курсе начальной математики возможно и целесообразно использовать как средство усвоения программного содержания, не перегружая учащихся дополнительной информацией, связанной с введением в содержание курса новых понятий.

2. Система комбинаторных задач должна быть согласована с логикой построения содержания курса начальной математики и сориентирована на последовательное овладение учащимися доступными способами решения

комбинаторных задач.

3. Включение системы комбинаторных задач в процессе усвоения программного содержания способствует повышению качества математических знаний учащихся и формированию у них умения решать комбинаторные задачи неформальными методами.

ГЛАВА 1 РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ТРАКТОВКЕ ПОНЯТИЯ «ЗАДАЧА»

1.1. Психолого-педагогическая характеристика понятия «задача»

Понятие «задача» широко используется в различных видах человеческой деятельности. Поэтому многозначность данного термина неизбежна. Не случайно до настоящего времени в литературе нет общепринятого определения «задачи».

В психолого-педагогической характеристике понятия «задача» можно выделить несколько направлений:

1. В качестве исходного используется понятие «проблемная ситуация»[145,162];

2. Задача понимается как цель деятельности субъекта, заданная в определенных условиях [15,100];

3. Рассматривается знаковый характер задачи [145,162].

Авторы первого направления подчеркивают, что понятие задачи тесно связано с понятием проблемной ситуации, но это не одно и то же. Проблемная ситуация предшествует задаче и порождает ее, а решение задачи – это достижение цели, что должно привести к снятию проблемной ситуации.

Различая понятия «задача» и «проблемная ситуация» А.М Матюшкин отмечает, что «термин задача» обычно используют для обозначения интеллектуальных заданий, включающих вопрос или цель действия, условия выполнения действий и некоторые требования к выполняемым действиям (т.е. с помощью задачи обозначают лишь некоторые объективно задаваемые характеристики действия). Субъект не важен для определения задачи, так как задача по своей структуре представляет объективно заданное и сформулированное в словесной или знаковой форме отношение между определенными условиями, характеризуемыми как «известное» и тем, что требуется найти («искомое»). В большинстве случаев решение задачи – это

процесс преобразования некоторой начальной ситуации в некоторую конечную.

Проблемная ситуация не составляет специфический вид взаимодействия субъекта и объекта. Она характеризует, прежде всего, психологическое состояние субъекта (учащегося), возникающее в процессе взаимодействия.

В психологическую структуру проблемной ситуации входят три компонента:

1. Неизвестное достигаемое знание или способ действия.

2. Познавательная потребность, побуждающая человека к деятельности.

3. Интеллектуальные возможности человека, включающие его творческие способности и прошлый опыт.

Задача же определяется как объективно заданное отношение между известным и искомым. Заинтересованность же решающего, его стремление решить задачу порождается проблемной ситуацией, поэтому введение в состав процесса решения задач проблемной ситуации психологически важно.

Психологи установили, что ядром проблемной ситуации должно быть какое-то значимое для человека рассогласование, противоречие. Противоречие – несоответствие между имеющимися уже знаниями и новыми требованиями. Противоречие между уже известными и еще не известным, которое требуется открыть, психологи выделяют в качестве наиболее общего противоречия.

Следует отметить, что при одинаковых условиях для одних учащихся возникает проблемная ситуация, а для других – нет. Это зависит от уровня знаний человека, его умственного развития и от разрыва между известным и неизвестным.

При полном отсутствии знаний в определенной области проблемная ситуация не возникает. Диапазон разрыва между известным и неизвестным

зависит от интеллектуальных возможностей решающего: чем эти возможности ниже, тем меньше должны быть «порции» неизвестного, и, наоборот, чем больше интеллектуальные возможности человека, тем больше может быть число неизвестных элементов.

Степень трудности задания должна быть такой, чтобы с помощью наличных знаний и способов действия решающий не мог его выполнить, однако этих знаний должно быть достаточно для самостоятельного анализа содержания и условий выполнения задания. Только такое задание способствует созданию проблемной ситуации.

В результате анализа проблемной ситуации возникает проблема, что означает: решающему ее удалось хотя бы предварительно и приблизительно выделить известное и неизвестное (искомое).

В работах некоторых психологов часто понятия «задача» и «проблемная ситуация» отождествляются.

Так А.Ф. Эсаулов приводит следующее определение «Задача – это более или менее определенные системы информационных процессов, несогласованное или даже противоречивое соотношение, между которыми вызывает потребность в их преобразовании. Речь идет о потребности или стремлении того, кто решает задачу» [185 с.17].

Как видим, А.Ф. Эсаулов, наряду с объективными характеристиками задачи (наличие систем информационных процессов, несогласованное соотношение между ними), вводит в определение субъективный фактор (потребность, стремление решающего). Если потребность в разрешении противоречия отсутствует, задача исчезает.

Роль субъекта отражена и в определении Д. Пойа: «Задача предполагает необходимость сознательного поиска соответствующего средства для достижения ясно видимой, но непосредственно недоступной цели. Решение задачи означает нахождение этого средства» [127 с.143].

«Задача может быть сложной или простой; в первом случае найти ее

решение трудно, во втором – легко. Кстати, трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи».

Найти решение задачи (по Д. Пойа) – «это значит установить связь между заранее дифференцированными объектами или идеями (объектами, которые нам требуется отыскать, данными и неизвестными, предпосылкой и заключением)» [129 с.184].

Отметим, что если у А.Ф. Эсаулова определение задачи больше подходит к понятию проблемной ситуации, то Д. Пойа выделяет существенный признак задачи – наличие «ясно видимой, но непосредственно недоступной» цели.

Основываясь на таком признаке задачи, как цель, Г.А. Балл приводит различные трактовки категории задачи:

1. Категория цели действия субъекта, требование поставленное перед субъектом.

2. Категория ситуации, включающей наряду с целью условия, в которых она должна быть достигнута.

3. Категория словесной (знаковой) формулировки этой ситуации.

Г.А. Балл рассматривает задачу как некоторую ситуацию, в которой оказывается и должен действовать субъект, при этом:

– во–первых, задача является ситуацией, требующей от субъекта некоторого действия;

– во–вторых, задача сама является ситуацией, направленной на нахождение неизвестного посредством его существующей связи с известным;

– в-третьих, задача является ситуацией, в которой от субъекта требуется отыскать действие, направленное на установление связи неизвестного с известным в условиях, когда субъект не владеет способом этого действия.

Различные точки зрения существуют и по отношению к структуре

задачи.

По мнению И.П. Калошиной, обязательными компонентами задачи являются:

1. Цель – характеристики конечной ситуации;

2. Известные данные для достижения цели – характеристики начальной ситуации;

3. Неизвестный способ перехода от начальной ситуации к конечной [84].

Л.М. Фридманом предложена другая характеристика структуры задачи [164].

В состав задачи входят:

1. Предметная область, совокупность всех объектов, которые явно или неявно рассматриваются в задаче.

Предметы могут быть постоянными (например, числа, действия и т.п.) и переменными; они могут принимать множество значений (x, y и т.п.). Предметы могут быть также известными (данными) и неизвестными. Известные предметы всегда постоянны, неизвестные предметы всегда переменны. Неизвестные предметы могут быть:

а) главными (искомыми);

б) вспомогательными (то есть их надо искать для нахождения главных неизвестных, а не самих по себе). Следует отметить, что этого разделения неизвестных в требовании задачи (в явном виде) нет.

Предметы задачи могут быть и неопределенными – их вообще не нужно искать (а иногда и нельзя найти), но они нужны для задания в задаче отношений между данными (известными) и искомыми.

2. Отношения и связи, которыми связаны объекты предметной области (они могут быть известными и неизвестными (переменными)).

3. Требование, или вопрос задачи.

Требование задачи может состоять не только в нахождении искомой

характеристики того или иного объекта предметной области, но и в нахождении искомого отношения между объектами, в построении какого–либо объекта, в доказательстве справедливости того или иного утверждения и т.д.

Структуру задачи с точки зрения знакового подхода, Л.М.Фридман рассматривает как систему высказываний и высказывательных форм. Согласно данному аспекту, высказывания и высказательные формы, имеющиеся в задаче, являются *элементарными условиями* задачи. Кроме них, задача содержит требование или вопрос. Л.М.Фридман отмечает, что, как правило, текст (формулировка) задачи дается в свернутом виде. И очень важно развертывать его в систему взаимосвязанных высказываний и требований – *высказывательную модель* задачи [164].

Согласно точке зрения Ю.М. Колягина, задача включает следующие компоненты:

1. Начальное состояние (условие задачи – данные элементы, свойства, связи).
2. Конечное состояние (цель – неизвестные элементы и связи между ними).
3. Решение задачи (способ преобразования условия задачи для нахождения неизвестного).
4. Базис решения задачи (обоснование решения).

В соответствии с выделенной структурой задачи, Ю.М. Колягин предлагает деление задач на четыре типа:

1. Тренировочные (обучающие – неизвестен третий компонент).
2. Поисковые (третий и четвертый компоненты).
3. Проблемные (определена только цель).
4. Задачи, решаемые учеными–исследователями (неизвестны четыре компонента).

По целям мыслительной деятельности задачи можно подразделить на

задачи распознавания, конструирования, объяснения, доказательства.

В кибернетике при организации работы счетно–решающих устройств, в какой–то мере моделирующих операционную структуру решения задач человеком, выделяют три основных вида задач:

1. Задачи, в которых учтены все условия, влияющие на результат, и ответ функционально связан с исходными данными, определен ими однозначно.

2. Задачи, на результат решения которых возможно влияние случайных факторов, не учтенных в условиях, в силу чего результат решения получается неоднозначным, он формируется для некоторого числа аналогичных случаев в соответствии с вероятно–статистической оценкой возможных значений результатов.

3. Задачи игрового типа, в которых контролируемая часть условий косвенно направляется противником–соревнователем.

Задачи этого вида являются предметом специальной научной области – теории игр. Ее достижения в последние годы широко используются, так как любую научную задачу можно рассматривать как «игру с природой».

В данной классификации отмечена степень определенности результата задачи. В первом случае результат однозначен, полностью определен условиями, во втором – результат можно предугадать частично, приблизительно. В третьем случае заранее определить результат невозможно, так как большое влияние на его получение будет оказывать соперник в игре.

В книге «Поисковые задачи по математике» выделены такие типы задач, как поисковые и стандартные. «Мы считаем нестандартной (поисковой) задачей ту задачу, при предъявлении которой учащиеся не знают заранее ни способа ее решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение»[91 с.24]. Иными словами, учащиеся в ходе решения таких задач должны провести поиск плана решения задачи, установить, какой теоретический материал дает ключ к тому или иному решению».

«В отличие от поисковых, мы считаем задачу стандартной, если ее решение требует от учащихся применить тот или иной известный им алгоритм или воспользоваться тем выводом по аналогии, который в практике обучения называется решением по образцу.» [91 с.27]

Задачи первого типа некоторые авторы называют творческими. «В процессе их решения от учащегося требуется много усилий по изысканию путей подхода к выявлению и преобразованию компонентного состава этих задач. Все эти усилия проявляются в сложных формах самостоятельной деятельности учащихся, которая порой более или менее близко граничит с настоящей изобретательской деятельностью» [91 с.5].

Автор замечает, что в отличие от подлинного изобретения новизна учебной задачи носит субъективный характер, так как в результате ее решения образуется продукт (способ, теоретические знания), принципиально новый для учащегося.

И.И. Ильясов различает задачи по характеру искомого, так как в связи с ним строится особое содержание решения.

«Всякая задача есть требование либо нахождение каких–либо знаний о явлениях действительности (объектах и процессах) и их характеристиках, которые они имеют в определенных заданных в задаче условиях, либо на получение какого–то искомого практического результата (построить что–то, обеспечить выполнение каких–то условий и тому подобное)» [65 с.37].

Знания об объектах и процессах в природе, обществе и духовном мире человека, получаемые в результате решения задачи могут быть естественными и искусственными. Получение знаний о естественных объектах - это научное познание, а получение знаний об искусственных объектах и процессах, о путях создания и использования есть конструктивно–техническая познавательная деятельность.

Соответственно задачи могут быть на получение, как научного знания, так и конструктивно–технического. Получение научного знания является

открытием, а получение конструктивно–технического знания - изобретением.

В более широком смысле, познавательная деятельность движется от познания явлений к вскрытию сущности и их объяснению, а на этой основе – к изобретению и практике.

Задачи на познание явлений состоят в выявлении свойств единичных объектов и процессов, в их обобщении в классы, в построении классификаций. Примером являются описания свойств различных веществ в химии; растений и животных в биологии; психологии и в других науках.

Задачи на познание сущности состоят в поиске объяснений явлений через характеристику их структуры, функций, связей с другими объектами и выведение свойств явлений из их сущности, предсказание новых явлений и фактов, в том числе и таких, которые возможны, но в природе и обществе не существуют и поэтому изобретаются как искусственные объекты и процессы.

Как отмечает автор, в профессиональной и учебной деятельности решаются задачи всех казанных типов: сбор эмпирических данных о явлениях, поиск их объединений, выведение характеристик явлений из объяснений, изобретение новых машин, способов деятельности на производстве, в управлении, обучении, лечении и так далее.

Но при обучении многим предметам преобладают задачи на выведение характеристик явлений из объяснений (задачи на нахождение искомого объекта, построение, доказательство, опознание и другие) [65 с.41].

Г.А. Балл дал характеристику различных типов задач, используемых в обучении: учебные, критериальные, дидактические задачи, т.е. задачи управления чтением. В основном их решает учитель (вообще, любой обучающий) [15 с.28].

Важную роль понятия дидактической задачи отмечает В.И. Загвязинский. «Основным противоречием учебного процесса, – пишет он, – является постоянно преодолеваемое в совместной работе ученика и учителя и возобновляющееся несоответствие между воплощенным в деятельности

ученика достигнутым уровнем знаний, умений , навыков, развития, отношения к учению (этот уровень отражается исходной стороной дидактической задачи) и требуемым, находящимся в ближайшей перспективе, закономерно вырастающим из достигнутого (он отражается перспективной стороной дидактической задачи)». Впрочем, если говорить не об отдельной дидактической задаче, а о системе таких задач, то их решение должно быть направлено на достижение в конкретных условиях учебного процесса не только цели, «находящейся в ближайшей перспективе», но и некоторой иерархической системы целей. На ее относительно более низких ступенях находятся цели, которые могут быть описаны достаточно четко и предусматривают формирование у обучаемых определенных средств решения критериальных задач, в том числе знаний, стратегий, императивных моделей способов действий и пр. Цели обучения, находящиеся на верхних ступенях иерархии (они предусматривают развитие способностей обучаемых, достижение воспитательных эффектов и т.п.), с гораздо большим трудом поддаются операциональному описанию, но, конечно, обязательно должны приниматься во внимание при постановке и решении дидактических задач.

Приняв точку зрения Г.А. Балла, мы рассматриваем задачу как некоторую ситуацию, в которой оказывается и должен действовать субъект.

В этом случае возможны различные трактовки категории «задача»:

а) как цели действия субъекта, требований, поставленных перед ним;

б) как ситуации, включающей наряду с целью условия, в которых она должна быть достигнута;

в) как словесная (знаковая) формулировка этой ситуации [15 с.39].

1.2. Понятие «задача» в начальном курсе математики

Понятие «задача» в начальном курсе математики имеет свою специфику. Традиционно сложилось так, что, говоря о решении задач в

начальных классах, имеют в виду решение арифметических (вычислительных, сюжетных) задач. В методической литературе эти понятия часто заменяются понятием «текстовая задача». Хотя очень трудно согласиться с тем, что эти понятия равнозначны. Например, логические задачи будут являться текстовыми, но не вычислительными.

Приведем пример.

1. Три товарища, Аркаша, Дима и Вова пошли в лес за грибами, каждый со своей сестрой. Девочек звали Галя, Лена и Оля. Назови имя сестры каждого мальчика, если известно, что ни один из мальчиков не помогал своей сестре и что Дима несколько грибов положил Гале в корзинку, а Аркаша в корзину Гале и Оле.

2. В одном классе учились три друга: Коля, Петя и Толя. Фамилии их были: Белов, Чернов и Рыжиков. Назови фамилию каждого из мальчиков, если известно, что:

а) ни один из них не носил фамилию соответствующую его цвету волос;

б) Петя был черноволосым, у Толи волосы были рыжими, а Коля был блондином.

3. В одном подъезде жили три подружки: Вера, Ася и Света. Узнай, кто из девочек выше, если известно, что Вера выше Аси, а Света ниже Веры, но на уроке физкультуры Света стоит перед Асей.

В то же время задача может быть текстовой, но не логической. Например:

1. Буратино должен открыть волшебную дверцу. Для этого ему нужно набрать код: трехзначное число из цифр 5,6,7,8. И еще условие: код–число больше 800. Какие числа должен проверить Буратино?

2. В столовой на обед было приготовлено два первых блюда - суп и щи; три вторых – голубцы, плов и блины; четыре третьих – чай, сок и молоко. Составь все возможные наборы блюд для обеда.

3. В магазине продают сказки народов мира: русские, немецкие, узбекские и арабские. В праздничные упаковки работники магазина решили упаковать по две разные книги. Сколько различных наборов им удалось составить?

Мы полагаем, что к текстовым задачам можно отнести и комбинаторные, и задачи на построение и измерение, так как «текстовая задача представляет собой словесную модель ситуации, явления, события, процесса» [64 с.42].

Основная особенность текстовых задач состоит в том, что в них не указывается прямо, какое именно действие (или действия) должно быть выполнено для получения ответа на требование задачи:

Понятие текстовой задачи настолько многопланово, что построить их классификацию в виде некого единого дерева вряд ли возможно. Поэтому проблема классификации видов текстовых задач сводится в основном к выделению тех параметров, на основании которых их объединяют в различные группы. В числе таких параметров можно назвать:

а) количество действий, которые необходимо выполнить для решения задачи: простые и составные, (арифметические, вычислительные задачи).

б) соответствие числа данных и искомых (определенные задачи – это задачи, в которой условий столько, сколько необходимо и достаточно для получения ответа; задачи с альтернативным условием – это задачи, в ходе решения которых необходимо рассматривать несколько вариантов, а ответ находится после того, как условия будут исследованы; переопределенные задачи – имеющие условия, которые не используются при их решении выбранным способом; недоопределенные задачи – недостаток данных в которых не позволит ответить на вопрос задачи).

в) фабула задачи (задачи на «движение», «на работу», «на проценты», задачи на построение, измерение, комбинаторные задачи, логические задачи и т.д.).

Таким образом, имеет право на существование не одна какая–либо классификация, а много разных классификаций текстовых задач по различным основаниям.

Неотъемлемой частью решения любой текстовой задачи является построение ее модели, исследование которой служит средством для получения ответа на требование задачи.

Под моделью понимают мысленно представленную или материально реализованную систему, которая, выражая и воспроизводя объект исследования, способна замещать его при определенных условиях так, что изучение ее дает новую информацию об этом объекте. Модель в самом широком смысле – это любой мысленный или знаковый образ моделируемого объекта (оригинала). В качестве модели могут выступать изображения, описания, схемы, чертежи, графики, компьютерные программы, копии оригинала (увеличенные или уменьшенные). При этом модель является лишь отображением оригинала, поэтому любая модель не только должна быть удобна для изучения свойств исследуемого объекта, но и должна позволить перенести полученные знания на исходный объект. Поэтому при построении важно охватить только те свойства оригинала, которые существенны в данной ситуации и являются объектом изучения.

В качестве методов решения текстовых задач обычно называют: арифметический, алгебраический, геометрический, логический, практический. В основе каждого метода лежат различные виды моделей.

Решить задачу арифметическим методом - это значит найти ответ на требование задачи, выполнив арифметические действия над числами. При этом одну и ту же задачу можно решить различными арифметическими способами. В этом случае решения будут отличаться либо связями между данными и искомыми, либо последовательностью использования этих связей.

Решение задачи геометрическим методом требует использования построений или свойств геометрических фигур.

Логический метод предполагает ответ на требование задачи с помощью логических рассуждений.

Решение текстовой задачи практическим методом требует выполнения практических действий с предметами или их копиями (моделями).

В рамках данной классификации решение комбинаторных задач в начальных классах связано с практическим методом, который реализуется через моделирование ситуации, описанной в задаче, с помощью реальных объектов (прием драматизации), предметных или графических моделей (выполнение рисунка), с помощью таблиц и графов («дерево» возможных вариантов). Большинство комбинаторных задач в начальных классах можно назвать сюжетными. Решение сюжетных задач, как отмечает Л.М. Фридман «представляет собой очень сложный процесс» [162 с.54].

Этот процесс можно рассматривать с разных точек зрения: с математической – какие математические операции следует произвести, чтобы получить ответ на требование задачи; с логической – какие рассуждения надо провести; с психологической – какие мыслительные операции выполняет решающий задачу; с педагогической – какие методические приемы формируют у учащихся умения решать задачу.

Результаты анализа методической литературы и современной школьной практики по проблеме обучения младших школьников решению текстовых сюжетных задач позволяют констатировать, что:

1. Большая часть текстовых задач в начальном курсе математики являются вычислительными (арифметическими).

2. Основным приемом обучения младших школьников решению этих задач остается показ образца способов решения задач определенных видов.

3. Работа над усвоением структуры задачи носит формальный характер, так как детям предлагаются однообразные текстовые конструкции, в которых они выделяют условие и вопрос, известные и неизвестные, ориентируясь на внешние признаки.

4. Излишнее внимание уделяется процедуре оформления решения задач (по действиям, по действиям с пояснениями и др.) в ущерб обсуждению различных способов их решения.

5. На уроках наблюдается тенденция к решению как можно большего количества задач, сокращающая время работы по осознанию учащимися методов и приемов их решения.

6. Перечень методических средств и приемов, способствующих формированию умения решать задачи, весьма ограничен (аналитико-синтетический разбор, краткая запись, таблицы).

Мы полностью согласны с мнением методистов (Н.Б.Истомина, С.Е.Царева, В.В.Малыхина, Н.А.Муртазина), которые считают, что приоритетной линией в обучении младших школьников решению текстовых задач, должно стать:

– совершенствование методов обучения решению задач;

– активное использование различных моделей в процессе решения задач;

– включение в процесс обучения начальной математики различных видов текстовых задач, в частности комбинаторных.

1.3. Виды комбинаторных задач и способы их решения

Комбинаторика занимается составлением из элементов данных множеств различных комбинаций с заданными свойствами и подсчетом их числа.

Тематика современной комбинаторики, как указывают математики Айгнер М.Р., Виленкин Н.Я., Антипов И.Н., разнообразна: перечислительные и экстремальные задачи, проблемы существования, выбора и расположения, геометрические и алгебраические интерпретации. Комбинаторные методы

используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний, для составления планов производства и реализации продукции. Установлены связи между комбинаторикой и задачами линейного программирования, статистики и т.д. Комбинаторика используется для составления и декодирования шифров и для решения других проблем информации.

Как указывает М. Айгнер «значительную роль комбинаторные методы играют и в чисто математических вопросах – теории групп и их представлений, изучении оснований геометрии, неоассоциативных алгебр и т. д.».

За последние годы комбинаторика развилась в самостоятельную ветвь дискретной математики, возможности которой в приложении к вычислительным машинам и естественным наукам только начинают осознаваться.

С точки зрения теории множеств комбинаторика изучает подмножества конечных множеств, их объединения и пересечения, а также различные способы упорядочивания этих подмножеств.

В математической литературе [6,7,36,50,82,101,166,168,176] отмечаются три отличительные черты комбинаторных задач, которые заключаются в следующем:

1. Все объекты, описываемые в задачах, состоят из отдельных дискретных элементов;

2. Множества этих элементов конечны.

3. Преимущество отдано двум видам операций: отбор подмножеств и упорядочению элементов множества.

Комбинаторные задачи с точки зрения теории множеств – это задачи на определение числа возможных конечных множеств или кортежей с определенными свойствами, которые можно составить из данных элементов; или числа – соответствия, которые можно установить между элементами

конечных множеств [37].

По характеру получаемых соединений комбинаторные задачи очень разнообразны. Это связано и с допустимым разнообразием элементов множеств, и с возможностью вводить определенные ограничения на образуемые объекты, с использованием различных способов упорядочения. Задачи могут включать в себя вопросы существования комбинаторных конфигураций, алгоритмы их построения, оптимитизацию таких алгоритмов, а также вопросы определения числа всех возможных конфигураций [ ].

Способы решения комбинаторных задач, обычно делят на две группы: «формальные» и «неформальные». При «формальном» пути решения нужно определить характер выборки, выбрать соответствующую формулу или комбинаторный принцип подставить числа и вычислить результат. Результат – это количество возможных вариантов, сами же варианты в этом случае не образовываются.

Основные комбинаторные правила: сложения, умножения.

Правило сложения

Пусть A и B - конечные множества , числа элементов которых равны n(A) и n(B) соответственно.

Число элементов пустого множества равно нулю. Всякое конечное множество, состоящее из т элементов , будем называть т -множеством.

Трудно не согласиться с тем, что число элементов в объединении множеств A и B равно сумме чисел элементов в A и B без числа общих для A и B элементов, то есть $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Это правило позволит получить формулу подсчета числа элементов в объединении множеств A, B ,C .

$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)$.

Применяя метод математической индукции, можно подсчитать число элементов в объединении любого конечного набора объединяемых множеств.

Эти формулы выражают правила сложения.

Для иллюстрации применения правила сложения решим следующий пример.

Пример 1. На экскурсии были учащиеся 7-х и 8-х классов. Каждый из них был либо со значком, либо в галстуке. Мальчиков было 16, учащихся со значками 24. Девочек в галстуках было столько же, сколько мальчиков со значками. Сколько учащихся было на экскурсии?

Решение. Обозначим множества: М —учащихся мальчиков, D - учащихся девочек, 3 — учащихся со значками, Г — учащихся в галстуках.

Множество учащихся, присутствующих на экскурсии, можно записать так: 3 U M U (D ∩ Г) или 3 + M + DГ. Число учащихся .на экскурсии:

n(3 + M + DГ) = n(3) + n(M) + n(ГД) - n(3M) - n(3ГD) - n(MГD) + n(3MTD) = n(3) + n(M) = 24 +16 = 40.

Пример 2. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11- физический, 10- не посещают ни одного кружка. Сколько учащихся посещают математический и физический кружки ; сколько - один математический?

Решение . Обозначим множества:

М -учащихся, посещающих математический кружок;

Ф- физический кружок;

Н -не посещающих ни один кружок.

Множество учеников класса можно выразить объединением MUФUH и n(MUФUH) =35.

n(MUФUH) = n(M) + n(Ф) 4- n(H) – n(M∩Ф) =

= 20+11+10- n(M∩Ф) , n(M∩Ф)=41-35=6.

Только математический кружок посещают 14 учащихся, а математический и физический - шестеро.

Правило сложения можно переформулировать в виде:

Если объект α можно выбрать n_{α} способами, а другой объект β - n_{β} способами , то выбор хотя бы одного из этих объектов можно реализовать n_{α}

$+ n_\beta$ числом способов при условии несовместимости способов выбора.

Правило умножения.

Правило умножения позволяет подсчитать число элементов в декартовом произведении конечного набора конечных множеств. Пусть A, B , C - конечные множества.

Декартовым произведением AxB называется множество упорядоченных пар (a, b) для всех a Є A и b Є B.

$AxB=\{(a,b): \forall a \in A, \forall b \in B\}$

Аналогично $AxBxC=\{(a,b,c): \forall a \in A, \forall b \in B, \forall c \in C\}$.

Пусть A=[0,1] и B =[2,4] - отрезки, тогда A x B- прямоугольник [0,1;2,4] с вершинами в точках (0,2) , (0,4) , (1,2), (1,4).

Очевидно, что $A \times B \neq B \times A$.

Правило умножения: $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A\} * n(B)$.

$n(AxBxC)=n(BxAxC)=n(CxAxB)=...=$

$=n(A)*n(B)*n(C)$.

Правилу умножения можно дать другую трактовку:

"если объект α можно выбрать n_α способами и независимо от этого выбора выбор объекта β провести n_β способами, то выбор всевозможных упорядоченных пар (α,β) или (β,α) можно реализовать $n_\alpha * n_\beta$ числом способов".

Аналогично можно сформулировать правило подсчета числа всевозможных упорядоченных троек (α,β,γ), или (β,γ,α) или (α,γ,β) и т.д.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

Пример 1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0,2,4,5,7?

Решение. Каждое трехзначное число можно представить как упорядоченную тройку цифр, составленную таким образом, что первая цифра (объект α) выбирается из множества {2,4,5,7}, а вторая и третья (объекты β,γ) выбираются из множества {0,2,4,5,7} . Очевидно, что

трехзначных чисел, составляемых по описанному правилу, будет столько же, сколько элементов в декартовом произведении

{2,4,5,7} x {0,2,4,5,7} x {0,2,4,5,7} ,т.е. 4*5*5=100.

Пример 2. Сколько различных "шифров" можно составить из 33 различных "букв" и 10 различных "цифр", если каждый "шифр" составлен по схеме «цифры, буквы» , «буквы, цифры» и содержит упорядоченную тройку "букв" и упорядоченную пару "цифр"?

Решение. 1) будем считать, что "шифры" состоят из различных "букв" и различных "цифр" по схеме «буквы, цифры». По правилу умножения всех возможных упорядоченных троек букв будет 33*32*31. Всех возможных упорядоченных пар цифр будет 9*10. Применяя третий раз правило умножения, получим, что число всех возможных различных «шифров» будет равно

33 * 32*31*9*10 =2946240 .

2) будем считать, что буквы и цифры "шифра", составленного по схеме «буквы, цифры», могут быть повторены.

В этом случае число « шифров» равно $33^3 * 10^2$.

3) если считать, что "шифр" составляется по правилу «цифры, буквы» (19 ABC), то число вариантов будет то же, что и в пункте 1.

4) если считать различными "шифры", составленные по схемам «цифры,буквы» или «буквы.цифры» (ABC19) и (19ABC) , то следует применить правило сложениями число "шифров" удваивается. "Шифров" с повторением букв и цифр будет 33^2*10^2*2 . Если буквы и цифры не повторяются, "шифров" будет 2*33*32*31*9*10 .

Соединения (комбинации, выборки) с повторением элементов множества A.

Будем составлять комбинации S из элементов конечного множества A. Для удобства множество A будем записывать в виде $\{a_1 , a_2 ,..., a_n\}$, не считая эту запись "введением порядка". Обозначим k_i, число повторений

элемента $a_i \in A$ в комбинации S . Набор (k_1 , k_2 , ..., kn) из чисел $k_i > 0$ назовем составом комбинации S , а число $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$ -объемом S. Объем выборки S может значительно превышать n , при одном объеме выборки могут иметь разные составы.

Элементы выборки S можно выписать в определенной конечной последовательности. Порядком в выборке S назовем взаимно однозначное соответствие между множеством чисел 1, 2, ..., k и выборкой S объема k,

Выборку, в которой введен порядок , будем называть упорядоченной.

Определение. Размещениями с повторениями из n по k назовем упорядоченные выборки с повторениями объема k .

Число таких комбинаций обозначим $\overline{A^k_n}$ и определим его по правилу умножения. Для включения в комбинацию каждого элемента имеется n возможностей, таким образом, $\overline{A^k_n} = n$.

Определение 2. Всякая упорядоченная комбинация состава (k_1, k_2,..., k_n) называется перестановкой с повторениями из $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$ элементов.

Перестановка данного состава является размещением, имеющим этот состав.

Число таких комбинаций обозначим $P(k_1, k_2, ..., k_n)$. Будем считать, что имеется $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$ карточек с изображением элементов множества , среди которых на k, карточках изображен элемент $a_i \in A$, $i = \overline{1,n}$. Эти k карточек можно упорядочить $k! = (k_1 + k_2 + ... + k_n)!$ способами. Ясно, что, поменяв местами карточки с изображением элемента a_i получим одну и ту же перестановку данного состава. В силу этого число комбинаций с различными расположениями в них элементов a_i, $i = \overline{1,n}$ уменьшится в $k_1! * k_2! \dots k_n!$ раз.

Из правила умножения следует:

$$P(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1! * k_2! * \dots * k_n!}$$

Пример 1. Сколько различных пятизначных чисел можно получить из числа 11152 , переставляя местами его цифры.

Решение. Считая, что цифры 1,2,5 записаны на карточках, среди которых три карточки с записью единицы и по одной карточке с записью двойки и пятерки, получаем число всевозможных перестановок карточек равным 5!= 120. Однако из числа 15121 переменой мест карточек с записью 1 нельзя получить нового пятизначного числа. Перемену мест карточек с записью 1 можно осуществить 3! способами. Поэтому число различных пятизначных чисел будет в шесть раз меньше по сравнению с числом всех перестановок карточек.

Пример 2. Сколько различных семизначных чисел можно получить из числа 1115552.

Решение. Имеем семь карточек, которые можно расположить в ряд 7!= 720 * 7 = 5040 способами. Среди этих комбинаций 3!*3! комбинаций будут одинаковыми. Таким образом, число различных семизначных чисел будет равно $\frac{7!}{3!*3!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7}{(1*2*3)^2}$

Определение 3. Сочетаниями с повторениями из n по k называются неупорядоченные комбинации с. повторениями объема k .

Число таких комбинаций обозначим $\overline{C}^k_n$.

Каждая из них однозначно определяется составом $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, который можно записать в виде перестановки $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k_1},0,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k_2},0,\ldots,0,\underbrace{1,1,\ldots 1}_{k_n})$, содержащей k единиц n—1 нолей.

Две различные такого сорта комбинации, имея один объем k, отличаются лишь составами

$(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, k_n^{(1)})$ и $(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, k_n^{(2)})$, при этом

$k_1^{(1)} + k_2^{(1)} + \ldots + k_n^{(1)}) = k_1^{(2)} + k_2^{(2)} + k_n^{(2)}$

Следовательно , $\overline{C}^k_n = P(k, n-1)$, но $P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)}$

Окончательно получаем $C^k_n = \dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)}$

Соединения (комбинации, выборки) без повторений элементов множества А.

Рассмотрим выборку S , составленную из элементов конечного множества А без повторения в ней элементов этого множества. Состав выборки $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, в котором ki принимает значения 0 или 1. Объем выборки $k=k_1+k_2+\dots+k_n$. Объем таких выборок не может превышать n.

Комбинацию (выборку) можно упорядочить, задав какое-либо взаимно однозначное отображение этой комбинации на числовое множество 1,2,...,k:.

Это отображение будем называть порядком в выборке S .

Определение 1. Упорядоченные выборки без повторений объема k называются размещениями без повторений из n по k.

Количество размещений обозначим $\overline{A^k_n}$ и подсчитаем это число, используя правило умножения. Очевидно, что $\overline{A^k_n} = n(n-1)(n-1)\dots(n-(k-1)) =$

$$n(n-1)\dots(n-(k+1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Действительно, на последнем шаге k число способов выбора будет равно n -(k-1)=n –k+1.

Пример. Сколькими способами можно упорядочить множество, содержащее k элементов?

Решение. Один способ введения порядка во множестве будет отличаться от другого лишь тем, что элементы этого множества будут выписаны в различных вариантах следования друг за другом. Каждый способ, таким образом, представляет собой упорядоченную комбинацию, содержащую k одних и тех же элементов , или размещение из k элементов по k. Ясно , что число порядков в k- множестве равно $A^k_k=k!$

Такие размещения назовем перестановками из k элементов.

Определение 2. Перестановками из k элементов без повторений

будем называть размещения без повторений из k элементов по k .

Общее число перестановок обозначим P_k и вычислим

$P_k=A^k_k=k*(k-1)*\ldots 2*1=k!$

Определение 3. Сочетаниями без повторений из n по k называются неупорядоченные комбинации без повторений, составленные из элементов множества A, имеющие одинаковый объем k.

Число сочетаний обозначим C^n_k.

Очевидно, что сочетания из n по k образуют подмножества A из k его элементов.

Размещения из n по k образуют упорядоченные подмножества из k элементов. Задать размещение можно, задав сочетание и порядок в нем. В каждом сочетании можно ввести k! порядков. По правилу умножения получаем $A^n_k= C^n_k*k!$ (сочетание, порядок), поэтому $C^n_k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

Очевидно, что $C^{n-k}_k=\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}=C^n_{n+k-1}$.

Пример 1 . Сколько подмножеств имеет множество из n элементов?

Решение . Каждое подмножество из k элементов есть сочетание из n по k . Число всех подмножеств равно $C_n^0+ C_n^1+\ldots +C_n^k+\ldots +C_n^n$

Используя формулу бинома Ньютона $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-1}$, положив в ней a = b = 1 , k=0 получим

$2^n = C_n^0+ C_n^1+\ldots +C_n^k+\ldots +C_n^n$.

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9 , не повторяя их?

Решение. Рассмотрим какую-либо из данных комбинаций. Например, число 1357 . Это число является упорядоченной комбинацией объема 4, составленной из элементов множества {1,3,5,7,9} без повторений его элементов. Число четырехзначных чисел совпадает с числом A^4_5 и равно 5*4*3*2=120.

Примером решения комбинаторных задач формальным способом могут служить следующие задачи:

Задача .1. Сколько словарей надо иметь, чтобы можно было выполнять переводы непосредственно с любого из пяти языков на любой из этих пяти ?

Решение. Число словарей совпадает с числом упорядоченных подмножеств, содержащих два элемента из пяти. Для такого перевода надо иметь A^2_5 =20 словарей.

Задача 2. На первой прямой взяты три точки, а на параллельной ей прямой четыре точки. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки ?

Решение. Треугольник однозначно определяется тремя точками-вершинами, не принадлежащими одной прямой. Если взять в качестве вершины треугольника одну из трех точек на первой прямой, то , чтобы получить треугольник , на второй прямой надо выбрать две точки из четырех имеющихся. Если одну точку- вершину из четырех выбираем на второй прямой, то две точки из трех надо выбрать на первой прямой. Применяя правила умножения и сложения, найдем 30 треугольников.

Задача 3. Сколько диагоналей имеет *n* - угольник ?

Решение. Всякий *n*— угольник имеет *n* вершин и *n* сторон. Диагонали и стороны определяются двумя вершинами.

Следовательно, число диагоналей и сторон в сумме равно C^2_n.

Теперь ясно, что число диагоналей равно $C^2_n - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Задача 4. Сколько различных четырехзначных чисел имеется в пятиричной системе счисления?

Решение. Четырехзначное число не может начинаться с нуля. Следовательно, первое место в числе может занять одна из четырех цифр. Выбор каждой из остальных трех цифр числа можно осуществить пятью способами. Используя правило умножения , получим $4*5^3$ =500 чисел.

Задача 5. Сколькими способами можно переставить буквы слова

"логарифм" так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными?

Решение. В слове пять согласных и три гласные. Повторяющихся букв нет. Согласные буквы можно разместить на указанных местах A^3_5 числом способов. Остальные пять букв можно переставить местами 5! числом способов. Число требуемых комбинаций по правилу умножения равно $A^3_5*5!$.

Задача 6. Сколько различных четырехзначных чисел можно написать, используя только по разу цифры 1,2,3,4,5,6,7,8, так, чтобы в каждом из них была единица ?

Решение. Так как в записи четырехзначных чисел должна присутствовать единица, то для записи каждого из требуемых чисел надо еще осуществить выбор трех цифр из оставшихся семи. Этот выбор можно реализовать C^3_7 числом способов. Добавляя к каждой такой комбинации цифру 1, получим наборы из различных четырех цифр. Упорядочивая каждый из этих наборов 4! числом способов, получим требуемые числа.

Количество этих чисел равно $C^3_7* 4!$.

Задача 7. $n(n>1)$ человек садятся за круглый стол. Сколькими способами они могут занять места?

Решение . Выделим место одного человека , $n—1$ оставшихся могут разместиться на n — 1 месте за столом (n—1)! числом способов. Перемещением выбранного человека по оставшимся $(n—1)$ местам нельзя получить нового расположения n человек относительно друг друга за круглым столом.

Задача 8. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом ?

Решение. Мужчину и женщину по двум находящимся рядом местам можно разместить двумя способами. Всех мужчин по n местам можно разместить $n!$ способами, всех женщин $n!$ способами. По правилу умножения

число способов посадить за круглый стол мужчин и женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом, равно $2 \cdot n! * n!$.

«Неформальный» способ решения на первый план выводит сам процесс составления различных комбинаторных конфигураций. И главная его задача быстро и правильно найти все возможные варианты.

К неформальным способам решения комбинаторных задач относят непосредственный перебор. Это самый элементарный способ, т.к. он не требует знания определений и формул. Поэтому именно его целесообразно использовать в начальных классах.

Способ перебора применяется для решения задач с древнейших времен. В современной жизни он используется как в практической деятельности, так и для решения серьезных проблем в математике и информатики в связи с появлением электронно–вычислительных машин, производящих перебор с большим числом элементов в короткое время.

Помимо термина «перебор» в литературе можно встретить и другие: «метод проб и ошибок», «метод проб», «прием целенаправленных проб», «способ подбора и догадки».

Более удачным по смыслу названием будет «способ перебора», т.е. способ, при котором нужно перебрать, пересмотреть все возможные варианты и показать, что других быть не может. При этом важно, как организован процесс перебора, так как, если действовать случайным, хаотичным образом, то нельзя быть уверенным, что найдены все возможные комбинации. Чтобы избежать этого, нужно выполнять перебор в определенной системе.

Для этого используют комбинаторные таблицы, графы, «дерево решений».

Для осуществления полного перебора, чтобы не упустить ни одну комбинацию можно использоваться комбинаторными таблицами: матрицей и числовой таблицей.

Матрицей называется прямоугольная таблица элементов. Горизонтальные ряды называются строками, вертикальные ряды – столбцами. Элементами матрицы могут быть любые объекты: число, буквы и т.д.

Числовой таблицей называется таблица с числовыми характеристиками множеств (они часто подсказывают наилучший практический путь решения, какого–нибудь вопроса).

Комбинаторные таблицы удобно использовать при составлении различных конфигураций (и размещений, и перестановок, и сочетаний).

В комнате несколько человек, знающих хотя бы один из трех языков.

Шестеро знают английский язык, шестеро – немецкий, семеро – французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский. Двое – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек в комнате? Сколько из них знает только английский язык?. Перепишем более компактно условия задачи.

а	н	ф	ан	нф	фа	а
6	6	7	4	3	2	1

Пусть из комнаты ушел человек, знающий три языка, тогда никто из оставшихся не знает более двух языков.

а	н	ф	нн	нф	аа	анф
5	5	6	3	2	1	0

Пусть теперь из комнаты ушли три человека, знающие одновременно английский и немецкий языки; число людей, знающих другие пары языков не изменилось (так как никто в комнате не знает трех языков):

а	н	ф	ан	нф	фа	анф
2	2	6	0	2	1	0

После того как уйдут двое, знающие немецкий и французский, и один, знающий французский и английский, задача примет такой вид:

а	н	ф	ан	нф	фа	анф
1	0	3	0	0	0	0

В комнате осталось четыре человека: один – знающий английский, и трое знающие только французский. Из комнаты вышло семь человек, значит, всего их было одиннадцать. И из них только английский знает один.

В математике считается, что граф выражает отношения между множествами и элементами множеств.

«Граф» – от греческого «графо» – «пишу».

По определению Н.Я. Виленкина, граф – это «множество, состоящее из конечного числа точек, некоторые пары которых соединены дугами (такие графы называются неориентированными; если вместо дуг используются стрелки, то получится ориентированный граф, или, орграф)» [35].

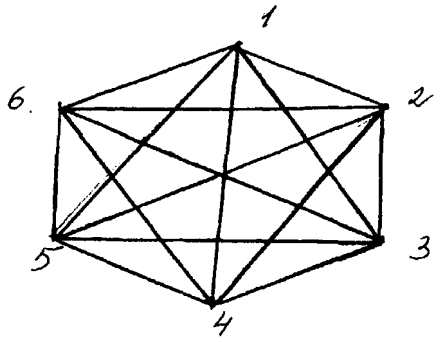
А.М. Пышкало, Стойлова Л.П., Рожденственская В.В. графом называют «особый чертеж, состоящий из точек и линий, идущих из одной точки в другую».

Иначе можно сказать, что граф – совокупность точек, стрелок, линий, петель. Как указывает Виленкин Н.Я. «точки, изображающие элементы множества, рассматриваемого в задаче, называют вершинами графа» [35]. «Стрелку на графе, у которой начало и конец совпадают, называют петлей» .

Рассмотрим возможность решения комбинаторной задачи, которая встречается во всех пособиях по элементарной комбинаторике.

«После летних каникул шестеро друзей обменялись телефонными звонками. Сколько звонков было сделано?»

Обозначим на плоскости каждого из друзей точкой с определенным номером. Каждый звонок мы одновременно состоятся между двумя друзьями. Покажем на графе это с помощью отрезков (ребер). Если первый друг звонил второму, то второй звонить первому уже не будет. Количество ребер в полученном графе – это число телефонных звонков.

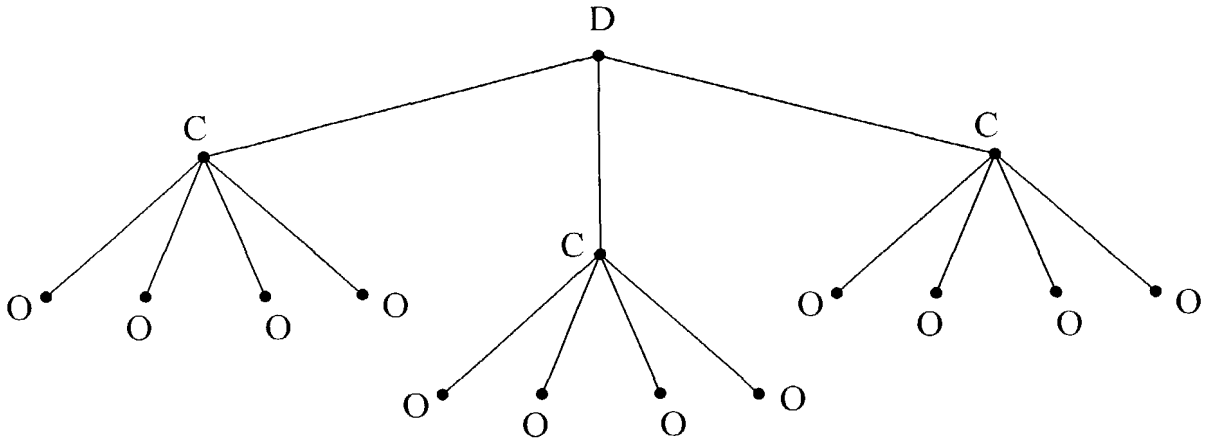


Еще одним средством графического метода решения задачи является «граф-дерево».

Дерево решений: (схема-дерево, граф-дерево, дерево вариантов). В случае, когда число возможных выборов на каждом шагу зависит от того, какие элементы были выбраны ранее, удобнее изобразить процесс составления комбинации в виде «дерева».

Построение «граф-дерева» в процессе решения задачи можно продемонстрировать на примере такой задачи:

«Из дома отдыха на стадион ведут 3 различные дороги, а от стадиона до озера – 4. Отдыхающие обычно после тренировки на стадионе идут



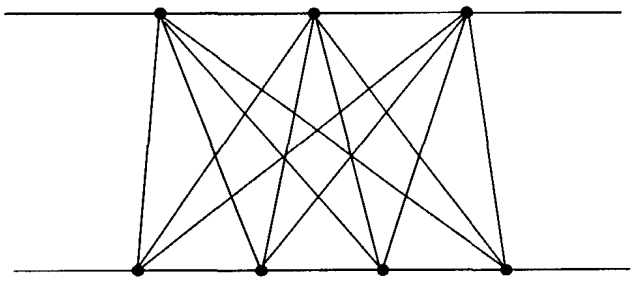
купаться на озеро. Могут ли 8 отдыхающих дойти от дома отдыха до озера с заходом на стадион разными маршрутами?»

По количеству нижних ветвей на дереве определяем число возможных вариантов маршрутов $D \to C \to O$. Их – 12. Значит, 8 отдыхающих могут выбрать для себя разные маршруты движения от дома отдыха к озеру.

Помимо задач описанных выше, существует много комбинаторных задач геометрического содержания: задачи на подсчет числа точек пересечения нескольких прямых или окружностей и т.д.

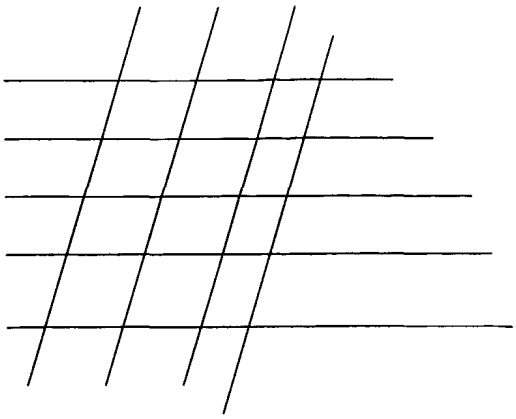
Рассмотрим несколько из них.

1. На прямой взяты три точки, а на параллельной ей прямой четыре точки. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?



Треугольник определяется тремя точками – вершинами, не принадлежащим одной прямой. Если взять в качестве вершины одну из трех точек на первой прямой, то чтобы получить треугольник, на второй прямой надо выбрать две точки из четырех имеющихся. Если одну точку – вершину из четырех выбираем на второй прямой, то две точки из трех надо выбрать на первой прямой. Применяя правило умножения и сложения $C_3^1 \cdot C_4^2 + C_4^1 \cdot C_3^2$ получаем, что число треугольников равно 30.

2. Сколько получится различных параллелограммов при пересечении пяти параллельных прямых одного семейства и четырех – другого?



Каждый параллелограмм определяется выбором двух прямых одного семейства и двух прямых другого. Выбор из 5 прямых можно осуществить C_5^2 способами, выбор из четырех – C_4^2 способами.

По правилу умножения, число различных параллелограммов равно $C_5^2 \cdot C_4^2 = 60$.

Формулы комбинаторики для сочетаний, размещений, перестановок нашли свое применение при решении задачи на вычисление вероятностей.

Группа спортсменов из 10 юношей и 5 девушек выбирает для эстафеты 4 человека по жребию. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажутся два юноши и две девушки?

Испытание состоит в том, что из 15 человек выбирают четыре человека. Так как выбор осуществляется по жребию, то все исходы испытания равновероятны, и, кроме того, они несовместимы. Число исходов испытания $n = C_{15}^4$, так как выборка состоит из четырех элементов и порядок их расположения в выборке не учитывается. Пусть событие А состоит в том, что в составе выбранных окажутся два юноши и две девушки. Двух юношей из 10 можно выбрать C_{10}^2 способами и после каждого такого выбора двух девушек из 5 можно выбрать C_5^2 способами. По правилу произведения событию А благоприятствует $C_{10}^2 \cdot C_5^2$ исходов испытания. Нужная вероятность вычисляется по формуле: $p(A) = \dfrac{C_{10}^2 \cdot C_5^2}{C_{15}^4} \approx 0{,}328$

3. Сколько диагоналей имеет выпуклый n -угольник?

Решение: Каждая диагональ определяется двумя вершинами, не принадлежащими одной стороне многоугольника. Число двоек вершин равно $C^2{}_n$ среди которых n двоек вершин образуют стороны многоугольника. Следовательно, число диагоналей

$$C^2{}_n - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

4. Сколько получится различных параллелограммов при пересечении n— параллельных прямых одного семейства и пm - параллельных прямых другого семейств.

Решение. Каждый параллелограмм определяется выбором двух прямых одного семейства и двух прямых другого, Выбор двух из *n* прямых можно осуществить C^2_n - числом способов, выбор двух прямых из *m*— C^2_m числом способов. По правилу умножения искомое число параллелограммов равно произведению $C^2_n * C^2_m$.

Анализ особенностей комбинаторных задач и способов их решения позволяет сделать следующие выводы:

1. При составлении комбинаторных задач для учащихся начальных классов использовались различные виды соединений, которые связаны размещениями, расстановками, сочетаниями.

2. Основным методом решения комбинаторных задач в начальной школе может явиться неформальный, так как он учитывает особенности мышления младших школьников и не требует введения в программу дополнительной информации.

3. Можно предположить, что в качестве способов решения комбинаторных задач младшим школьникам вполне доступны способ перебора, составление таблиц и построение графов.

Однако эти выводы должны получить методическую интерпретацию в развивающем курсе математики начальной школы, так как в рамках проводимого исследования необходимо разработать методику обучения младших школьников решению комбинаторных задач, обеспечивающую усвоение программного содержания.

ГЛАВА 2 ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

2.1. Опыт включения комбинаторных задач в школьный курс математики.

Проблема включения комбинаторных задач в школьный курс математики стала предметом дискуссий с середины 60-х годов прошлого столетия. Это обусловливалось тем, что на смену концепции строгого детерминизма в различных областях научного знания пришли закономерности случайных явлений.

В связи с этим получили новую трактовку различные законы физики, астрономии, химии, биологии, и т.д.

Современное естествознание исходит из представления, согласно которому все явления природы носят статистический характер и ее законы могут получить достаточно полную и точную формулировку только в терминах теории вероятностей.

Звездная астрономия, исследования распределения материи в пространстве, распределении во времени и на поверхности Солнца солнечных пятен (центров солнечной активности) и многое другое нуждается в систематическом использовании статистических представлений и разнообразного математического аппарата теории вероятностей.

Еще со времен А. Кетли биологи заметили, что разброс размеров органов живых существ одного и того же вида прекрасно укладывается в общие теорико-вероятностные закономерности. Знаменитые законы Менделя, положившие начало современной генетике, требуют для своего осмысливания теорико-вероятностных рассуждений. Попытки игнорирования этих представлений приводили к искажению природы и

отказу от естественного и правильного объяснения результатов опытов.

Изучение таких значительных проблем биологии, как передача возбуждения, устройство памяти, передача наследственных свойств, вопросы расселения животных на территории, взаимоотношения хищника и жертвы, определение корреляционных связей между различными величинами, определение нормы и многое другое, требует применения законов математической статистики.

Понимание природы химических реакций, динамического равновесия невозможно без статистических и вероятностных представлений. Почти вся физическая химия, ее математический аппарат исходит не из феноменологических представлений о материи как сплошной среде, а из ее молекулярного, атомного и субатомного строения.

В последнее время статистические методы исследования все более привлекаются к историческим исследованиям, особенно в археологии. Выяснение национальных принадлежностей этих захоронений уже проводится с привлечением статистических методов.

Статистический подход давно используется и для расшифровки надписей на давно умерших языках. Идеи, руководившие Ж Шампольоном при его расшифровке иероглифических текстов, являются в своей основе статистическими. Этот же подход сохраняется и теперь, когда приступают к изучению текстов народов майя и других еще не расшифрованных письмен. Искусство шифрования записей и их дешифровки также основано на использовании статистических закономерностей языка.

Учет статистических закономерностей необходим и при изучении повторяемости слов и букв, распределении ударений в словах, вычислении информативности языка конкретных писателей и поэтов.

Экономика также не остается в стороне от глубоких и всесторонних статистических исследований. Вопросы перспективного планирования производства самым непосредственным образом связаны со случайными

изменениями массового спроса. Для того чтобы эти изменения предусмотреть, нужно научиться на опыте прошлого, предвидеть будущее. Чтобы выяснить, как увеличить доходы государства и одновременно поднять жизненный уровень граждан, необходимо тщательно проанализировать огромный статистический материал и из него сделать правильные выводы.

В связи с вышесказанным, формирование представлений о статистических концепциях является одной из задач общего образования.

Анализ зарубежного опыта свидетельствует о том, что эта задача может успешно решаться [1,2,3,4].

Так, во французских школах большое значение уделяется изучению теории вероятностей и статистики, которая не содержит ни формальной теории, ни технически сложных задач. Все понятия в этом курсе вводятся естественным образом при рассмотрении соответствующих примеров из реальной жизни, а не с помощью формальных определений, т.е. преподавание ведется на доступном ученику уровне.

В середине семидесятых годов в программное содержание младшей ступени средних школ Японии, наряду с разделами «Числа и алгебраические выражения», «Функции», «Геометрические фигуры», был включен раздел «Вероятность и статистика».

В процессе изучения данного раздела японские школьники учатся целенаправленно собирать данные, располагать их в виде таблиц, чтобы усмотреть закономерность в их поведении (частота распределений по гистограмме, относительная частота и выборочная функция распределения: смысл среднего значения и разброса случайной величины). Затем вводится понятие вероятности как относительной частоты, полученной в результате большого числа наблюдений и проб.

Производится подсчет вероятностей в простейших случаях. Для иллюстрации рассматриваемых понятий используются ветвистые графы («деревья»).

В американских школах в содержательную часть стандарта (1989г.) начальной школы (I-IV классы) включен раздел «Элементарные основы статистики и вероятностей»; средней ступени (V-VIII классы) - «Статистика и вероятность», старшей школы (IX-XII классы) – «Статистика. Вероятность. Дискретная математика».

Попытки включения элементов комбинаторики и теории вероятностей в школьный курс математики были и в Российской общеобразовательной школе. Целесообразность их введения в школьный курс математики неоднократно отмечалась в работах С.Н. Бернштейна, А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина, Б.В. Гнеденко. В качестве обоснования выступала «... необходимость систематического развития у учащихся идеи наличия в природе закономерностей более широкой природы, чем строгий классический детерминизм, а именно статистических закономерностей» [47 с.12].

В 1967 году в факультативный курс X класса были включены следующие вопросы:

1. Начала комбинаторики и вычисление вероятностей при помощи подсчета числа благоприятствующих случаев.

2. Операции над событиями, теорема сложения вероятностей, условные вероятности и независимость событий.

3. Независимые повторные испытания с постоянной вероятностью, теорема Бернулли (без доказательства), заключительная беседа о различных областях науки и практической деятельности.

4. Математическое ожидание. Дисперсия и закон больших чисел (доказательство в форме теоремы Чебышева).

При этом академик А.Н. Колмогоров, возглавлявший комиссию по разработке программы, высказал надежду, что «этот материал в значительной своей части в будущем войдет в основной школьный курс математики. Желательно, чтобы при ведении факультативных занятий в

школах выработалась определенная традиция его изложения, которая потом могла бы быть перенесена на работу со всеми учащимися» [9 с.14].

Возможность включения элементов комбинаторики и теории вероятностей в школьный курс математики нашла отражение в целом ряде диссертационных исследований 70-80 годов прошлого века [19,21,41,55,81,150,178].

Выделению сквозной вероятностно-комбинаторной линии в школьном курсе математики посвящены исследования Л.М. Кабековой, А.Я. Дограшвили, З.П. Самигулиной, Л.Бычковой. В работах данных авторов приводятся аргументы в пользу совместного изучения элементов комбинаторики и теории вероятностей, связанных как обособленностью элементов комбинаторики от других тем, так и особенностью их содержания. В связи с этим, на усвоение комбинаторики тратится много времени, что не позволяет глубоко изучить вопросы теории.

По мнению Л.М.Кабековой, изучение элементов комбинаторики внутри раздела «Элементы теории вероятностей» позволит отказаться от решения искусственных задач по комбинаторике и тем самым сэкономить время для более глубокого курса теории вероятностей. Этот путь дает возможность комбинаторику – самостоятельную область математики со своими задачами и со своими методами – рассматривать как составную часть теории вероятностей с вероятностными выводами основных формул. При этом учащиеся знакомятся и с комбинаторными методами.

Особый интерес с точки зрения проводимого исследования представляет работа А.Я. Дограшвили, посвященная формированию у учащихся восьмилетней школы умений и навыков решения комбинаторных задач.

Предложенная автором система комбинаторных и вероятностных понятий предусматривает ознакомление учащихся со следующими вопросами: сочетания, число сочетаний, упорядоченная пара, размещения,

перестановки; опыт, его исходы, равновозможность исходов; случайное событие, благоприятствующие ему исходы опыта; вероятность события, невозможные и достоверные события; среднее арифметическое; геометрические вероятности.

Анализ программного содержания школьного курса математики позволил автору сделать вывод, что задачи вероятностного и комбинаторного характера разбросаны по всему курсу математики восьмилетней школы и не приведены в систему.

В исследовании предпринята попытка привести задачи комбинаторного и вероятностного характера к определенному единству по классам и создать определенную систему задач указанного типа соответствующую действующей в то время программе по математике. Основу этой системы составляют этапы, учитывающие, прежде всего возрастные особенности учащихся.

Автор полагает, что в классах уровень знания учащихся в указанном направлении определяется тем, что не превышает их сферу чувств.

В старших же классах от учеников требуется уже логическое мышление, которое опирается на метод неполной индукции: ученики высказывают гипотезы, а затем производят их проверку.

Изучение понятий комбинаторики и теории вероятностей в четвертом классе согласовано с изучением множеств, при этом процесс делится на два этапа. На первом рассматривается одно множество, содержащее небольшое число элементов, устанавливается связь между количеством элементов и количеством выделенных пар.

На втором этапе рассматриваются два разных множества, содержащие малое число элементов, и составленные из них всевозможные пары. Это обеспечивает усвоение учащимися понятия декартова произведения.

В четвертом и пятом классах учащиеся уже решают комбинаторно-вероятностные задачи, используя предложенные правила, закрепляют знания

пройденного материала по вопросам: множества, часть и дроби, их свойства, отрезок, луч, ломаная и т. д.

В шестом классе ученики пользуются для решения комбинаторных задач уже известными им правилами. Задачи, требующие применения общих формул, автор предлагает включить в 7-8 классы.

С методической точки зрения представляет интерес сам процесс решения комбинаторных задач, который автор представляет следующими этапами:

1. *Изучение условия задачи.* Здесь прежде всего, необходимо четко выявить, что является элементами рассматриваемого множества. Особое внимание при решении комбинаторных задач обращается на то, существен или нет порядок расположения элементов.

2. *Вычисления.* На этом этапе проводится требуемый расчет: либо посредством систематического перебора, либо с применением рассмотренных выше правил подсчета.

3. *Представление решения задачи.* На этом этапе требуется представить итоговый результат в наглядной форме и объяснить его смысл. В некоторых случаях на этом этапе возможна постановка вопроса о практическом применении полученного математического результата.

В диссертациях В.Ф. Волгиной и Л.Ю. Березиной обосновывается целесообразность использования графовых моделей при решении комбинаторных задач.

Представляет интерес исследование А.П. Шиховой «Обучение комбинаторике и ее приложениям в средней школе» [178].

Предлагая изучать комбинаторику в IX классе, автор отмечает необходимость подготовительной работы в предшествующих классах, т.к. локальное изучение темы приводит к нарушению разумного соотношения между развивающим и формально-алгоритмическим аспектами изучения комбинаторики и учащиеся, ранее не встречавшиеся с комбинаторными

задачами, не успевают за короткое время овладеть комбинаторным стилем мышления.

По мнению автора, формальное усвоение комбинаторики в старших классах обусловлено тем, что в методике недостаточно разработаны вопросы, связанные с систематическим целенаправленным формированием комбинаторных представлений учащихся основной школы. Решение этой проблемы автор видит во включении в курс 8-ей школы бесформульной комбинаторики.

Заслуживают внимания требования к системе комбинаторных задач, которые предлагает автор.

1. Использование при решении комбинаторных задач различных методов (хаотичный перебор, системный перебор, построение таблиц, графов, «дерева» решений).

2. Согласование комбинаторных задач с изучаемым материалом.

3. Установление связей между комбинаторными понятиями.

4. Установление связей комбинаторики с другими учебными дисциплинами.

5. Организация систем задач, допускающая индивидуальное обучение.

Несмотря на большое количество исследований, связанных с разработкой раздела «Элементы комбинаторики и теории вероятностей», его включение в школьный курс математики, для массовой школы он остался не востребованным.

Предлагаемые экспериментальные программы использовались либо в классах с углубленным изучением математики, либо как факультатив

Новый этап исследований, связанный с возможностью включения комбинаторных и вероятностных задач в программу отечественной общеобразовательной школы, относится к последнему десятилетию прошлого века [18,108].

Начиная с 1990 года появляется ряд работ, в которых комбинаторные

задачи рассматриваются как средство развития мышления учащихся.

К числу таких работ относится диссертация О.С. Медведевой, предметом исследования которой стало влияние комбинаторных задач на развитие мышления учащихся 5-6 классов.

Автор вводит понятие комбинаторного стиля мышления, существенной чертой которого является гибкость, вариативность и критичность.

На примере конкретных комбинаторных задач показывается, что процесс их решения создает благоприятные условия для формирования умения рассуждать, использовать разнообразные методы, направленные на поиск различных решений задачи; представляет возможности для обучения школьников двум основным этапам моделирования – выбору оптимальной математической модели и внутримодельному решению.

С точки зрения диссертационного исследования представляют интерес выводы автора, которые связаны с тем, что материал по комбинаторике и теории вероятностей должен естественным образом укладываться в тематику основной школы, т.е. находиться в тесной взаимосвязи с программным содержанием курса, т.к. невозможно беспредельно наполнять курс математики основной школы новым содержанием.

Первая попытка включения раздела «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» была предпринята в учебнике математики для 5-го класса (Учебник «Математика 5 кл» / под редакцией Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина). В этот учебник включены разделы «Перебор возможных вариантов», состоящий из тем «Комбинаторные задачи» и «Дерево возможных вариантов», раздел «Случайные события», включающий в себя темы: «Возможно или невозможно» и «Достоверные, возможные и невозможные случайные события». На изучение этих тем отводится соответственно 6 и 8 часов.

Анкетирование учителей математики г. Оренбурга, Орска, Новотроицка и Гая (108 учителей) показало, что эти разделы либо:

– вообще не изучаются – 30 учителей;

– изучаются факультативно – 56 учителей;

– рассматриваются обзорно – 22 учителя.

В процессе бесед учителя отмечали, что

– нет связи данных тем с другими разделами курса – 11 учителей;

– большинство учащихся не могут самостоятельно справиться с решением комбинаторных задач – 23 учителя;

– комбинаторные задачи не включаются в проверку знаний учащихся – 74 учителя.

Думается, что причины столь неадекватного отношения к вышеуказанным разделам заключаются в том, что:

а) пятиклассники не подготовлены к их восприятию и пониманию;

б) отсутствует методика обучения решению комбинаторных задач.

Хотя анализ учебников по математике для начальной школы показывает, что задания комбинаторного характера в них присутствуют, однако учителя включают их в процесс обучения либо как задачи повышенной трудности, либо как задачи «для смекалистых», либо используют их на факультативных занятиях или олимпиадах.

Другими словами, комбинаторные задачи выполняют в начальном курсе математики скорее контролирующую функцию, нежели обучающую и развивающую.

Хотя еще в 1973 году венгерский ученый Томас Варга доказал в своих экспериментальных исследованиях, что ученики начальных классов способны решать комбинаторные задачи. Более чем в ста школах Венгрии им был проведен эксперимент по обучению младших школьников начальным понятиям вероятности и комбинаторики. Результатом данного эксперимента стало убеждение автора в том, что идея обучения комбинаторике и теории вероятностей может быть реализована в начальной школе [28,29].

Таким образом:

1. Использование статистических методов в различных областях научного познания обусловило необходимость включения в курс школьной математики элементов комбинаторики и теории вероятностей.

2. Привнесение в школьный курс математики теоретико-множественной линии активизировало исследования российских ученых по разработке сквозной комбинаторно-вероятностной линии для средней школы.

3. Несмотря на большое количество исследований, связанных с разработкой раздела «Элементы комбинаторики и теории вероятностей», предлагаемые экспериментальные программы использовались либо в классах с углубленным изучением математики, либо факультативно.

4. Новый этап исследований, связанный с возможностью включения комбинаторных и вероятностных задач в программу общеобразовательной школы как средства развития мышления учащихся относится к последнему десятилетию прошлого века.

5. На современном этапе сделана попытка включить элементы комбинаторики в курс математики V класса. Однако, методика обучения пятиклассников решению комбинаторных задач не разработана и учащиеся не подготовлены к пониманию и усвоению этих вопросов.

6. В современных учебниках математики для начальных классов наблюдается тенденция к увеличению комбинаторных задач. Однако методика обучения их решению не разработана, они не связаны с процессом усвоения программного материала и адресованы в основном «сильным ученикам»

2.2. Комбинаторные задачи как средство развития мышления школьников.

Развитие учащихся во многом зависит от той деятельности, которую

они выполняют в процессе обучения.

Если ученик получает готовую информацию, воспринимает ее, понимает, запоминает, а затем воспроизводит, то эту деятельность обычно называют репродуктивной. Основная цель такой деятельности – формирование у школьников знаний, умений, навыков, развитие внимания и памяти.

Психологи отмечают, что следствием такой деятельности является скованность мышления и стремление ребенка мыслить по готовым стереотипам. Такие особенности интеллектуальной деятельности связаны с показом образца действий и его закреплением в процессе выполнения однотипных заданий. В результате учащиеся усваивают только однотипные способы решения задач, успешно воспроизводят их, но не видят других вариантов решения, не могут их варьировать и преобразовывать.

Продуктивная деятельность связана с активной работой мышления и находит свое выражение в таких мыслительных операциях как анализ и синтез, сравнение, классификация, аналогия, обобщение. Эти мыслительные операции в психолого-педагогической литературе принято называть логическими приемами мышления или приемами умственных действий.

Включение этих операций в процесс усвоения математического содержания – одно из важных условий построения развивающего обучения.

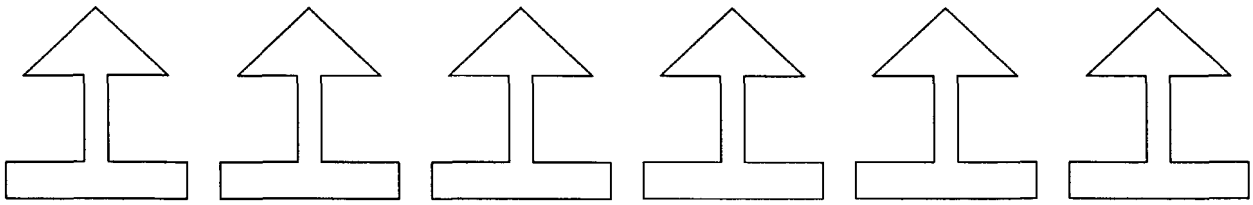
«… организация развивающего обучения предполагает создание условий для овладения школьниками приемами умственной деятельности. Овладение ими обеспечивает не только новый уровень усвоения, но дает существенные сдвиги в умственном развитии ребенка. Овладев этими приемами, ученики становятся более самостоятельными в решении учебных задач, могут рационально строить свою деятельность по условию знаний» [186 с.57].

Роль комбинаторных задач в формировании приемов умственной деятельности можно конкретизировать на примере комбинаторных заданий,

которые ребенок выполняет на различных этапах обучения математике. Так, опираясь только на свой жизненный опыт, он легко справляется с таким заданием:

«Для детского сада, в котором 6 групп, нужно раскрасить грибочки и песочницы для каждой площадки так, чтобы они отличались друг от друга. У маляров только 3 краски: красная, желтая и зеленая. Давайте поможем малярам справиться с этой работой»

Для выполнения задания каждому ученику предлагается схематический рисунок, на котором изображены шесть песочниц с грибочками.



Обычно дети самостоятельно соотносят каждую краску с тем или иным элементом рисунка. Например: песочница красная, ножка грибка желтая, сам грибок зеленый. Если ученики затрудняются, то учитель сам может раскрасить первый рисунок. Вся дальнейшая деятельность связана с операциями анализа, синтеза, сравнения. При этом детям лучше предоставить самостоятельность в виде способа действия. Примером комбинаторной задачи, выполнение которой требует не только использования приемов умственной деятельности, но и определенных знаний, может быть такое задание:

«Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 так, чтобы цифры в записи не повторялись». Ученик, анализируя условие, выделяет определенные части, составляет необходимые комбинации из трех цифр по две, получая таким образом двузначные числа. Он одновременно следит за тем, чтобы не было повторов. С другой стороны, в процессе синтеза ребенок определяет, что сначала можно составить комбинацию, начинающуюся с цифры 1 – это 12 и 13, потом с цифры 2 – это числа 21 и 23, а затем с цифры

3 – 31 и 32. Соотнося условие с требованием задачи, ученик не составляет чисел 11, 22, 33, т.к. они не удовлетворяют требованию.

На этом примере хорошо видно, что при поиске ответа на поставленный вопрос ученики не могут обойтись без наблюдения и сравнения. Наблюдение состоит в преднамеренном целенаправленном восприятии окружающей действительности. Если младшие школьники не будут специально, с определенной целью воспринимать информацию, заключенную в задаче, то вряд ли они смогут найти решение или вообще решить ее.

Сравнение – процесс выделения признаков, свойств объектов и установление сходства и различия между ними – позволяет ученику при составлении данных двузначных чисел избежать повторов, составить все возможные числа на основе сходства и различия между ними: 12 и 13, 21 и 23 и т.д.

На основе классификации ребенок «строит» такие комбинации: 12 13 и 21 23 и 31 32. Основание классификации – одинаковая цифра, обозначающая число десятков. Может быть другое основание – цифра, обозначающая число единиц 21 31 и 12 32 и 13 23.

При составлении комбинации из трех цифр ребенок проделывает это не наугад, а находит общее правило, закономерность (на первом месте одна и та же цифра может быть только два раза, то же самое и на втором месте).

Он обобщает, т.е. выделяет существенные признаки объектов, а также объединяет, группирует объекты на основе этих признаков. Теперь ученик сможет сразу определить (в другом задании) число комбинаций, если эти комбинации будут составляться без повторений из трех объектов по два элемента. Таким образом, появляется возможность говорить о развитии у младших школьников на основе решения комбинаторных задач содержательного обобщения, которое характеризуется следующими признаками:

1) оно выполняется при таком анализе конкретного факта (задачи), который обнаруживает внутреннюю связь его частных проявлений;

2) оно, исходя из этой связи, позволяет затем сразу обобщить все другие факты (задачи) данного круга, применить найденный способ решения в измененной или новой ситуации [44 с.62].

Взаимосвязь развития мышления и процесса усвоения знаний, умений и навыков обоснована в целом ряде психологических исследований [105,109,156]. При этом мышление первоначально строится на чувственном познании, на восприятии и далее на самом высоком уровне и развитии не порывает с ними.

Мышление есть процесс, то есть познание в его динамике. Направленность мыслительного процесса на открытие неизвестного, обозначенного в вопросе, придает мышлению строго определенный, организованный и проблемный характер. Когда человек мыслит, он обязательно решает какую-то задачу. Не случайно еще С.Л. Рубинштейн говорил о том, что «мышление определяют нередко как процесс решения задач. Действительно, мышление возникает обычно из проблемной ситуации и направлено на ее разрешение» [144 с.87]. Но он указывал и на то, что «свести мышление к процессу решения задач - значит определить его прагматически, по тому эффекту, который оно дает, не вскрывая его собственной природы – того, благодаря чему этот эффект получается. Мышление разрешает встающую перед человеком задачу благодаря тому, что оно раскрывает не данные в условиях, неизвестные свойства и отношения объектов или явлений, входящих в проблемную ситуацию: мышление – это, по существу своему, познание, приводящее к решению встающих перед человеком проблем и задач»[144 с.92]

Генетически наиболее ранней формой мышления является наглядно-действенное (предметно-действенное) мышление.

Его определяют как «наиболее элементарную форму мышления,

возникающую в практической деятельности и являющуюся основой для формирования более сложных форм мышления» [43 с.29].

Существуют чрезвычайно сложные изменчивые и многообразные отношения мышления и практического действия, мышления и языка, мышления и чувственного образа.

Эти отношения изменяются на разных ступенях возрастного развития детей и находятся в непосредственной связи с содержанием той задачи, которую они в данный момент решает.

Первым способом решения задачи для маленького ребенка является практическое действие. Его значение состоит в том, что ребенок, непосредственно воздействуя на вещи, раскрывает их свойства, выявляет признаки и, главное, раскрывает невидимые ему ранее связи, существующие как между вещами и явлениями, так и внутри каждого предмета и явления. Эти связи из скрытых становятся видимыми. Такой путь познания особенно эффективен в младших классах в изучении математики, где может быть использовано практическое действие как начальный путь познания комбинаторной задачи.

На понимании роли практического действия как начальной ступени процесса развития всех высших форм мышления человека построена концепция «поэтапного формирования умственного действия», разработанная П.Я. Гальпериным [45].

На первом этапе ребенок использует для решения задачи внешние материальные действия. На втором – эти действия только представляются и проговариваются ребенком (сначала громко, а затем про себя).

Лишь на последнем, третьем этапе внешнее предметное действие «сворачивается» и уходит во внутренний план. Для каждого этапа превращения развернутого материального действия в его свернутую умственную модель характерен определенный тип ориентировки ученика в условиях и содержании предложенной ему задачи. На высшем уровне такими

ориентирами становятся существенные для данного типа задач опознавательные признаки обобщенного характера (они выражены в законах, понятиях).

С переходом мышления ребенка на следующую, более высокую ступень развития начальные его формы, в частности, практическое мышление, не исчезают, не «отмирают», но их функции в мыслительном процессе перестраиваются, изменяются.

С развитием речи и накоплением опыта ребенок переходит к мышлению образному. На первых порах этот более высокий вид мышления сохраняет у младшего школьника многие черты низшего вида. Это прежде всего обнаруживается в конкретности тех образов, которыми ребенок оперирует.

Наглядно-образное мышление – «это вид мышления, который необходимо опирается на восприятие или представления. Этот вид мышления характерен для дошкольников и отчасти детей младшего школьного возраста, а в развитых формах свойственен людям тех профессий, которые связаны с ярким и живым представлением тех или иных предметов или явлений (писателям, художникам, музыкантам, актерам)»[97 с.39].

При наглядно-образном мышлении связь с практическими действиями хотя и сохраняется, но не является такой тесной прямой и непосредственной, как раньше. В ходе анализа и синтеза познаваемого объекта ребенок необязательно и далеко не всегда должен потрогать руками заинтересовавший его предмет. Во многих случаях не требуется систематического практического манипулирования с объектом, но во всех случаях необходимо отчетливо воспринимать и наглядно представлять этот объект.

Иначе говоря, дети 4-7 лет мыслят лишь наглядными образами и еще не владеют понятиями (в строгом смысле). Наглядно-образное мышление детей непосредственно и подчинено восприятию, и потому они пока не могут

отвлечься с помощью понятий от некоторых свойств рассматриваемого предмета.

Существенные сдвиги в развитии мышления ребенка возникают в школьном возрасте, когда его ведущей деятельностью становится учение, направленное на усвоение систем понятий. Эти сдвиги выражаются в расширении круга объектов, над которыми думает школьник, в познании все более глубоких свойств предметов, в формировании необходимых для этого мыслительных операций, возникновении новых мотивов познавательной деятельности (более глубоких познавательных интересов, любознательности, осознания важности усвоения знаний и др.).

В процессе решения более сложных познавательных задач, стоящих перед младшими школьниками, мыслительные операции обобщаются, формализируются, благодаря чему расширяется диапазон их переноса и применения в различных новых ситуациях. Значительных успехов достигает развитие способности рассуждать, обосновывать свои суждения, доказывать истинность выводов, осознавать и контролировать процесс рассуждения, овладевать его общими методами, переходить от развернутых к свернутым формам, в которых обосновывающие суждения не формулируются, а подразумеваются, вследствие чего процесс мышления становится более экономным и продуктивным.

Развитие абстрактного мышления у школьников в ходе усвоения понятий вовсе не означает, что их наглядно-действенное и наглядно-образное мышление перестает теперь развиваться или вообще исчезает. А.В. Брушлинский и А.В. Петровский утверждают, что «эти первичные и исходные формы всякой мыслительной деятельности по-прежнему продолжают изменяться и совершенствоваться вместе с абстрактным мышлением и под его влиянием» [120 с.18].

Исследования психологов 1960-90 г.г. внесли существенные поправки в понимание ранних форм детского логического мышления. Среди этих

поправок наиболее существенным является то, что логические ошибки, допускаемые детьми, не являются сплошными. Кроме того, опыт показывает, что детям 7-10 лет вполне доступно выделение существенных признаков, их распознавание в новых фактах и предметах, поиск и установление связей, группировка предметов по этим признакам, оперирование рядом понятий, переходы к обобщениям и выводам.

Таким образом, логическое мышление является высшей ступенью в умственном развитии ребенка, проходит длительный путь развития. На ранних ступенях развития ребенок накапливает чувственный опыт и учится решать практическим путем ряд конкретных, наглядных задач. Осваивая речь, он приобретает возможность формулировать задачу, задавать вопросы, которые позволяют ему овладеть понятиями и рядом умственных действий. Эти возможности должен использовать учитель, обучая детей с первого дня их работы в школе различным операциям и формам словесного мышления.

Младший школьный возраст сентезивен для интенсивного развития способностей действовать «в уме», поскольку в этот период формируются основные навыки учебной деятельности. Характеризуя новые качества психики, которые появляются у детей в это время, В.В. Давыдов пишет: «Чем больше «шагов» своих действий может предусмотреть ребенок и чем тщательнее он может сопоставлять их реальные варианты, тем более успешно он будет контролировать фактическое решение задачи» [52 с.21]

Итак, под внутренним планом действия понимают возможность ребенка действовать «в уме» [52 с.89]. А.А. Зак считает, что под умственным действиями обычно понимают такие, которые выполняются во внутреннем, мысленном плане, без опоры на внешние средства. [53 с.18] Однако в рассмотрении действии «в уме» нельзя полностью отказываться от внешних опор. В ряде психологических исследований [45,56] было отмечено, что действие может быть «внутренним» в форме протекания (выполняется «про себя», «в уме»), но быть предметным по способу выполнения (опора на

предметные действия). Действительно, при решении такой простой задачи: «Сколько различных пирамид из колечек красного, синего и зеленого цвета можно составить так, чтобы на каждой все колечки были разного цвета?»- младший школьник, знакомый с приемом системного перебора сначала определит для себя, что каждая пирамида будет состоять из трех элементов – колечек (их всего три цвета). Каждое колечко может побывать на первом, втором и третьем «этаже» 2 раза: если на первом «этаже» – красное, то на втором – синее или зеленое, на третьем опять же зеленое или синее. Таким образом, ученик мысленно осуществляет поиск решения, планирует, собирая пирамидку

3 «этаж»	зеленое	синее
2 «этаж»	синее	зеленое
1 «этаж»	красное	красное

с опорой на предметные действия.

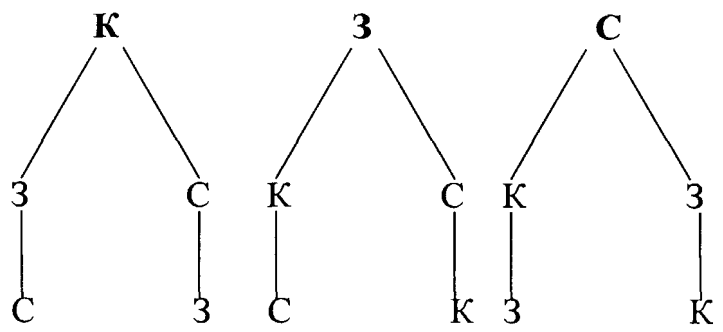
Роль предметных действий могут выполнять конкретные предметы, рисунки или символические записи:

З	С	З	К	С	К
С	З	К	З	К	С
К	К	С	С	З	З

На примере этой задачи можно проиллюстрировать два основных компонента внутреннего плана действий [52 с.89].

1) возможность ученика заранее представить то, что получится в результате его усилий, возможность иметь образ будущего результата, образ того, что нельзя воспринять (ученик представляет ту комбинацию, которую он должен получить в результате, – трехэтажная пирамидка из разноцветных колечек, и может определить число таких комбинаций: если каждое колечко используется по 2 раза на каждом этапе, а их (колечек) всего 3, то пирамидок будет 6: 2 + 2 + 2;

2) возможность ученика планировать путь достижения поставленной цели, разработать (мысленно) способ получения предметного результата в данных конкретных условиях (в нашем мире – ученик выбирает путь систематического перебора, один из его вариантов – прямое изображение комбинаций; ученик мог выбрать и другой способ решения, более «высокого» уровня, – воспользоваться деревом решений (см. рисунок)).



Итак, формирование у младших школьников способности комбинировать (возможности создавать разные сочетания, комбинации объектов или их элементов) тесно связано с развитием ВПД. Ведь само комбинирование направлено на поиск различных вариантов решения задачи, на разработку разных способов достижения цели, что связано с внутренним планированием.

Уровень сформированности этой способности в начальных классах обозначают как частичный [156 с.41]: младшие школьники могут мысленно оперировать знаками, сопоставлять размещение элементов. При этом частичном уровне сформированности способности действовать «в уме» ученики начальных классов могут спланировать последовательные перемещения элементов с учетом предыдущих действий, но при этом решение задач планируется не в целом, а по частям, т.е. не разрабатывая общего плана действий, а подготавливая каждое действие.

Для выявления различий в мыслительной деятельности психологи

используют такие качества (свойства) мышления, как самостоятельность, критичность, глубина, быстрота, гибкость, вариативность.

Глубина мышления – способность анализировать, сравнивать, находить существенное, проникать в сущность вопроса. Глубокому уму свойственна потребность понять причины возникновения явлений и событий, умение предвидеть их дальнейшее развитие, умение доходить во всяком до сути дела, не успокаиваясь на поверхностном объяснении.

Быстрота мышления – способность человека быстро обдумывать и принимать верное решение.

Критичность мышления – умение объективно оценивать свои и чужие мысли тщательно и всесторонне проверять все выдвигаемые положения и выводы.

Гибкость мышления выражается в свободе мысли от сковывающего влияния закрепленных в прошлом опыте приемов и способов решения задач, в умении быстро менять свои действия при изменении обстановки, находить новые пути решения задач, в умении отказаться от стереотипного способа действия и даже в знакомой ситуации выделить новые свойства и отношения объектов. Эта способность перестраивать имеющиеся способы действия зависит от умения ребенка выделять в средствах мыслительных действий, которыми он уже владеет, новые средства и отношения, применять эти средства в новых ситуациях.

Вариативность мышления – направленность мыслительной деятельности на поиск различных решений задачи в случае, когда нет специального указания на это.

Под вариативностью мышления понимают также умение находить разнообразные способы преобразования объекта, другие качества [97,120].

По мнению Л.В. Занкова, основным направлением математической подготовки должно стать развитие таких свойств мыслительной деятельности, как гибкость и быстрота реакций, «...когда речь идет о

мышлении, на первый план обычно выдвигается вопрос об усвоении знаний и понятий. Говорится также о процессах сравнения и обобщения. Но особое значение приобретает одна особенность мышления, которая до настоящего времени оставалась в тени. Мы имеем в виду рассмотрение одного и того же предмета с разных точек зрения» [64 с.53]

Гибкость мышления «зависит от умения сравнивать объекты, сознательно находить новые признаки в них, рассматривая с разных сторон» [97 с.48].

По мнению психологов, структуру гибкости мышления составляют ее средства – представления ребенка и мыслительные действия, позволяющие оперировать ими. Мыслительные действия включают анализ признаков объекта, ориентировку на существенные в данной ситуации признаки, выявление различия и сходства, причинно – следственных связей и зависимостей, установление закономерностей.

В исследованиях Е.С. Ермаковой установлено, что математические задачи, связанные с анализом свойств и связей для разных ситуаций, особенно эффективны для развития такого качества мышления, как гибкость [59 с.12].

Обобщая материал данного параграфа, можно сделать следующие выводы:

1. Процесс решения комбинаторных задач требует адаптивного использования таких приемов умственных действий, как анализ, синтез и сравнение.

Так, при использовании метода перебора при перечислении всех возможных вариантов решения комбинаторной задачи учащиеся используют такие мыслительные операции, как анализ, синтез, сравнение, обобщение, абстракция и др. Поэтому при систематическом использовании комбинаторных задач на уроках математики несомненно будут развиваться указанные мыслительные операции.

2. Целенаправленное обучение решению этого вида задач будет способствовать развитию многих качества мышления, особенно таких как вариативность, гибкость, глубина мышления. Решая задачи такого вида, учащиеся должны найти различные решения, разнообразные способы реального преобразования объекта, т.е. должны проявить креативность мышления, а также гибкость, глубину мышления. Кроме того вариативность здесь выступает как важнейшая характеристика поисковой деятельности, которая является основой продуктивной деятельности в учении.

Необходимо сказать о том, что умение составлять комбинации по определенным признакам и классифицировать их, лежит в основе разнообразнейших сфер человеческой деятельности. Поэтому вариативность – качество, необходимое людям разных специальностей: учителю, составляющему расписание уроков, конструктору, программисту, инженеру-строителю, химику, биологу и др. Вариативность играет важную роль и в творчестве; известный математик А. Пуанкаре обращал внимание на то, что «творчество, конечно, состоит не в том, чтобы составлять бесконечные комбинации, а в том, чтобы создавать полезные, а таких не особенно много. Творить – это значит различать, выбирать».

3. При решении комбинаторных задач дети учатся рассуждать четко, логично, последовательно. Особенно ярко это проявляется в рассуждении при построении графа – дерева, или «логического дерева решений».

А в нашу эпоху ускоренного роста науки и техники, автоматизации и компьютеризации способность мыслить логично, формально, точно, определенно становится одним из необходимых признаков научной деловой культуры.

4. Используя комбинаторные задачи, можно развивать мышление детей от наглядно-действенного к наглядно-образному и абстрактному.

Так, первые комбинаторные задачи должны давать возможность выполнять практические действия с реальными объектами. Постепенно

осуществляется перенос наглядного приема в мысленную сферу, т.е. происходит развитие наглядно-образного мышления. А при применении правил суммы и произведения будет развиваться абстрактное мышление.

5. Систематическое решение комбинаторных задач, находящихся в тесной связи с программным содержанием, будет оказывать положительное влияние и на развитие других психических процессов. Так, будет значительно расширяться объем и концентрация внимания, развиваться память, вырабатываться умение оформлять свои рассуждения, объяснения, доказательства в словесной форме, т.е. развиваться речь.

ГЛАВА 3 СИСТЕМА КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ В РАЗВИВАЮЩЕМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

3.1. Методика обучения младших школьников решению комбинаторных задач.

Методика обучения любому комбинаторному содержанию должна базироваться на определенных исходных положениях, в которых находит определение взаимосвязь основных компонентов процесса обучения: целей, содержания, деятельности учителя и деятельности учащихся.

Эти положения могут носить общий или частный характер. В качестве общих положений выступают психологические закономерности, дидактические принципы, психолого-педагогические и методические концепции.

В соответствии с ними формулируются частные положения, учитывающие непосредственно специфику содержания, которое подлежит усвоению.

Методика обучения решению комбинаторных задач разрабатывалась в рамках методической системы развивающего обучения младших школьников математике (Н.Б. Истомина), которая выражает необходимость целенаправленного и систематического формирования приемов умственной деятельности в процессе усвоения математического содержания.

Нацеленность начального курса математики на формирование приемов умственной деятельности позволяет установить внутреннюю связь между развивающими условиями обучения и способами их достижения, так как в процессе усвоения знаний, умений и навыков приемы умственной

деятельности выполняют различные функции и их можно рассматривать:

1) как способ организации учебной деятельности школьников;

2) как способы познания, которые становятся достоянием ребенка, характеризуя его интеллектуальный потенциал и способности к усвоению знаний;

3) как способы включения в процесс познания различных психических функций: эмоций, воли, чувств, внимания; в результате интеллектуальная деятельность ребенка входит в различные соотношения с другими сторонами его личности, прежде всего с ее направленностью, мотивацией, интересами, уровнем притязаний т.е. характеризуется возрастающей активностью личности в различных сферах ее деятельности.

Средствами реализации данной концепции являются:

– тематическое построение курса, создающее условия для осознания школьниками связей между новыми и ранее изученными понятиями, для осуществления продуктивного повторения, для активного использования в процессе обучения приемов умственной деятельности;

– новый методический подход к изучению математических понятий, свойств и способов действий, в основе которых лежит установление соответствия между предметными, графическими (схематическими) и символическими моделями, их выбор, преобразование и конструирование в соответствии с заданными условиями;

– новый методический подход к формированию вычислительных навыков и умений, который создает условия не только для повышения качества вычислительной деятельности младших школьников, но и для развития их мышления;

– новый методический подход к обучению младших школьников решению текстовых задач, в соответствии с которым дети знакомятся с

текстовой задачей только после того, как у них сформированы те знания, умения и навыки (навыки чтения, усвоение конкретного смысла сложения и вычитания, приобретение опыта в соотнесении предметных, словесных, схематических и символических моделей, знакомство со схемой как способом моделирования), которые необходимы им для овладения умением решать текстовые задачи;

– включение в учебник диалогов между Мишей и Машей, с помощью которых детям предлагаются для обсуждения варианты ответов, высказываются различные точки зрения, комментируются способы математических действий, анализируются ошибки. Диалоги помогают учителю не только привлечь учащихся к обсуждению того или иного вопроса, но и самому включиться в эту работу, заняв тем самым позицию не контролирующего, а помогающего детям и сотрудничающего с ним.

Органически вписываясь в логику построения содержания курса, в методику обучения решению задач, в систему учебных заданий, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают знания, умения и навыки, комбинаторные задачи выступают как одно из средств реализации методической концепции развивающего обучения младших школьников математике.

Возможность данного положения обусловливается спецификой комбинаторных задач, решение которых требует активного использования таких приемов умственной деятельности как анализ и синтез, сравнение, классификация, обобщение.

Методика обучения решению комбинаторных задач находится в соответствии с методическим подходом к формированию у младших школьников математических понятий, который связан с установлением соответствия между различными моделями. Возможность такого

соответствия определяется способами решения комбинаторных задач. Так способ перебора (хаотичного и системного) позволяет детям решать комбинаторные задачи, опираясь на имеющийся у них опыт, на предметно-действенное и наглядно-образное мышление.

Используя для решения комбинаторных задач таблицы и графы, учащиеся фактически переводят вербальные модели в схематические. Тем самым у них формируются представления о моделировании как способа решения задач.

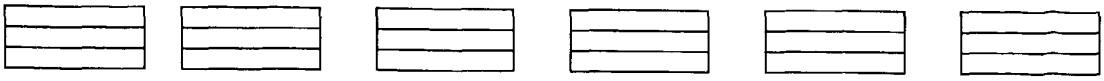
Новый подход к обучению младших школьников решению задач, нашедший отражение в методической системе развивающего обучения младших школьников математике, обусловил определенную этапность включения комбинаторных задач в процесс усвоения программного содержания, которая определялась способами их решения.

На подготовительном этапе знакомства с задачей комбинаторные задачи предлагаются учащимся как задания, основная цель которых заключается в предметной интерпретации словесной модели. Достижение этой цели способствует формированию навыков чтения и овладению такими операциями, как анализ и синтез, сравнение, классификация и обобщение.

Основным способом выполнения комбинаторных заданий является хаотичный, а затем системный перебор. (Термин «комбинаторная задача» учащимся не сообщается).

Задание 1. «У бабушки три цвета пряжи: оранжевая, желтая и коричневая. Какие шарфы она может связать из этой пряжи для внуков, если в каждом будут полоски разного цвета?»

Перед учениками на листе бумаги несколько прямоугольников (модели шарфов) с выделенными на них полосками.



Взяв нужные карандаши, ученики начинают раскрашивать полоски в определенный цвет: оранжевый, желтый, коричневый. Цель выполнения задания: не повторить уже полученной комбинации из трех цветных полосок. Вариантов выполнения работы учениками может быть три, четыре и т.д. На данном этапе не важно, чтобы были найдены все возможные варианты, главное, чтобы каждый новый «шарф» отличался от других и учащиеся могли бы обосновать этот факт.

Учитывая возрастные особенности первоклассников, целесообразно при решении комбинаторных задач использовать игровые ситуации, приемы драматизации, раскрашивание.

Задание 2. «Сережа, Антон и Денис пришли в кафе. В каком порядке мальчишки могут встать в очередь за мороженым?»

Ситуация, описанная в задании, легко обыгрывается. К доске выходят три ученика и показывают, как мальчики могли встать в очередь за мороженым.

Но если выполнение предыдущего задания было наглядным (все варианты разноцветных шарфов дети видели и могли сравнить между собой), то процесс драматизации не позволяет проследить, не было ли повторов при размещении мальчиков в очереди. Поэтому целесообразно ввести символическую запись: Сережа (С.), Антон (А.), Денис (Д.) и каждую новую перестановку записывать на доске.

С.А.Д., Д.А.С., А.Д.С., С.Д.А., А.С.Д., Д.С.А.

Число элементов, включенных в задание, небольшое, поэтому

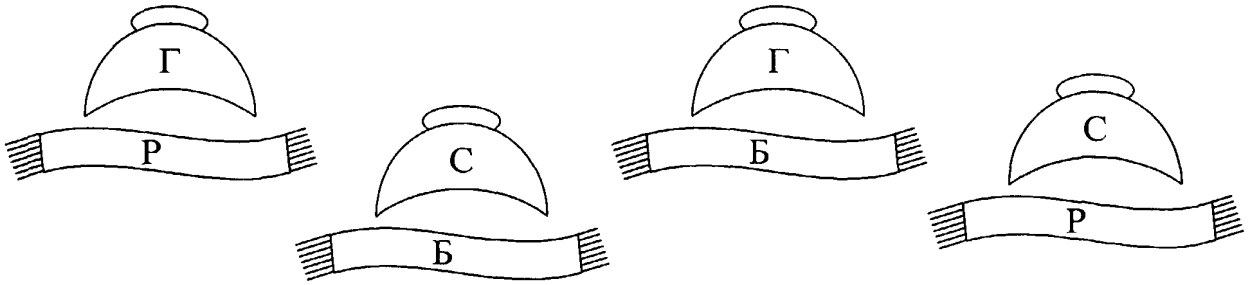
рассматриваются все возможные варианты. Поиск этих вариантов в процессе игры не будет утомительным для первоклассников.

Выполнение этого задания подводит детей к выводу, что, как бы много способов перебора ни было, их обязательно будет конечное число.

Составление комбинаций из небольшого числа элементов методом хаотического перебора проводится с использованием и конкретных предметов.

Задача 3. «Для своих дочек, Леры и Саши, мама купила две вязаные шапочки: голубую и сиреневую, и два шарфа, белый и розовый. Какие комплекты из шарфов и шапочек могут составить девочки?»

Выполнение данного задания связано с составлением сочетаний из четырех предметов по два. Взяв две шапочки и два шарфа, меняя их сочетания друг с другом, первоклассники подсчитывают, сколько же таких вариантов может быть: два, три, четыре. Чтобы выяснить, все ли возможные комбинирования шапочки и шарфа составлены, можно использовать либо рисунок с раскрашиванием,



либо символическую запись, обозначив цвет шапочки большой буквой, а цвет шарфа маленькой: Гр, Сб, Гб, Ср.

После введения понятия «задача» (2 класс) школьники решают комбинаторные задачи методом системного перебора с помощью графов. Наиболее применимы в начальной школе линейные графы, комбинаторные таблицы, «дерево» решений. Дадим краткую характеристику каждому из этих

способов.

Для осуществления полного перебора, чтобы не пропустить ни одну комбинацию, можно воспользоваться комбинаторными таблицами: матрицей и числовой таблицей.

Матрицей называется прямоугольная таблица элементов. Горизонтальные ряды называют строками, вертикальные ряды – столбцами. Элементами матрицы могут быть любые объекты числа, буквы, символы и т.д.

Числовой таблицей называется таблица с числовыми характеристиками множеств (они часто подсказывают наилучший практический путь решения какого-нибудь вопроса).

Известным примером комбинаторных таблиц являются латинские прямоугольники – это таблицы элементов, в которых каждый ряд представляет собой перестановку одних и тех же элементов, причем в каждом столбце все элементы различны. Комбинаторные таблицы удобно использовать при составлении различных конфигураций (и размещений, и перестановок, и сочетаний). Так, например, чтобы определить, какие двузначные числа можно составить из цифр 1, 2, 3 нужно построить комбинаторную таблицу. Пусть цифры, помещенные в главный столбец, будут обозначать число десятков, а цифры в главной строке – число единиц. Пары, получившиеся при пересечении столбцов и строк, – искомые двузначные числа:

ед. / дес.	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Приведем другие примеры, которые целесообразно оформить в виде

таблицы.

Задача 1. «Аня и Толя собираются в загородный лагерь. Брат берет с собой двое брюк и четыре рубашки, сестра - тоже шесть вещей: три блузки и три кофты. Аня говорит, что из своих вещей она может составить больше костюмов. Права ли Аня?»

Чтобы узнать, сколько костюмов составит Толя, начертим таблицу:

Р. / Б.	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24

Итого: 8 костюмов.

Составим таблицу, чтобы посчитать количество костюмов у Ани:

К. / Ю.	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Итого: 9 костюмов.

Ответ: Аня была права.

Задача 2. «Мама купила сыну 7 воздушных шаров синего и красного цвета. Сколько красных и сколько синих шаров купила мама, если известно, что синих было больше, чем красных?»

Для решения этой задачи составим таблицу всех возможных вариантов.

Всего	7	7	7	7	7	7
Красн.	6	5	4	3	2	1
Синие	1	2	3	4	5	6

Теперь выберем те, которые удовлетворяют условию задачи (зачеркнуть ненужные варианты).

При решении этой задачи можно сразу обратить внимание детей на дополнительное условие, и тогда таблица будет иметь вид:

Всего	7	7	7
Красн.	3	2	1
Синие	4	5	6

Задача 3. «У девочки есть бумага зеленого, желтого и красного цвета. Из нее для уроков труда она вырезает круги, квадраты и треугольники, делая их большими и маленькими. Сколько различных вариантов у нее получится?»

Форма	○		□		△	
Размер Цвет	Б.	М.	Б.	М.	Б.	М.
Зеленый	Б.З.	М.З.	Б.З.	М.З.	Б.З.	М.З.
Желтый	Б.Ж.	М.Ж.	Б.Ж.	М.Ж.	Б.Ж.	М.Ж.
Красный	Б.К.	М.К.	Б.К.	М.К.	Б.К.	М.К.

Работая с таблицами, можно предложить детям и такое задание:

«Рассмотрите таблицу. Найди правило. Заполни таблицу до конца. На какие группы можно разбить получившиеся числа?»

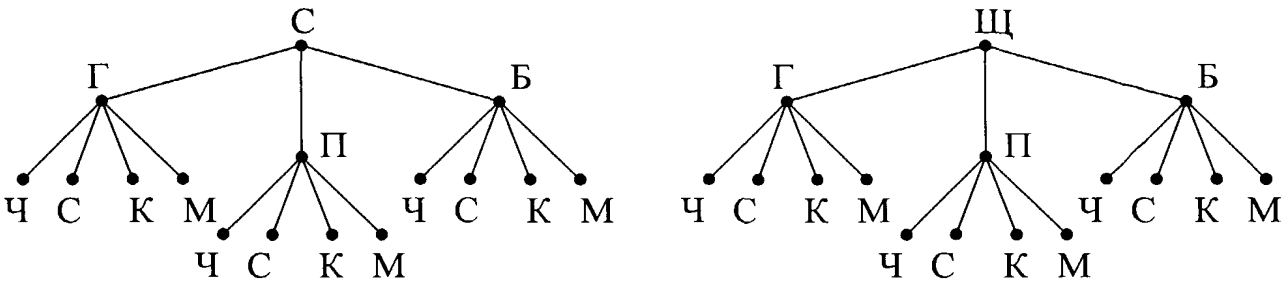
ед. / дес.	7	5	6	0
7				
5		55		
6		65		60
0				

Дерево решений (схема-дерево, граф-дерево, дерево вариантов, дерево возможностей).

В случае, когда число возможных выборов на каждом шагу зависит от того, какие элементы были выбраны ранее, удобнее изобразить процесс комбинаций в виде «дерева».

Последовательность построения «дерева» решений следующая: сначала из одной точки проводят столько отрезков, сколько различных выборов можно сделать на первом шагу. Из конца каждого отрезка проводят столько отрезков, сколько можно сделать выборов на втором шагу, если в первый раз был выбран данный элемент, и так далее. Проиллюстрируем это на примере.

«В школьном буфете на обед было приготовлено два первых блюда: суп и щи; три вторых блюда – голубцы, плов и блины; и четыре третьих – чай, сок, компот, молоко. Составь все возможные варианты обеда».



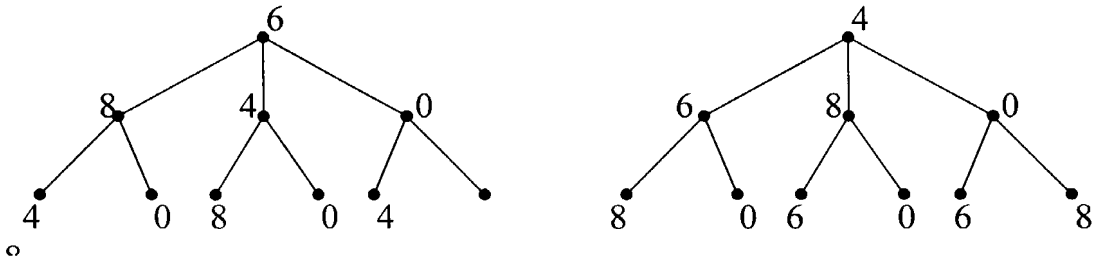
Пересчитав ветви наших деревьев, получаем ответ, что всего можно составить 24 варианта обеда.

Рассмотрим еще одну задачу. «Из цифр 8, 6, 4, 0 составьте все возможные трехзначные числа, если каждое число меньше, чем 800, в записи которых нет одинаковых цифр». Решение такой задачи возможно только с помощью «дерева» решений.

В силу того, что все искомые числа должны быть меньше 800, первая цифра в записи чисел должна быть 6 или 4. Ставим две точки.

Затем делаем выбор второй цифры: их три.

А вот для третьей цифры только два выбора:



Полученное «граф-дерево» помогает проводить перебор в определенной системе и не упускать какие-либо возможности. Теперь легко назвать все трехзначные числа, составленные из цифр 8, 6, 4, 0 так, что каждое из них меньше 800 и цифры в записи чисел не повторяются: 684, 680, 648, 640, 604, 608, 468, 460, 486, 480, 486, 406, 408.

Третьим средством организации перебора, с которым знакомятся ученики начальных классов, – графы. В математике считается, что граф выражает отношение между множествами или элементами множеств.

Граф – множество точек и множество отрезков (на плоскости), их соединяющих, причем каждая пара точек оказывается либо не соединенной вообще, либо соединенной одной линией. В полном графе точки (вершины)

соединяются отрезками (ребрами) попарно. Ориентированный граф представляет пары точек, упорядоченные отрезками с указанием направления.

Задача. «После летних каникул встретились семеро друзей: Саша, Артем, Тимур, Влад, Кирилл, Юра. Сколько было рукопожатий, если каждый здороваясь пожал друг другу руку?»

Решение такой задачи с помощью таблицы займет слишком много времени. Поэтому попробуем воспользоваться другим способом решения. Обозначим каждого из друзей точками, не лежащими на одной прямой (рис.1).

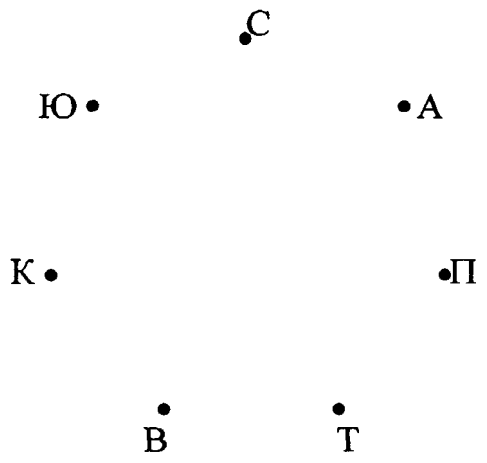


Рис.1

Пусть первым пожал руки друзьям Юра (рис. 2).

По аналогии составим все недостающие рукопожатия. Проведенные линии помогают увидеть, с кем человек здоровался, а с кем нет. Когда буде закончен весь разбор задачи, получается схема (рис. 3).

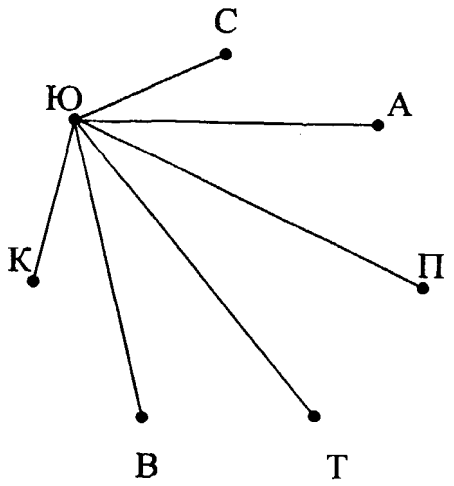


Рис.2.

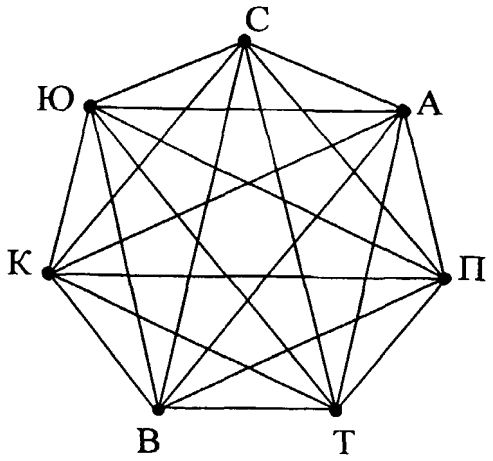


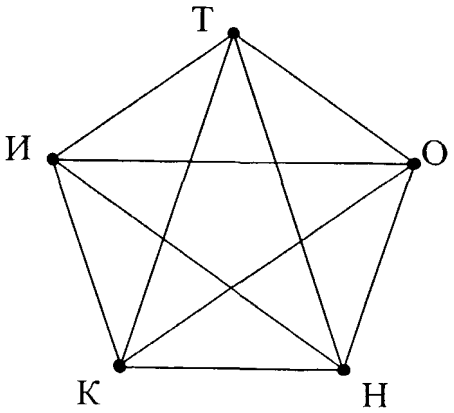
Рис.3

Пересчитав все линии, можно ответить на вопрос задачи: сколько рукопожатий было сделано.

Решение комбинаторной задачи с помощью графа интересно еще тем, что ученик, выполняя построения, замечает закономерность: если Юра (мальчик, относительно которого мы начали рассуждения) сделал 6 рукопожатий, то Саша уже 5, Артем – 4, Павел – 3, Тимур – 2, Кирилл – 1, а с Владом уже поздоровался каждый из друзей, и точка В на схеме соединена с каждой из точек: Ю, С, А, П, Т, К.

Полученный вывод можно предложить проверить детям на такой задаче: «Таня, Оля, Наташа, Ксения и Ирина, вернувшись с дачи, обменялись телефонными звонками. Сколько звонков было сделано?»

При решении этой задачи ученики могут воспользоваться выводом из



предыдущей задачи, т.е. Таня сделала 4 звонка (всем своим подругам); Оля – 3, так как с Таней она уже разговаривала; Наташа – 2 (позвонила Ксюше и Ирине), Ксения – 1, а Ирина ни одного, так как с каждой из подружек она уже поговорила. Но уметь увидеть такую закономерность сразу нелегко. Это возможно только при осознанном вычеркивании графов при решении задач.

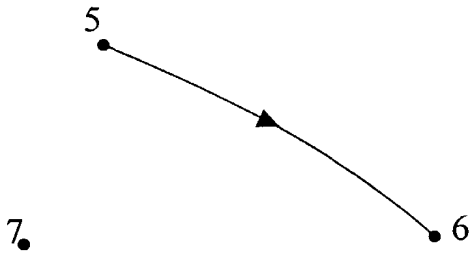
Поэтому нужно предложить детям проверить правильность ответа построением графа.

Ответ: 10 звонков.

В процессе решения комбинаторных задач полезно познакомить учащихся с изображением ориентированного графа. Рассмотрим задачу.

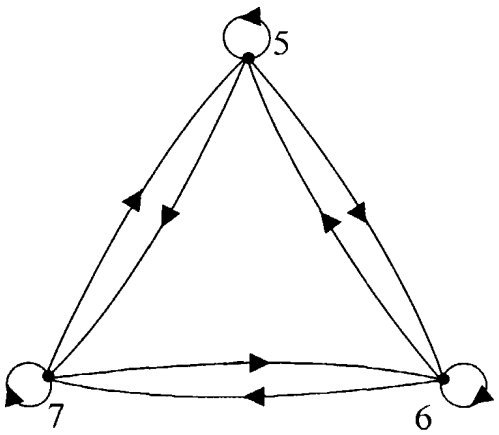
«Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7?»

Чтобы показать какое число образуется из двух цифр (десятков и единиц) используется стрелка. На листе бумаги ставим три точки, обозначающие цифры 5, 6, 7. Для того, чтобы показать образование числа 56, нужно провести дугу от точки 5 к точке 6 с указанием направления



Стрелка показывает, что запись числа начинается с цифры 5: 56, 57. Аналогично изображаем числа 65, 67, 76, 75.

Двузначные числа, в записи которых используется одна цифра, на графе изображаются «петлей».



Так изображаются все варианты записи двузначных чисел, и пересчет получившихся стрелок графов дает ответ на вопрос задачи (таких чисел всего 9).

В дальнейшем при работе с графами можно использовать такие методические приемы:

- проверь правильность построения графа;
- дополни граф;
- выбери граф для задачи;
- построй граф;
- придумай условие задачи по заданному графу и т.д.

Поэтапное обучение младших школьников графическому моделированию при решении комбинаторных задач, оказывает положительное влияние на умение использовать учениками начальной школы схематического рисунка, а в последствии и графических схем при решении любой текстовой задачи.

Решение комбинаторных задач способом перебора способствует освоению учащимися основ математического моделирования. Так с первых задач перед детьми встает проблема изображения составляемых комбинаций. Сначала это предметные рисунки, затем условно-символические обозначения. В дальнейшем ученики будут пользоваться схематическими моделями: таблицами, графами.

Обучение решению комбинаторных задач способом перебора позволяет также расширить представление младших школьников о процессе нахождения результата в задачах. Учащиеся убеждаются в том, что, для того, чтобы решить задачу, не обязательно всегда нужно выполнять какие-либо арифметические действия, как они делают почти всегда, решая задачу из учебника математики.

Овладев способом перебора, ученики начальной школы могут использовать его и при решении некомбинаторных задач, которые раньше им

были просто недоступны. Например: «В коробке было 17 шоколадных конфет с белой и черной начинками. С белой начинкой конфет было на 5 меньше, чем с черной. Сколько конфет с черной начинкой было?». Решить эту задачу можно несколькими способами:

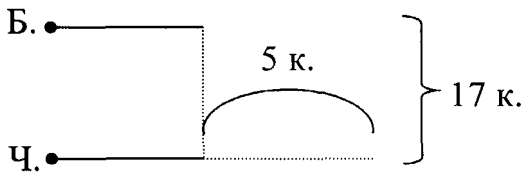
А) алгебраический: $(x - 5) + x = 17$

$2x = 22$

$x = 11$

Ответ: 11 конфет с черной начинкой.

Б) арифметический способ



17 + 5 = 22

22 : 2 = 11 (к.)

Ответ: 11 конфет.

Но алгебраический способ не применим, т.к. уравнения такой структуры в начальной школе не рассматриваются. Арифметический способ доступен не каждому ученику начальной школы: он труден для понимания. А с помощью перебора эту задачу может решить даже ученик первого класса. При этом он рассуждает так: «Если конфет с белой начинкой было на 5 меньше, то с черной не должно быть меньше 6. Поэтому начинаем пробовать с числа 6.

$$(6 - 5) + 6 = 7$$

$$(7 - 5) + 7 = 9$$

$$(8 - 5) + 8 = 11$$

$$(9 - 5) + 9 = 13$$

$$(10 - 5) + 10 = 15$$

$$(11 - 5) + 11 = 17$$

Последний вариант подходит, значит конфет с черной начинкой – 11».

Возможен и перебор с помощью таблиц. Мы уже определили, что черных конфет не может быть меньше 6, поэтому наша таблица будет иметь вид

Ч.	6	7	8	9	10	11
Б.	11	10	9	8	7	6

Помня, что всего конфет 17, заполним таблицу. А теперь выберем вариант, отвечающий условию задачи «… конфет с белой начинкой на 5 меньше, чем с черной…». Значит, конфет с черной начинкой было 11.

Конечное и небольшое число элементов в комбинаторной задаче с использованием способа перебора дает возможность организовать элементарную исследовательскую деятельность, в результате которой младшие школьники экспериментируют, наблюдают, сопоставляют полученные факты. Например, при решении задачи вида: «Оля и Ксюша зашли в кафе. На витрине были пирожные по цене 7 руб., 11 руб., 9 руб. и 6 руб. и мороженое по цене 8 руб., 4 руб., 6 руб. и 5 руб. Девочки купили по пирожному и мороженому и заплатили одинаковое количество денег. Когда это возможно?» Первый случай называется сразу же: «Девочки сделали одинаковый выбор и поэтому заплатили равную сумму денег». Анализируя задачу дальше, приходят к следующему выводу, что можно купить:

1) одинаковое пирожное и разное мороженое;
2) одинаковое мороженое и разное пирожное;
3) разное пирожное и разное мороженое.

Чтобы отыскать верное решение (а возможно и не одно), ученики делают перебор всех возможных вариантов и отыскивают те, при которых было заплачено одинаковое количество денег.

7 + 8 = 15	7 + 4 = 11	7 + 6 = 13	7 + 5 = 12
11 + 8 = 19	11 + 4 = 15	11 + 6 = 17	11 + 5 = 16
9 + 8 = 19	9 + 4 = 13	9 + 6 = 15	9 + 5 = 14
6 + 8 = 19	6 + 4 = 10	6 + 6 = 12	6 + 5 = 11

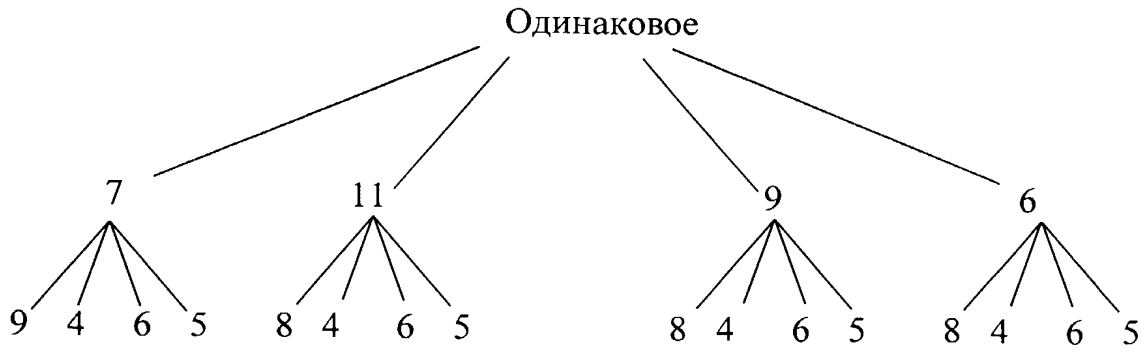
Средствами отыскания всех случаев перебора могут служить таблицы и графы (схемы).

П.	7	11	9	6
М.	8	8	8	8
	15	19	17	14

П.	7	11	9	6
М.	4	4	4	4
	11	15	13	10

П.	7	11	9	6
М.	6	6	6	6
	13	17	15	12

П.	7	11	9	6
М.	5	5	5	5
	12	16	14	11



Отвечая на вопрос задачи, учащиеся выделяют все варианты,

удовлетворяющие условию задачи.

Перебор всех возможных вариантов позволяет выявить, что есть наборы, состоящие и из разных сочетаний мороженого и пирожного, из одинакового пирожного и разного мороженого, и из одинакового мороженого и разного пирожного, но имеющих одинаковую стоимость.

Далее исследуется проблема, а всегда ли найдутся наборы из разных вещей, но одинаковых по стоимости. Изменив в задаче числовые данные и составив все варианты с измененными ценами, учащиеся убеждаются, что может оказаться и так, что за все разные наборы можно заплатить разную стоимость.

Особенности решения комбинаторных задач позволяют внести элементы творчества в деятельность учеников начальной школы: творчество существует везде, где человек воображает, комбинирует, изменяет и создает что-либо новое, какой бы крупицей ни казалось это новое по сравнению с созданием гениев.

Проиллюстрируем сказанное на примере следующей задачи: «От стены, выложенной кафелем, отлетела часть плиток. Как можно заделать брешь, если мы имеем плиточки квадратной формы? (Плитку можно делить.) Сколько целых, а сколько половинок плиток понадобится?» Итак, мы имеем плитку такой формы:   . Используя данные шаблоны каждый ученик придумывает свой собственный вариант.

Чтобы расширить возможности проявления детьми творчества, можно предложить плитку двух цветов. Они сами подбирают цвета, наиболее сочетаемые друг с другом.

Комбинаторные задачи, составленные на жизненном материале, помогают младшим школьникам лучше ориентироваться в окружающем мире, учат рассматривать все имеющиеся возможности и делать оптимальный

в данной ситуации выбор.

Например, учащимся предлагается следующая проблема: «У тебя 60 рублей. Родители отпустили тебя в парк покататься на каруселях.

Вход в парк – 5 руб.

«Колесо обозрения» – 10 руб.

«Сюрприз» – 35 руб.

«Американские горки» – 45 руб.

«Комната смеха» – 25 руб.

Какой выбор ты сделаешь, если ни один из аттракционов нельзя посетить дважды».

Сначала просчитываем все варианты с учетом того, что сумма слагаемых должна быть меньше шестидесяти.

$5 + 10 + 15 + 25 = 55$

$5 + 15 + 35 = 55$

$5 + 45 = 50$

$5 + 35 = 40$

$5 + 25 = 30$

$5 + 15 = 20$

$5 + 10 = 15$

А затем ученик делает свой выбор.

В силу того, что эта задача носит часто встречающийся практический характер, нет необходимости просчитывать варианты с суммой больше 60.

Комбинаторные задачи способствуют также возникновению и поддержанию у младших школьников желания изучать математику.

С одной стороны, за счет занимательности, яркости, необычности, близости к практическим жизненным ситуациям эти задачи вызывают у детей положительные эмоции: интерес, волнение, радость, удивление, ситуацию

успеха. Все это облегчает для ребенка волевое усилие, необходимое для решения стоящей перед ними задачи, стимулирует его деятельность.

С другой стороны, появляется возможность разнообразить задания, формирующие вычислительные навыки младших школьников.

Тем самым вычислительная деятельность для учащихся становится более привлекательной и интересной, более того, ученик сам составляет, придумывает задания. Таким образом, решение комбинаторных задач не только положительно влияет на формирование приемов умственных действий у младших школьников, но и позволяет также:

1) расширить их представление о задаче, познакомить с новым способом решения, дает возможность действовать в процессе нахождения результата в соответствии со своими индивидуальными особенностями;

2) готовить детей к решению жизненных практических проблем, учить принимать оптимальное в данной ситуации решение;

3) организовать элементарную исследовательскую и творческую деятельность учащихся и сделать процесс обучения математике интересным и непрерывным.

Таким образом, мы убедились, что комбинаторные задачи являются средством:

1. Реализации методической концепции, выражающей необходимость целенаправленного и систематического формирования приемов умственной деятельности в процессе усвоения программного содержания;

2. Овладения способом моделирования на доступном для младших школьников уровне;

3. Усвоения программного материала, органически вписываясь в логику построения содержания курса математики четырехлетней начальной школы;

4. Расширения у учащихся представлений о различных видах

математических задач и способах их решения (хаотичный перебор, системный перебор, таблицы, графы);

5. Реализации нового методического подхода к обучению младших школьников решению текстовых задач. На подготовительном этапе к знакомству с задачей они способствуют формированию у учащихся приемов умственной деятельности, навыков чтения, развитию речи, умению переводить вербальную модель в предметную. На основном этапе – формируют умения интерпретировать вербальную модель ситуации в виде таблиц и графов;

6. Обеспечивающим вариативность учебных заданий, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают программное содержание;

7. Развития таких свойств мышления как гибкость, вариативность.

3.2. Взаимосвязь комбинаторных задач с программным содержанием начального курса математики

Тематическое строение развивающего курса математики создает условия для включения комбинаторных задач в процесс усвоения содержания основных вопросов программы. Тем самым обеспечивается вариативность учебных заданий, нацеленных на усвоение знаний, умений, навыков и на формирование приемов умственной деятельности.

При этом курс не перегружается информацией, так как для решения комбинаторных задач не требуется введение новых понятий и терминов.

Покажем возможность взаимосвязи комбинаторных задач с содержанием начального курса математики, выделив основные вопросы для каждого класса.

1 класс

1. Признаки предметов
2. Сложение. Состав числа.
3. Двухзначные числа.

2 класс

1. Понятие текстовой задачи. Структура задачи.
2. Умножение.
3. Трехзначные числа.

3 класс

1. Текстовые задачи на четыре арифметических действия.
2. Порядок выполнения действий.
3. Четырехзначные, пятизначные и шестизначные числа.

4 класс.

1. Текстовые задачи.
2. Многозначные числа.

Данный курс начинается с уточнения представлений детей о

признаках (свойствах) предметов. Это позволяет использовать опыт младших школьников и имеющиеся у них математические представления для организации целенаправленного наблюдения, которое включает в себя такие мыслительные операции, как анализ и синтез, сравнение, классификация, обобщение.

При организации деятельности учащихся в соответствии с концепцией курса нельзя не учитывать, что и жизненный опыт, и запас математических представлений, и развитие речи, и готовность к школе каждого ребенка различны. Но несмотря на эти различия необходимо создать на уроке комфортные условия для активного включения в работу всех детей, помочь им адаптироваться к школьной обстановке, научиться общаться друг с другом и с учителем.

Для этой цели в учебник включены задания, формулировка которых предполагает различные способы их выполнения, что и позволяет учесть различия в степени подготовленности детей. Специфика описываемых заданий заключается в общей формулировке вопросов: «Чем похожи?», Чем отличаются?», «Что изменилось?», «Что не изменилось?», «Что одинаково?», «Что неодинаково?».

Данные формулировки заданий позволяют учесть и тот факт, что учитель пока еще пока ничему не научил своих учеников. Здесь каждому ребенку предоставляется возможность «увидеть» то, что он способен увидеть на данном этапе, дополнить ответ другого, обсудить – верен ли ответ.

Целенаправленная работа по формированию приемов умственных действий на первых уроках учитывает как различный опыт ребенка, так и различный уровень его математической подготовки. В результате этой работы у первоклассников формируются представления о признаках предметов, об их изменении, о расположении в пространстве, об их количестве, которые тесно связаны с операцией счета. На этих же уроках

ребенок адаптируется к школьной обстановке, овладевает общеучебными умениями: работать с учебником, слушать учителя и других учеников, принимать участие в обсуждении, работать в тетради и т.д.

Комбинаторные задания органически включаются в общую систему заданий, предлагаемых в учебнике по теме « Признаки предметов» и в то же время имеют свою специфику. Она заключается в том, что, выполняя задания учебника, учащиеся анализируют и сравнивают уже данные совокупности, а при выполнении комбинаторных заданий они сами образуют различные совокупности предметов, отличающиеся друг от друга теми или иными признаками. Причем другие совокупности получаются в результате преобразования данной.

Приведем в качестве примера такое задание: «Весной первоклассникам было поручено посадить 3 дерева: клен, ель и рябину на пришкольном участке. В каком порядке ребята могут посадить эти деревья?»

Деятельность учащихся при выполнении данного задания можно организовать по-разному, используя различные методические приемы:

а) Задание можно выполнить фронтально на доске, заготовив для этого заранее три комплекта карточек с данными предметами (деревья: клен, ель и рябину).

Сначала предметы выставляются в той последовательности, как они предложены в задании. Затем обговариваются возможные изменения. Предложения детей обсуждаются.

Обычно они предлагают два варианта переставить: (поменять местами) клен и ель или ель и рябину. Оба эти варианта выставляются на доске, и выясняется, изменился ли порядок.

К Е Р

Е К Р

К Р Е

Комментируя результаты сравнения, дети пользуются порядковыми числительными («клен был на первом месте, а теперь на втором», «а в третьем случае поменялись местами ель и рябина»).

Находятся ученики, которые замечают, что «клен можно поставить на первое место два раза» (другими словами , они самостоятельно приходят к системному перебору).

Обычно такие предложения не проходят бесследно для других детей. И они делают попытку (аналогию) повторить этот же прием для другого предмета (например, для ели или для рябины). В результате сравнения ученики убеждаются в том, что попытка удалась, и берут ее на вооружение. Отсюда можно сделать вывод, что выполнение комбинаторного задания на перестановки вполне доступно учащимся и они могут справиться самостоятельно.

б) Возможно использовать и групповую форму работы: парами, четверками, группой из шести человек. При организации работы парами каждому ученику предлагается комплект, состоящий из трех предметов. Учитель дает задание каждой паре: «Расположите предметы в разном порядке». Дети успешно справляются с этим заданием, сравнивая самостоятельно две совокупности. После этого учитель предлагает выписать все варианты на доску для фронтального обсуждения.

в) Наконец, третий вариант связан с самостоятельной индивидуальной работой. В этом случае каждому ученику дается карточка, на которой деревья обозначены буквами К, Е, Р, и каждый ученик работает в меру своих возможностей в течение времени, которое отводит учитель. Все возможные варианты перестановки опять же выясняются в процессе обсуждения.

Отметим, что, организуя процесс выполнения комбинаторных заданий, учитель вполне может обойтись без показа образца, создав тем самым детям условия для самостоятельного поиска.

Образец в данном случае заменяется более доступным для детей заданием, которое подготавливает их к выполнению более сложного.

Рассмотрим в качестве примера такие задания:

а) На полке стояли три чайные чашки. Маме нужно взять две. Одну она взяла. Какую вторую чашку мама может выбрать? (Словесная формулировка задания сопровождается рисунком или реальными предметами).

б). Среди трех чашек у мамы есть две любимые. Какие это могут быть чашки?

Выполнение первого задания лучше обыграть (прием драматизации). Девочка у доски выполняет роль мамы. На столе у учителя три чашки. Проигрывая описанную в задаче ситуацию, она берет со стола красную чашку, а затем одну из двух -голубую или зеленую. Взяв голубую, она имеет комбинацию из двух чашек, красной и голубой. Затем, поставив голубую на стол, составляет комбинацию из красной и зеленой. Таким образом, чтобы выбрать вторую чашку, у мамы есть два возможных варианта.

Второе задание это - фактически комбинаторная задача на сочетание:

$$C_3^2 = \frac{A_3^2}{P_2}$$

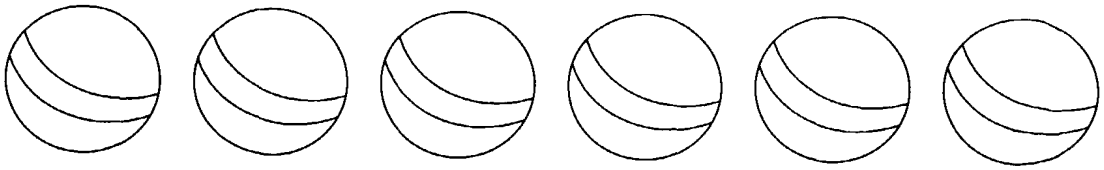
Полезно обсудить с детьми, чем отличаются друг от друга данные задания. Проигрывание первого задания позволяет детям легко ответить на этот вопрос (в первом мама уже взяла одну чашку, а во втором надо выбрать самим две чашечки из трех). Поэтому число вариантов выбора увеличилось.

Как видим, выполнение комбинаторных заданий органически вписывается в подготовительный этап знакомства детей с текстовой задачей, формируя у них умения представлять ситуацию, заданную вербально, и переводить словесную модель в предметно-действенную.

После выполнения этих заданий полезно предложить задание аналогичное перестановке деревьев, а именно «Маме нужно расставить три чашки на полке в разном порядке. Как она может это сделать?»

Приведем задания, которые выполняли учащиеся экспериментальных классов при изучении темы «Признаки предметов».

1. Красками трех цветов: голубой, желтой и красной раскрась мячики так, чтобы они отличались друг от друга.



2. У Тани на полке стояли три игрушки: кукла Барби, Мишка и Тигренок. Выбери для девочки две любимые.

3. Сережа поставил на полку 3 книги; русские, узбекские и белорусские сказки. В каком порядке он мог их поставить?

Основная цель темы «Сложение» – разъяснить смысл действия сложения и познакомить младших школьников с той терминологией, которая употребляется в математике при сложении (выражение, сумма, слагаемые, значение суммы, равенство). Основа этого разъяснения – взаимосвязь сложения натуральных чисел с операцией объединения попарно непересекающихся конечных множеств, которая легко интерпретируется на действиях с предметами. Идея же перевода различных действий с предметами на язык математики является наиболее плодотворной для усвоения детьми смысла арифметических действий.

Рассмотрим задания, которые были включены в процесс изучения этой темы: «У Коли среди игрушек 5 грузовых и 4 легковые машины. Для игры ему нужно взять одну. Сколько вариантов выбора одной машины есть у Коли?» Выбрать одну грузовую машину мальчик может пятью способами, а легковую – четырьмя. Значит, выбрать либо грузовую, либо легковую машину можно 4+5=9 способами.

Выполнению таких заданий предшествует подготовительная работа по выбору одного предмета из определенной совокупности.

1. «У Даши на книжной полке стоят сборники стихов ее любимых

поэтов А. Барто, А. Пушкина, С. Маршака, К. Чуковского, И. Благининой. Сколько вариантов выбора одной книги есть у Даши?».

Процесс выполнения того задания лучше драматизировать, пригласив одну девочку к доске и предложив ей сделать выбор сначала одной, затем другой, третьей и т. д. книг. Таким образом, выполнение таких заданий подводит детей к выводу, что если есть наборы из 5 предметов, то выбрать один можно пятью способами.

2. «Никита на даче выращивал розы. К приезду мамы у него распустились три бутона: белый, розовый и красный. Сколько выборов одного цветка для мамы есть у Никиты?».

Процесс выполнения задания сводится к тому, что мальчик поставлен перед выбором: какую розу лучше подарить маме? Так как к ее приезду расцвели только три, то и выбор он должен сделать из трех цветков. Значит, у него есть три варианта выбора.

3. «У Винни-Пуха в запасе было 5 банок липового и 4 цветочного меда. Три банки он подарил Пятачку. Какой мед он мог отдать?»

Выполнение этого задания сопровождается записью всех возможных вариантов на доске (фронтальная работа). С помощью символической записи (Л – липовый мед, Ц – цветочный мед) названные варианты записываются на доске. После того, как все возможные случаи будут названы, полученные варианты обсуждаются.

Л Л Ц
Л Ц Ц
Л Л Л
Ц Ц Ц

В ходе обсуждения, целесообразно обратить внимание на два последних варианта: почему они возможны?

Также следует обсудить варианты:

1. Л, Л, Ц и Л, Ц, Л
2. Л, Ц, Ц и Ц, Л, Ц,

если они будут названы детьми:

1. две банки липового и одна цветочного (нам не важен порядок).
2. во втором задании аналогичный случай.

Целесообразно предложить ученикам изменить условие задачи так, чтобы Пятачку был подарен мед разного сорта.

Это станет возможным, если количество банок с липовым и цветочным медом у Винни-Пуха будет меньше, чем он подарит Пятачку.

Заметим, что выполнение комбинаторных заданий в теме «Сложение» не связано со структурой задачи. Такие термины, как «условие, вопрос, известные, неизвестные», детям не сообщаются. Так как задания выполняются практически, не ставится такая цель, как овладение ребенком формой записи решения задачи.

Для выполнения комбинаторных заданий обычно использовались индивидуальные карточки, которые заполнялись под руководством учителя.

Например: «В туристическом агентстве есть путевки в Италию, Францию и Египет. Сколько существует способов выбора одной путевки, если в Италию их 3, во Францию 4, а в Египет только одна?»

Чтобы выбрать путевку в Италию, нужно сделать _____выборов,

во Францию _____ выборов,

в Египет _____ выборов.

Чтобы выбрать одну из трех путевок, нужно сделать _____ выборов.

В процессе усвоения школьниками конкретного смысла действия сложения в экспериментальных классах предлагались задачи.

1. От остановок автобуса до дачи ведут три дороги вдоль озера и одна через лес. Сколько вариантов выбора дороги до дачи есть у дедушки с внуком, приехавшими на автобусе?

2. В конкурсе кошек принимали участие 7 сиамских и 2 персидских кошечки. Сколько способов выбора одной кошечки на I место есть у жюри?

3. В отделе «Ткани» 5 расцветок шелка и 3 расцветки сатина. Сколько

способов выбора ткани на платье дочери есть у мамы?

В соответствии с концепцией курса основным способом усвоения состава однозначных чисел является соотношение предметных действий с математической записью. Задания, в процессе выполнения которых ученики усваивают состав каждого однозначного числа, органически дополнялись заданиями комбинаторного характера.

Например:

1. «Бабушка испекла 7 пирожков с капустой и земляникой. Каких пирожков и сколько испекла бабушка?»

Приступая к выполнению задания, важно обратить внимание детей на то, что бабушка испекла и пирожки с капустой, и пирожки с земляникой. Затем первоклассники приступают к составлению возможных вариантов:

7=1+6

7=2+5

7=3+4

7=5+2

7=6+1.

Варианты повторяющихся слагаемых обязательно оговариваются, один пирожок с капустой и шесть пирожков с земляникой – это не то же самое, что один с земляникой и шесть с капустой.

2. «Во время футбольного матча между учениками 1 «А» и 1 «Б» классов было забито пять голов. Сколько голов могла забить каждая команда?» Поиск возможных вариантов в этом задании отличается от предыдущего, так как в нем возможен вариант 5=5+0, то есть ситуация, когда голы забивались только в одни ворота.

При изучении нумерации двухзначных чисел деятельность учащихся направляется на осознание позиционного принципа десятичной системы счисления и на соотношение разрядных единиц. Следует отметить, что комбинаторные задания, связанные с изучением этой темы, включены в

различные учебники для начальных классов, однако у многих детей они вызывают затруднения и поэтому чаще всего классифицируются как задания повышенной трудности. Речь идет о заданиях типа: «Из цифр 5, 3, 7, 9 составь все возможные двузначные числа».

В процессе экспериментальной работы комбинаторные задания были адресованы всем детям. Исходя из этого была продумана система заданий, включенная в тему «Двузначные числа». Пользуясь опытом выполнения комбинаторных заданий с предметами, учащиеся легко справились с заданием: «Из цифр 1, 2, 3 составь различные двузначные числа, записав все возможные варианты».

После этого им было предложено задание: «Из цифр 4, 5, 6, 7 составь различные двузначные числа». В ходе фронтальной проверки, после индивидуально выполненной работы, выясняется, что количество двузначных чисел у всех разное. Тогда полученные варианты выписываются на доске, и дети убеждаются, что их намного больше, чем записал каждый из них. И вот здесь важно показать ученикам, как можно организовать работу, чтобы все нужные варианты были найдены. Это начало систематической работы, целью которой является овладение младшими школьниками методом системного перебора.

Здесь важно акцентировать внимание детей на способе действия, который полезно проговаривать, «рассказывать» о том, как были построены те или иные комбинации и почему именно так.

Помимо заданий, имеющихся в различных учебниках, в содержание эксперимента в данную тему были включены и другие задания.

1. «Из цифр 2, 3, 4, 5 составь двузначные числа, чтобы число десятков было больше числа единиц».

Исходя из условия задачи, понятно, что не нужно записывать все двузначные числа. Варианты чисел должны быть такими, чтобы первая цифра в их записи была «старшей».

2. «Сколько существует двузначных чисел, сумма числа десятков и единиц которых равна 16?»

В задании нужно провести неполный перебор возможных вариантов. Достаточно только выбрать цифры для записи этих чисел (сумма которых дает число 16), а их всего три: 7, 8, 9.

Примером сокращенного перебора может служить и такое задание: «У Пети четыре мягкие игрушки: волк, заяц, крот и енот. Он решил посадить их на одну полку так, чтобы первым был волк, а заяц не сидел рядом с ним». Мы знаем, что вариантов размещения 4, зверей 24, но в силу дополнительных условий мы не будем осуществлять полный перебор, а остановимся на следующем:

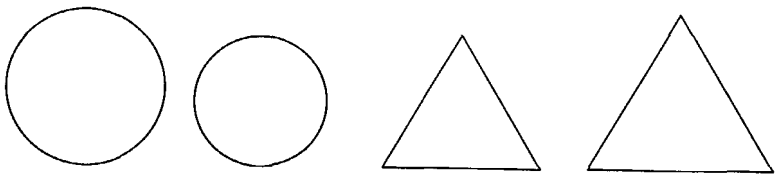
В К Е З

В К З Е

В Е К З

В Е З К

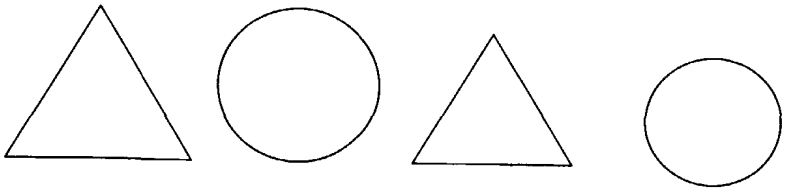
Примером сокращенного перебора может служить и такая задача. «Расположи в тетради четыре геометрические фигуры: так, чтобы на первом месте был треугольник и одинаковые по форме фигуры не стояли рядом».



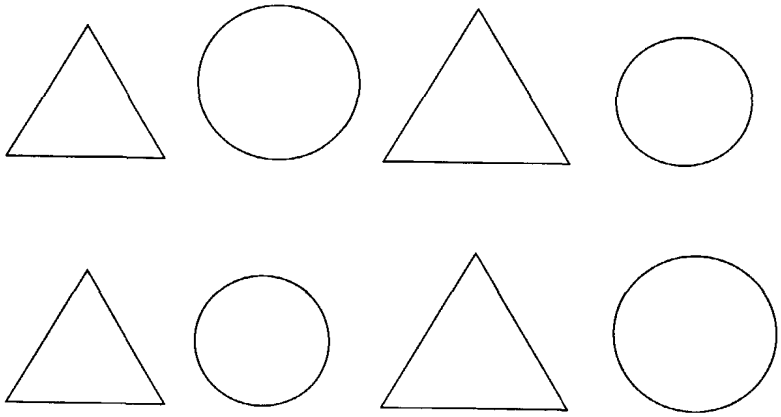
Если ученики не знакомы с сокращенным перебором, то им придется составить 24 возможных варианта, а затем выбрать удовлетворяющие дополнительным требованием. Умение проводить сокращенный перебор позволяет избежать траты времени на составление всех комбинаций. Ученик, умеющий проводить сокращенный перебор, рассуждает так:

«На первом месте может стоять большой треугольник, тогда

меленький может быть только на третьем, при этом большой и маленький круги можно поставить двумя способами – на второе и четвертое»



Аналогично проводятся рассуждения относительно маленького треугольника.



Наряду с сокращенным перебором в эксперименте использовались задания, в которых операция перебора повторяется неоднократно по отношению к разного рода объектам.

Примером таких заданий могут служить следующие задания.

1. «Между числами 8…3…4… расставить знаки «+» и «–», получив тем самым все возможные выражения.»

Для выполнения требования задачи нужно провести полный перебор вариантов:

8 + 3 + 4

8 – 3 – 4

1) Два знака в выражении могут быть одинаковыми;

2) Знаки могут быть разными:

8 –3 + 4; 8 + 3 – 4

После выполнения задания детям можно предложить детям найти значения полученных выражений.

2. Между числами 4…5…7 расставить знаки «+», «–» таким образом, чтобы значения этих выражений имели смысл.

Из предыдущего задания известно, что таких вариантов может быть четыре, но, в силу дополнительного условия, нет необходимости рассматривать варианты 4 – 5 – 7, 4 – 5 + 7, т.к. значение их ученики начальной школы вычислить не могут, поэтому при выполнении таких заданий осуществляется сокращенный перебор.

Таким образом, в программное содержание первого года обучения математике в систему развивающего обучения четырехлетней начальной школы были включены комбинаторные задания с небольшим количеством элементов, число выбора вариантов сознательно ограничивалось, перебор возможных вариантов в основном проводился хаотически. Основными методическими приемами на данном этапе обучения были: метод раскрашивания, манипуляции с предметами и их моделями, драматизация (обыгрывание описанных в заданиях ситуаций), использование символических записей.

Во втором классе, согласно программному содержанию, учащиеся знакомятся с понятием «текстовая задача». В процессе работы у учащихся формируются навыки чтения, представления о смысле арифметических действий сложения и вычитания, основные мыслительные операции - анализ и синтез, сравнение, умение описывать предметные ситуации и переводить их на язык схем и математических символов, умение чертить, складывать и вычитать отрезки, умение переводить текстовые ситуации в предметные и схематические модели.

Овладение данными умениями является необходимым условием

целенаправленной работы над развитием мышления школьников в процессе обучения решению текстовых задач.

При этом существенным является не отработка умения решать определенные типы (виды) текстовых задач, а приобретение опыта в семантическом и математическом анализе различных текстовых конструкций, формирование умения представлять их в виде схематических и символических моделей, усвоение структуры задачи и овладение формами записи ее решения.

Предметом такого же анализа становятся комбинаторные задания. Учащиеся самостоятельно приходят к выводу, что их можно классифицировать как задачу. Это создает условия для знакомства младших школьников с новым способом решения комбинаторных задач и с формой их записи (таблицей).

Таким образом, наряду с арифметическими задачами решаются задачи комбинаторные.

Знакомство с таблицей как формой записи решения комбинаторных задач происходит на примере выполнения таких упражнений: «Определить, кто на какой улице живет».

имена / улица	Таня	Саша	Коля
Вишневая	–	–	+
Лесная	+	–	–
Осенняя	–	+	–

2. Рассмотри таблицу и расскажи, как ее заполняли.

Цвета / форма	К.	С.	З.
○	○	○	○
△	△	△	△

Будь внимателен! Есть разные способы: по строкам и по столбцам. Здесь целесообразно показать ученикам, что, заполняя таблицу, можно двигаться в двух направлениях: во первых, по строкам – тогда получатся сначала все варианты кругов, потом – треугольников; во-вторых по столбцам – в этом случае переберутся варианты цветов: красный (К. и К.), синий (К. и К.) и зеленый (К. и К.).

Использование таблиц в процессе решения комбинаторных задач помогает младшим школьникам в последовательном поиске всех возможных вариантов. Однако число объектов, из которых составляются комбинации, остается небольшим, а количество комбинаций – все возможные.

Например:

3.

ед. / дес.	9	7	3	2	5
9		97			
7	79				
3			33		
2					
5					

- Рассмотрите таблицу и объясните, как получилось число 97? 79? 33? (Надо найти пересечение десятков и единиц: горизонтального и вертикального столбца.)

- Заполните пустые

клеточки таблицы.

- Можно теперь узнать количество двузначных чисел? (Да, надо посчитать заполненные клетки)

4. Запиши в нужные клетки таблицы следующие числа: 57, 75, 44, 74. Какие числа нужно записать в оставшиеся клетки?

ед. / дес.	4	5	7	9
4				
5				
7				
9				

5. Рассмотри таблицу. Заполни пустые клетки. Как ты думаешь, какое задание выполнял ученик, не заполнивший пустые клетки? (Составить все двузначные числа из цифр 6, 8, 9 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись).

	6	8	9
6		97	69
8	86		89
9	96	98	

Составление таблиц в процессе решения задач помогает избежать повторения одной и той же комбинации; составить все возможные комбинации и исключить не удовлетворяющие условию.

Например: 1) «Ты собираешься нарисовать картину, но у тебя только три краски: желтая, красная и синяя. Сколько различных новых цветов ты можешь получить, смешивая эти краски по две?»

Ученики чертят таблицу

цвета / цвета	К.	С.	Ж.
К.		К.С.	К.Ж.
С.	С.К.		С.Ж.
Ж.	Ж.К.	Ж.С.	

В ходе обсуждения выясняется, что, смешивая две красные краски, нельзя получить новую. Аналогично нельзя получить новых красок, если смешивать синюю с синей и желтую с желтой. В таблице эти клеточки зачеркиваются. Дети заполняют пустые клеточки. После выполнения этой работы следует обратить внимание на смеси красной краски с синей и синей краски с красной. Смешивая по две этих краски, мы получим только одну новую. Значит, в таблице убираются (зачеркиваются) варианты смесей, дающих только одну новую. Итак, из трех красок: красной, синей и желтой можно получить только три новых, если смешивать их по две.

Умение составлять таблицы в процессе решения задач и находить возможные варианты с учетом условия задачи помогает ученикам в решении задач с большим числом объектов. Например: 2) «В танцевальном кружке занимаются пять мальчиков: Олег, Вова, Стас, Андрей и Иван и пять девочек: Женя, Маша, Катя, Юля и Даша. Сколько различных танцевальных пар можно составить?»

Все возможные варианты дети записывают в таблицу

девочки / мальчики	Ж.	М.	К.	Ю.	Д.
О.	0.Ж.	0.Ж.	0.К.	0.Ю.	О.Д.
В.	В.Ж.	В.Ж.	В.К.	В.Ю.	В.Д.
С.	С.Ж.	С.М.	С.К.	С.Ю.	С.Д.
А.	А.Ж.	А.М.	А.К.	А.Ю.	А.Д.
И.	И.Ж.	И.М.	И.К.	И.Ю.	И.Д.

Затем по таблице проводится анализ, все ли варианты удовлетворяют условию:

а) нет ли среди получившихся пар повторяющихся;

б) нет ли пар: мальчик – мальчик, девочка – девочка.

Только после этого можно, пересчитав число вариантов, ответить на вопрос задачи.

3). «Для начинки пирогов бабушка приготовила капусту, рыбу, мясо, щавель и землянику. Чтобы пироги были вкусными, она решила смешивать по две начинки. Какие пироги испекла бабушка?»

Решение этой задачи предлагается второклассникам для самостоятельной работы, так как ситуация, описанная в ней, встречается в жизни каждого ребенка и, решая ее, он опирается на свой жизненный опыт.

начинка	К.	Р.	М.	З.	Щ.
К.	X			X	X
Р.	X	X	X	X	X
М.	X	X	X	X	X
З.	X	X	X	X	
Щ.	X	X		X	X

В результате анализа выполнения работы выясняется, что сложных начинок для пирогов у бабушки получилось совсем немного: капуста с рыбой, капуста с мясом и земляника со щавелем. Аргументы такого выбора вариантов следующие:

а) нельзя смешивать одинаковые начинки;

б) нужно убрать (вычеркнуть) повторяющиеся;

в) пироги должны быть вкусными.

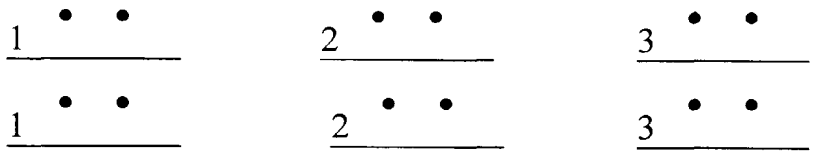
Таким образом, становится очевидным, что в процессе знакомства с текстовыми задачами второклассники решают комбинаторные задачи, связанные с сочетаниями и размещениями. Поэтому необходимо обратить внимание детей на задачи, в которых важен порядок записи элементов в

комбинации (чаще это связано с задачами на составление двузначных, а далее и трехзначных чисел), а в каких нет. При изучении нумерации трехзначных чисел деятельность учащихся направлена на осознание позиционного принципа десятичной системы счисления. Комбинаторные задачи на размещения органически включаются в данный раздел развивающего курса математики начальной школы, так как при составлении таких комбинаций учитывается порядок в записи ее элементов. Например:

«Из цифр 1, 2, 3 составь все возможные трехзначные числа так, чтобы цифры в записи числа не повторялись».

Так как это задача на размещения без повторений, то число возможных вариантов равно 6: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

Составить таблицу для отыскания всех возможных вариантов нельзя, поэтому детям предлагаются карточки для индивидуальной работы,



на которых показано положение первой цифры в записи числа, а места двух следующих свободны. Меняя местами цифры 2 и 3, дети получают все возможные варианты трехзначных чисел.

В теме «Умножение» большое внимание уделяется разъяснению предметного смысла действия умножения, усвоению детьми его определения как сложения одинаковых слагаемых и осознанию ими новой математической записи. Для этой цели в учебнике предложены различные виды упражнений:

а) на выделение признаков сходства и различия данных выражений;

б) на соотнесение рисунка и числового выражения;

в) на запись числового выражения по данному рисунку;

г) на выбор числового выражения, соответствующего рисунку;

д) на замену произведения суммой;

е) на сравнение числовых выражений и т.д..

Изучение нового арифметического действия связано с серией комбинаторных задач, в процессе которых также составляются таблицы. Например: «Среди Таниных вещей есть три платья и два воротника. Сколькими способами можно выбрать платье с воротниками?» Исходя из того, что есть три платья и два воротника, составляется такая таблица

платье / воротники	1	2	3
1	1.1	1.2	1.3
2	2.1	2.2	2.3

Заполнив таблицу и пересчитав полученные варианты, ученики рассуждают: «Было три платья. Значит, одно платье можно выбрать тремя способами. Было два воротника. Один можно выбрать двумя способами. А платье и воротник мы выбрали шестью способами, т.е. у нас получилось шесть возможных вариантов».

Полученный таким образом вывод проверяется на такой задаче: «У Антона трое шорт и три футболки. Сколько костюмов из шорт и футболок он может составить?»

Пользуясь аналогией с предыдущей задачей, ученики отвечают, что 9. Чтобы убедиться в правильности ответа, составляется таблица и подсчитывается число возможных комбинаций.

Ф. / Ш.	1	2	3
1	11	12	12
2	21	22	23
3	31	32	33

Их тоже 9.

Умение проводить системный перебор с помощью таблицы создает

условия для открытия учащимися нового способа решения комбинаторных задач – правило произведения.

В комбинаторике правило произведения формулируется так:

«Если элемент α можно выбрать k способами, а элемент β – m способами, то пару (α,β) можно выбрать $k\,m$ способами.»

Правило произведения (формулировка и название его) не даётся в начальной школе. Весь процесс применения правила строится с опорой на рассуждения учебника, ученик проговаривает свои действия, что позволяет решать комбинаторные задачи там, где применить таблицу невозможно.

Например

4. «Сколько 3-х значных чисел можно составить из трех цифр?»

а) цифры в числе не повторяются?

Ученик рассуждает: «Цифру сотен можно выбрать 3-мя способами

цифру десятков – 2-мя способами

цифру единиц – одним.

Поэтому всего чисел 3 х 2 х 1 = 6»

б) цифры в числе могут повторяться?

Если цифры в записи числа повторяются, то рассуждения ученика строятся таким образом:

Цифру сотен можно выбрать тремя способами,

цифру десятков – тоже тремя,

цифру единиц – тоже тремя.

Значит всего чисел, в записи которых цифры могут повторяться, будет 3 х· 3 х· 3 = 27

Аналогично рассуждает ученик и при решении задач по выбору элементов из большего числа совокупностей (т.е. при построении кортежей большей длины).

Например:

«В магазине продаются елочные украшения: красные, желтые и

зеленые шары; зайчики и белочки; звездочки большие и маленькие. Сколькими способами можно составить наборы из одного шара, зайчика, белочки и любой звездочки?»

Для решения задачи используются карточки для индивидуальной работы.

Шар можно выбрать _____ способ.

зайчика – _____способ.

белочку – _____способ.

звездочку – _____способ.

Заполнив карточку и соотнеся полученные данные, ученик продолжает рассуждать: «Если шар можно выбрать тремя способами, зайчика – одним, белочку – одним, звездочку – двумя, то набор можно составить $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 6$ (способами)»

Таким образом в программное содержание второго года обучения математике в систему развивающего обучения четырехлетней начальной школы были включены комбинаторные задачи на перестановки, размещения и сочетания с небольшим числом элементов. Выбор возможных вариантов проводился методом системного перебора и с использованием правила произведения, которое не давалось в явном виде, а использовалось второклассниками проговариванием своих действий в процессе решения комбинаторной задачи.

Основные вопросы третьего и четвертого года обучения математике в начальных классах – нумерация многозначных чисел и текстовые задачи на четыре арифметических действия.

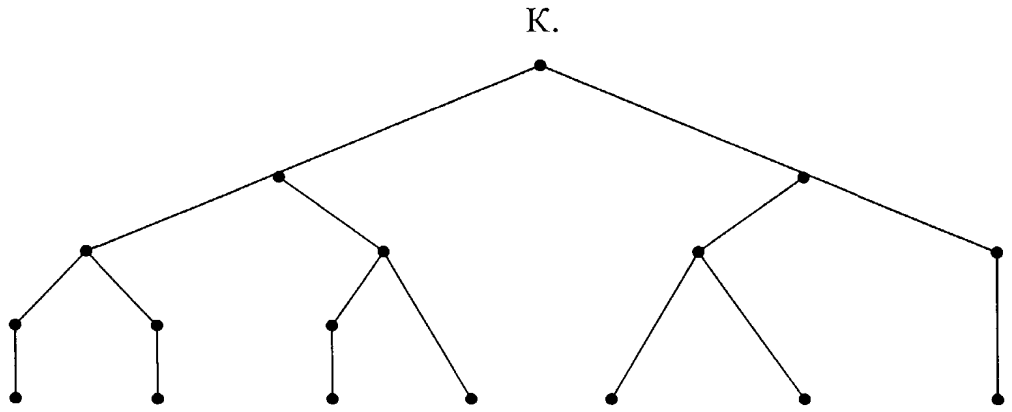
Нумерация многозначных чисел в курсе третьего класса представлена темами «Четырехзначные числа» и «Пятизначные числа». Основными способами усвоения десятичной позиционной системы счисления являются: анализ многозначных чисел с точки зрения их разрядного состава, выявление признаков сходства и различия в конкретных числах, построение

рядов чисел в соответствии с определенными правилами.

Комбинаторные задачи, органически включенные в содержание данного раздела, помогают в реализации основных задач на данном этапе обучения младших школьников. Умение проводить системный перебор с помощью таблиц и правила произведения находит применение и при решении задач в 3-4 классах. Наряду с этим ученики знакомятся с новыми способами проведения системного перебора – «граф-дерево» («деревом решений», «деревом возможных вариантов») и линейными графом.

Знакомство с «деревом» решений происходит на примере решения следующей задачи.

«Посчитать, сколько возможных вариантов спуститься с крыши есть у Карлсона?»



Рассматривая все возможные варианты, ученики самостоятельно приходят к выводу, что достаточно посчитать «конечные» точки. Их число совпадает с количеством возможных спусков Карлсона с крыши.

На примере задачи: 1. «Из цифр 1, 2, 3, 4 составь все возможные

а) двузначные числа

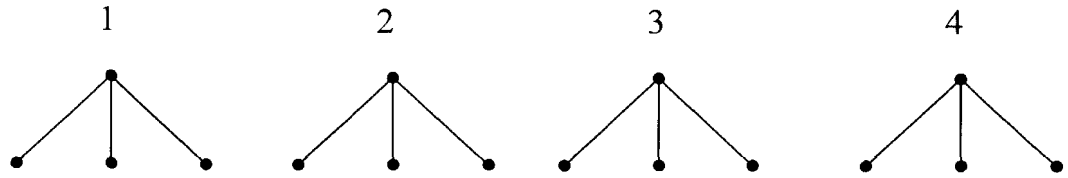
б) трехзначные числа

в) четырехзначные числа

(цифры в записи числа не повторяются)» рассматривается, как граф – «дерево» помогает ее решить. Во втором классе, знакомясь с трехзначными

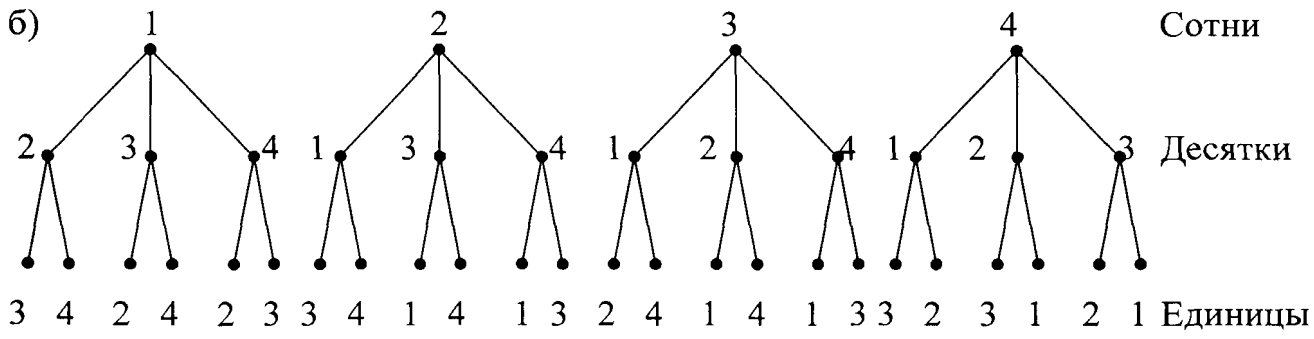
числами, ученики убедились, что применение таблицы невозможно. Таким образом, нужен новый способ решения таких задач.

а) Обозначим точками цифры, обозначающие число десятков.



В каждом числе место единиц может занять каждая из трех оставшихся цифр. Проведем три веточки и допишем цифры.

Работу по выполнению второй и третьей части задания ученики по аналогии выполняют самостоятельно. После того как работа будет выполнена, все полученные варианты изображаются на доске.

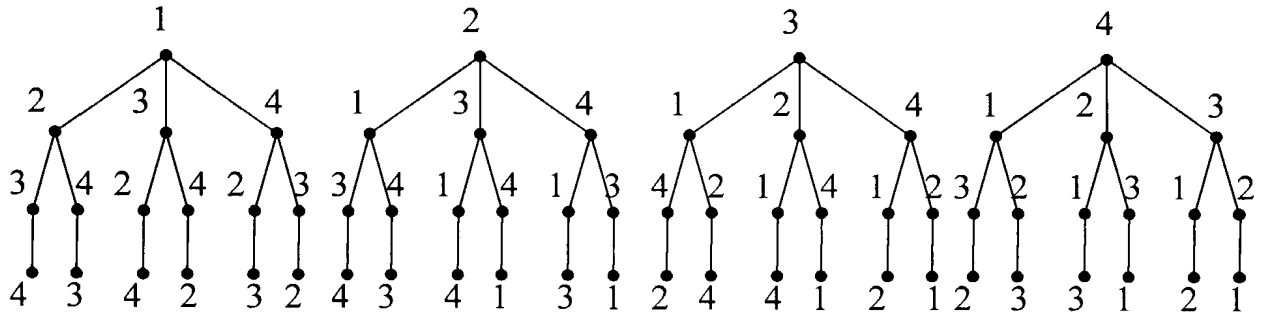


Ученики комментируют свои действия. «Составляя трехзначные числа, выбираем цифры для сотен: их четыре 1, 2, 3, 4. Теперь для каждой сотни выбираем цифры для обозначения десятков: 1 (2, 3, 4); 2 (1, 3, 4); 3 (1, 2, 4); 4 (1, 2, 3). Рисуем по три «веточки» в каждом случае. Осталось выбрать цифры для обозначения единиц. Их осталось по две для каждого из чисел. (Проводим от каждой из цифр, обозначающих десятки, по две «веточки»).»

Если школьники будут внимательными, то увидят, что до появления последних «веточек» наши «деревья» были одинаковыми. На это следует

обратить внимание, т.к. умение увидеть закономерность поможет ученикам в дальнейшем избежать ошибочных вариантов, проконтролировать себя в процессе решения задачи и использовать ранее полученные знания при решении более сложных задач.

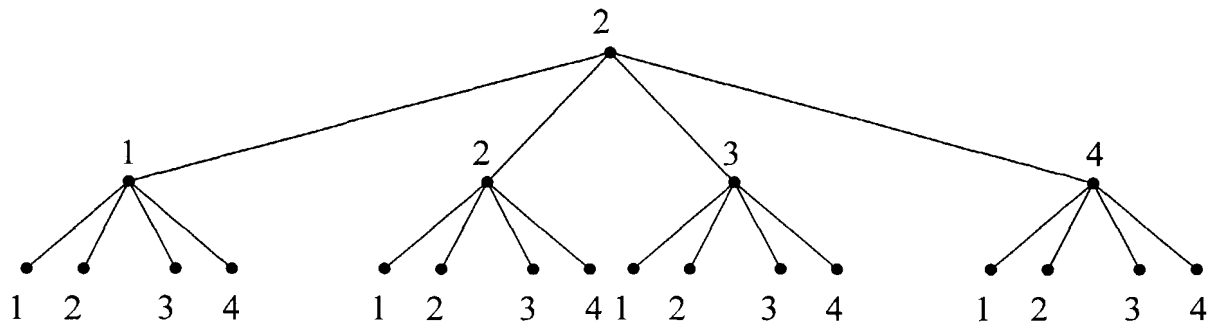
в) Для выяснения количества четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4 «дерево решений» выглядит так:



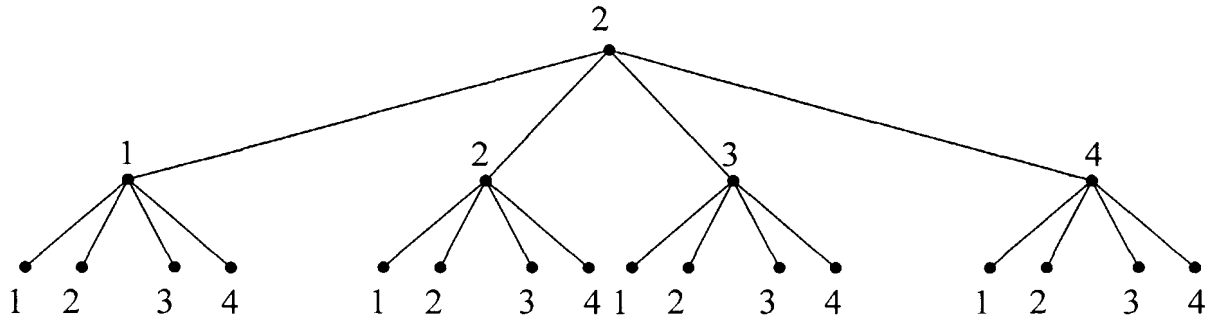
Осталось только выписать все полученные числа: а) двузначные, б) трехзначные, в) четырехзначные.

После того, как будет решена эта задача, целесообразно рассмотреть такие. «Из цифр 1, 2, 3, 4 составь все возможные трехзначные числа, цифры в записи которых могут повторяться». Построй дерево решений и сравни его с задачей 1 б.

Выполнение этой задачи проводится фронтально. Все варианты расположения цифр на «дереве» решений выписываются на доске. Каждый новый вариант обсуждается, так как эта задача на размещения с повторениями, то число возможных вариантов $\overline{A_4^3} = 4^3 = 64$. Составляя первое дерево, получаем 16 чисел.



Затем приступаем к составлению второго.



Чисел тоже 16.

Перед тем как приступить к построению третьего «дерева», в классе обсуждается вопрос, почему чисел и в первом и во втором случае получилось 16. Среди ребят обязательно найдется ученик, который предположит, что и при построении третьего и четвертого «деревьев» чисел будет по 16. Работая индивидуально, дети проверяют выдвинутую гипотезу. Убедившись в правоте выдвинутого предположения, ребята сравнивают количество чисел, полученных в задаче 1 б и в той, что они только что решили: «Почему, составляя трехзначные числа из четырех цифр 1,2,3,4 и в первой задаче и во второй мы получили разное их количество?» Ответить на вопрос ученикам будет несложно: «В первой задаче цифры в записи чисел не повторялись, а во второй – повторялись». Учителю же нужно обращать внимание на этот факт, чтобы школьники сосредоточенно читали условие задачи, тогда в решении ее не будет ошибок.

Использование «дерева» решений поможет ученикам и в решении

таких задач.

3. «Сколько букетов можно составить, если брать по одному цветку из каждой вазы?

I ваза – шафран, пион

II ваза – лилия, нарцисс, тюльпан

III ваза – гвоздика, фиалка, незабудка?».

4. «Сколько различных комплектов обедов из трех блюд можно составить, если в меню есть на первое – борщ и суп, на второе – пельмени, манты, чебуреки, на третье – компот, чай, молоко, сок?»

На примере данной задачи целесообразно рассмотреть два способа ее решения: с помощью «графа-дерева» и правила произведения. Эта работа проводится самостоятельно с проговариванием каждого шага действия. Ученикам заготовлены индивидуальные карточки для построения «графа-дерева» и проведения системного перебора с использованием правила произведения.

Карточка 1.

Первое блюдо.

Второе блюдо.

Третье блюдо.

Расставляя точки по количеству блюд каждого вида, и соединяя их отрезками, дети самостоятельно строят «граф-дерево», а затем подсчитывают число возможных комплектов обеда.

Карточка 2.

Первое блюдо можно выбрать – _____способ.

Второе блюдо можно выбрать – _____способ.

Третье блюдо можно выбрать – _____способ.

Комплект из трех блюд

можно выбрать – _____способ.

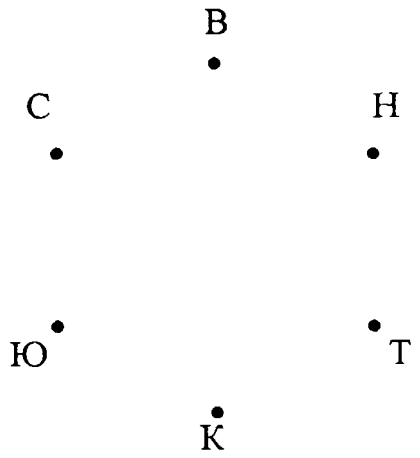
Использование этих способов решения комбинаторных задач

целесообразно, когда приходится составлять наборы более чем из 2 элементов. Овладение ими дает возможность решения комбинаторной задачи, т.е. он овладевает навыками самопроверки.

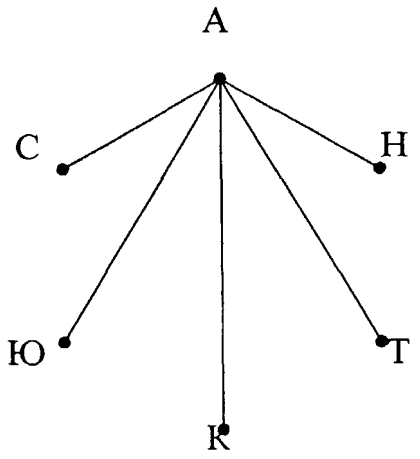
На примере решения комбинаторных задач младшие школьники знакомятся с графами как способом их решения.

Задача. «В отборочных соревнованиях по бегу участвовало 7 девочек: Аня, Наташа, Таня, Ксюша, Юля и Света. Чтобы выбрать сильнейшую, каждая девочка должна была пробежать с другой. Сколько забегов было сделано?»

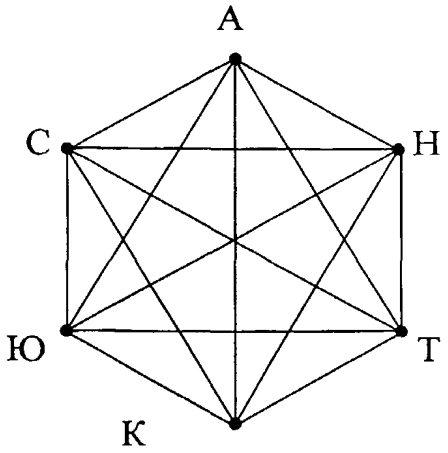
Обозначим каждую из спортсменок точками, не лежащими на одной прямой.



Покажем все забеги одной из спортсменок.



По аналогии составим забеги каждой из оставшихся участниц соревнования. Проведенные линии помогают увидеть, с кем человек бежал, а с кем нет. Когда будет закончен разбор задачи, на доске получается вот такая схема.



Ответом на вопрос задачи будет число отрезков, соединяющих точки. Если построение графа проводилось фронтально, то решение этой задачи с помощью таблицы дети выполняют самостоятельно.

	А	Н	Т	К	Ю	С
А	×	А.Н.	А.Т.	А.К.	А.Ю.	А.С.
Н	~~Н.А.~~	×	Н.Т.	Н.К.	Н.Ю.	Н.С.
Т	~~Т.А.~~	~~Т.Н.~~	×	Т.К.	Т.Ю.	Т.С.
К	~~К.А.~~	~~К.Н.~~	К.Т.	×	К.Ю.	К.С.
Ю	~~Ю.А.~~	~~Ю.Н.~~	Ю.Т.	Ю.К.	×	Ю.С.
С	~~С.А.~~	~~С.Н.~~	С.Т.	С.К.	С.Ю.	×

После самостоятельно выполненной работы учитель просит учеников прокомментировать последовательность заполнения ими таблицы. Ответ учеников звучит так:

1. начертил таблицу;

2. заполнил ее;
3. вычеркнул невозможные варианты (Аня не могла бежать с Аней и т.д.);
4. вычеркнул повторяющиеся пары;
5. посчитал оставшиеся варианты.

Анализируя собственную деятельность, ученики убеждаются, что на составление таблицы ушло значительно больше времени, чем на построение графа. Но умение решать задачу разными способами позволяет проверить самого себя. И на примере этой же задачи рассматривается метод системного перебора, проведенного с использованием правила суммы. Этот способ проговаривается детьми:

«Если Аня пробежала в паре с девочками 5 раз, то Наташа, уже 4, так как пара Аня – Наташа для забега уже была образована, тогда Таня – 3 раза, Ксюша – 2 раза, Юля – 1 раз, а Света пробежала уже со всеми девочками, и новой пары для забега уже не получается. Итого: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ (забегов)»

Таким образом, в программное содержание третьего и четвертого года обучения математике в системе развивающего обучения были включены комбинаторные задачи, связанные с перестановками, размещениями и сочетаниями элементов с большим числом элементов, чем во втором классе. Выбор возможных вариантов осуществляется методом системного перебора с помощью таблиц, графов, «дерева» возможностей и с использованием правила суммы и правила произведения. Органическое включение комбинаторных задач в программное содержание позволяло избежать перегрузки учащихся дополнительной научной информацией.

Предлагаемый в данном параграфе материал является содержанием экспериментальной работы.

3.3. Организация и проведение эксперимента.

Описанная во второй главе методика обучения младших школьников решению комбинаторных задач была апробирована в развивающем курсе математики четырехлетней начальной школы. Формирующий эксперимент осуществлялся в течение четырех лет (1998-2002 гг.). В нем приняли участие 246 учеников (школы-гимназии 1, школ № 6, 25, 50 города Орска, № 12 города Новотроицка, № 2 поселка Энергетик, школы-гимназии города Гая).

Целью эксперимента явилась проверка эффективности системы комбинаторных задач, органически связанных с программным содержанием начального курса математики, их влияния на повышение качества математических знаний младших школьников и на развитие.

Исходя из того, что процесс решения комбинаторных задач требует активного использования приемов умственной деятельности: анализа, синтеза, сравнения, классификации, аналогии, обобщения; гибкости и вариативности - мы полагаем, что способность младших школьников самостоятельно решать комбинаторные задачи может выступать как показатель развития их мышления.

В течение всего периода проведения формирующего эксперимента систематически велись наблюдения на уроках за процессом обучения учеников начальных классов математике, анализировалась работа учащихся, проводились проверочные работы в конце каждого года обучения, в процессе которых выявлялось качество усвоения программного материала и продвижение младших школьников в умении решать комбинаторные задачи.

Анализ результатов формирующего эксперимента подтвердил выдвинутую гипотезу: если в русле единой методической концепции, нацеленной на развитие учащихся, разработать систему комбинаторных задач, в процессе решения которых учащиеся усваивают основные вопросы программного содержания, то это позволит повысить качество математических

знаний младших школьников и сформировать у них умение решать комбинаторные задачи.

Понимая, что полученные результаты могли обусловливаться не только внедрением в процесс усвоения программного содержания комбинаторных задач, но и целым рядом других факторов, мы провели две серии сравнительного констатирующего эксперимента.

Первая серия сравнительного констатирующего эксперимента. В нем сравнивались результаты обучения по тем же критериям (качество усвоения программного и влияние комбинаторных задач на развитие мышления) в четырех группах учащихся. Эксперимент проводился в городе Орске.

Первая группа (78 учащихся) обучалась по традиционной программе и учебникам (автор М.И. Моро и др.), где решение комбинаторных задач осуществлялось бессистемно и не было связано с усвоением программного содержания.

Вторая группа (74 ученика) обучалась по программе и учебникам Л.Г. Петерсон, содержащем большое количество комбинаторных задач, но методика их использования была такой же как и в традиционных классах.

Третья группа учащихся (75 человек) обучалась по программе и учебникам Н.Б. Истоминой, но в этих классах не использовались комбинаторные задачи.

Четвертая группа учащихся – экспериментальная (76 учеников) обучалась по программе и учебникам Н.Б. Истоминой с включением комбинаторных задач в процесс усвоения программного материала.

В содержание первой серии эксперимента вошли задания, результаты выполнения которых могли свидетельствовать не только о качестве усвоения учащимися программного материала, но и о развитии их мышления. Критерием

развития мышления (гибкость и вариативность) выступила способность учащихся найти все возможные комбинации, которые даны в условии задания.

Экспериментальные задания сравнительного констатирующего эксперимента были представлены задачами пяти видов: арифметические задачи, решаемые методом перебора; задания имеющие несколько вариантов решения, требующие несколько вариантов решения; задачи с одним способом решения, требующие комбинаторных умений; геометрические задания, процесс решения которых связан с методом перебора; комбинаторные задачи. Причем, выполнение одних заданий требовало усвоение программного материала, а выполнение других опиралось только на опыт учеников успешное применение которого свидетельствовало о сформированности определенных качеств мышления (гибкости, вариативности).

Задание первой серии сравнительного констатирующего эксперимента.

1-2 задания – программное содержание

3-4 задания – программное содержание и комбинаторные умения.

5 задание – комбинаторные задачи.

Задание 1.

Поставить скобки в выражении так, чтобы значения его были различными. $36 - 20 : 4 + 6 \cdot 2$ Найти все возможные варианты.

Задание 2. Для проведения дня именинника нужно купить сок. В продаже есть сок в упаковке по 2 и 3 литра. Сколько и каких упаковок сока нужно купить, чтобы его было 20 литров?

Задание 3.

а) Поставь между цифрами два знака «+» так, чтобы получилось верное равенство 93845693 = 1676

б) В записи числа 844106164726 найдите число:

- наименьшее четырехзначное;

- наименьшее четырехзначное, записанное разными цифрами;

- самое близкое к 6175 после его округления до сотен;

- сумму цифр в записи которого равна 9.

Задание 4. На прямой поставь пять точек. Сколько отрезков получится?

Задание 5. Реши задачи.

а) В пакете лежат груши, апельсины и яблоки. Эти фрукты нужно разложить по 2 на тарелку. Сколько понадобится тарелок, если ни в одной из них не будет одинакового набора?

б) К минеральному источнику, который находится на вершине горы ведут две дороги, а от источника вниз четыре. Причем, по дорогам, которые ведут вверх, нельзя спуститься. Сколько вариантов восхождения и спуска существует?

Результаты выполнения первого задания.

Таблица 1.

Число вариантов решения / Классы		Число найденных вариантов			Обращались за помощью
		все	4-5	1-3	
М. 78	Кол-во уч-ся	22	18	38	8
	%	28	24	49	
П. 74	Кол-во уч-ся	38	15	21	3
	%	52	20	28	
И. 75	Кол-во уч-ся	51	12	12	1
	%	68	16	16	
Экс. 76	Кол-во уч-ся	58	11	7	1
	%	76	14	10	

М. – классы, обучающие по учебникам М.И. Моро.

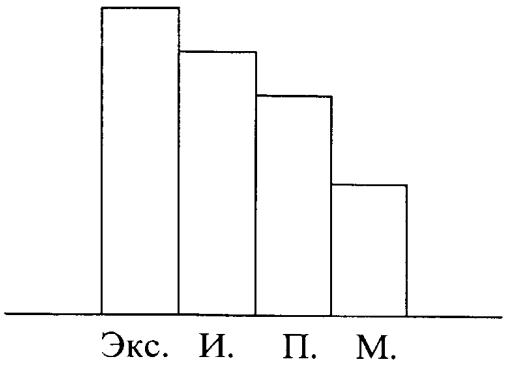
П. – классы, обучающие по учебникам Л.Г. Петерсон.

И. – классы, обучающие по учебникам Н.Б. Истоминой.

Экс. – экспериментальные классы.

Успешность выполнения задания складывалась

- из знания учениками порядка выполнения арифметических действий;
- умения пользоваться скобками;
- умения проводить перебор возможных вариантов.



Результаты выполнения первого задания. (шесть вариантов)

Гистограмма 1.

Результаты выполнения второго задания.

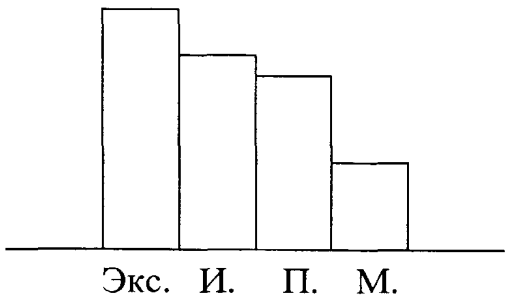
Таблица 2.

Классы \ Число найден вариантов		1	2	3
М. 78	Кол-во уч-ся	58	18	2
	%	75	23	2
П. 74	Кол-во уч-ся	37	19	18
	%	50	26	24
И. 75	Кол-во уч-ся	23	24	28
	%	31	32	37
Экс. 76	Кол-во уч-ся	2	20	54
	%	2	26	72

В требовании к решению задачи не была оговорена необходимость найти все возможные варианты решения (их три).

В ходе беседы с учениками после выполнения работы выяснилось, что именно этот факт стал причиной того, что они не стали искать других вариантов и остановились только на одном.

В экспериментальной группе самостоятельно нашли все варианты решения 72 % учащихся.



Гистограмма 2.

Результаты выполнения задания 2 (три способа решения)

Результаты выполнения третьего задания.

Таблица 3.

классы \ номера задания		а		б		Обращались за помощью
		Вып.	Невып.	Вып.	Невып.	
М. 78	Кол-во уч-ся	9	69	11	67	18
	%	12	88	14	86	23
П. 74	Кол-во уч-ся	38	36	40	34	8
	%	51	49	54	46	10
И. 75	Кол-во уч-ся	40	35	51	24	6
	%	53	47	68	32	8
Экс. 76	Кол-во уч-ся	56	20	59	17	2
	%	74	26	78	22	3

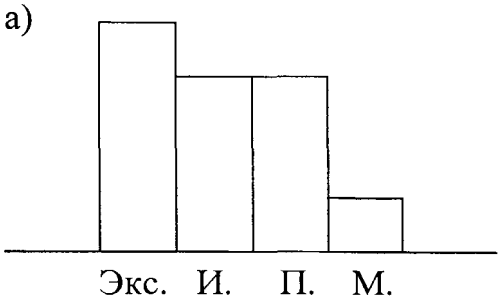
Выполнение этого задания, помимо знания программного материала, связанного с нумерацией четырехзначных чисел, требовало от учеников

достаточно высокого уровня сформированности приемов умственной деятельности и опыта в проведении перебора в определенной системе.

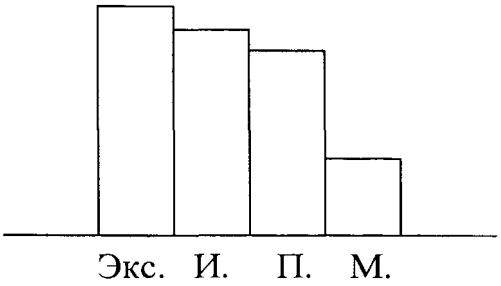
Результаты правильно выполненного задания представлены на гистограмме

Гистограмма 3.

а)



Гистограмма 4.



Результаты выполнения четвертого задания.

Классы / кол-во найденных вариантов		все	1-4	5-9	Обращались за помощью
М.	Кол-во уч-ся	6	47	25	14
78	%	8	61	31	18
П.	Кол-во уч-ся	21	29	24	8
74	%	29	39	32	10
И.	Кол-во уч-ся	23	16	36	8
75	%	31	21	48	10
Экс.	Кол-во уч-ся	48	14	14	6
76	%	62	19	19	8

Учащиеся классов, обучающихся по программе Н.Б. Истоминой и Л.Г. Петерсон, использовали буквы для обозначения отрезков, а затем, выписывая их, пытались пересчитать, но так как перебор проводился бессистемно, часть отрезков была ими не увидена, а запись некоторых

повторилась дважды. Отыскать все возможные варианты удалось небольшой группе учащихся контрольных классов: 31% (И.), 29% (П.), 8% (М.).

Результаты выполнения пятого задания.

Таблица 5.

Классы \ Номера задания		а				б				Обращались за помощью	
		полно и прав.	полно но неправ.	неполно но прав.	неполо и неправ.	полно и прав.	полно но неправ.	неполно но прав.	неполо и неправ.	а	б
М. 78	Кол-во уч-ся	2	43	8	25	22	8	24	24	56	34
	%	3	55	10	32	28	10	31	31	71	43
П. 74	Кол-во уч-ся	9	28	21	16	31	12	13	18	37	26
	%	12	38	28	20	42	16	18	24	50	35
И. 75	Кол-во уч-ся	11	16	35	13	44	4	18	10	26	18
	%	15	21	47	17	58	5	24	13	34	24
Экс. 76	Кол-во уч-ся	74	–	2	–	73	1	2	–	1	–
	%	97,3	–	3		96	1,3	2,7	–	1,3	–

Для выяснения результатов выполнения данного задания были использованы критерии, отслеживающие способность младших школьников решать комбинаторные задачи методом перебора:

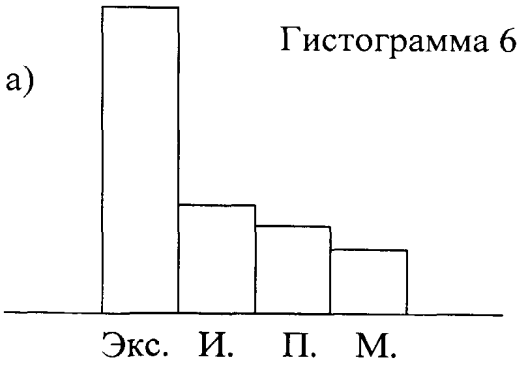
- полно и правильно решена задача;
- полно, но неправильно (есть повторы);
- не полно, но правильно (найдены не все возможные варианты);
- не полно и неправильно;
- обращался ли ученик за помощью к учителю.

Решение задачи 5а заключалось в нахождении 6 вариантов расположения фруктов на тарелке. Неполный перебор обусловлен тем, что требование «Сколько для этого понадобится тарелок, если ни в одной из них не будет одинакового набора фруктов?» было понято 32% учащихся контрольных классов как невозможность двух груш, двух яблок, двух апельсинов лежать рядом, как следствие, эти варианты были исключены из ответа.

При решении задачи 5б ученики контрольных классов пытались сделать чертеж и по нему отыскать все возможные подходы и спуски с горы. Результаты решения этой задачи выше, чем в 5а, так как в процесс ее решения учащиеся опирались на умение построения графических схем, которыми они пользуются при решении арифметических задач.

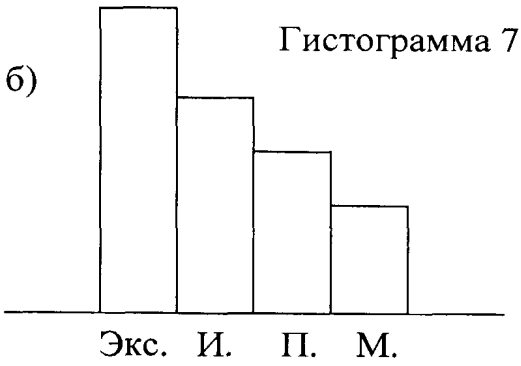
Результаты выполнения пятого задания.

а)



Гистограмма 6.

б)



Гистограмма 7.

Анализ результатов первой серии сравнительного констатирующего эксперимента. Учащиеся экспериментальной группы намного успешнее справились с арифметическими заданиями, имеющими несколько вариантов решения – 76% Экс. (68% – И.; 52% П.; 28% М.).

При решении арифметической задачи (ее решение можно было осуществить только методом перебора) 72% учащихся экспериментальной группы нашли все три варианта решения (27% И., 24% П., 2% М.).

Задания, процесс решения которых требовал от учащихся определенных комбинаторных умений (практический опыт) и проведения перебора в системе,

учениками экспериментальной группы выполнены значительно лучше, чем в контрольной.

Количество учащихся чаще всего обращавшихся за помощью в процессе выполнения работы в классах, обучающихся по учебникам М.И. Моро.

Таким образом, анализ результатов первой серии констатирующего сравнительного эксперимента позволяет сделать выводы, что система комбинаторных задач, включенная в процесс обучения младших школьников математике и органически связанная с программным содержанием, положительно влияет на повышение качества математических знаний и развития мышления учеников начальных классов.

Вторая серия сравнительного констатирующего эксперимента была проведена в двух группах с учащимися пятых классов (гимназия № 1 города Орска). Из учебников этих классов была составлена экспериментальная и контрольная группа. В контрольную группу вошли ученики, обучающиеся математике по учебникам под редакцией Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгины. Такой выбор был определен тем, что в программное содержание этого учебника включен раздел «перебор возможных вариантов». Учебники этой группы в начальных классах обучались математике по учебникам Л.Г. Петерсон, которые содержат достаточно большое число комбинаторных задач. Однако, несмотря на то, что авторами были включены комбинаторные задачи, ими не разработаны методические рекомендации по обучению школьников, как начальной школы, так и пятого класса по обучению решению комбинаторных задач, нет последовательности в проведении хаотичного и системного перебора (Л.Г. Петерсон), недостаточно времени на формирование умений использовать таблицы, графы, «дерево решений», как способов решения комбинаторных задач. (Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин).

Экспериментальная группа была представлена учебниками, которые в начальных классах обучались по учебникам Н.Б. Истоминой и в процессе

обучения математике которых были включенные комбинаторные задачи, тесно связанные с программным содержанием. В 5 классе эти ученики продолжали обучаться по учебникам Н.Б. Истоминой. Комбинаторные задачи, как самостоятельный раздел, в этом учебники отсутствуют. Целью данного эксперимента было проверить умения пятиклассников самостоятельно решать комбинаторные задачи методом перебора. Эксперимент проводился в конце II четверти.

В проведении эксперимента участвовали 56 человек: 5 «В» класс (Л.Г. Петерсон) – контрольный; 5 «А» класс (Н.Б. Истомина) – экспериментальный.

Задания для проведения эксперимента включали в себя три задачи, подобранные таким образом, что их решение системным перебором предполагает при решении первой – начертить граф, второй – заполнить таблицу, третьей – построить «дерево решений».

Задача 1.

На общешкольном шашечном турнире шесть участников сыграли друг с другом по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Задача 2.

Наташа, Данила, Андрей и Маша – лучшие литераторы в классе. На школьную олимпиаду «Знатоки литературы» нужно выставить команду из двух человек. Можно ли составить пять различных команд? Сколько различных команд составленных из одной девочки и одного мальчика, может выставить данный класс?

Задача 3.

В меню школьной столовой есть грибной суп, на второе – рыба и сосиски, а на гарнир – гречка, картошка и макароны, на третье – сок, чай, кофе. Сколько различных комплектов обеда можно составить? Можно ли различными наборами обеда накормить учеников вашего класса?

Для проверки результатов эксперимента были определены следующие критерии:

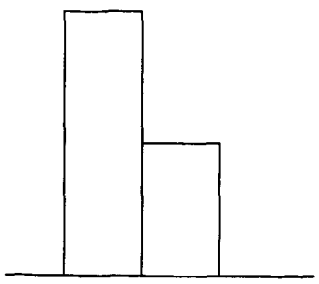
- проведен полный перебор возможных вариантов (задача решена верно);
- проведен неполный перебор возможных вариантов (задача решена неверно);
- метод осуществления перебора (хаотичный, системный)

Результат выполнения задания.

номера задач / классы		1 задача				2 задача				3 задача			
		верно	неверно	хаот.	сист. граф.	верно	неверно	хаот.	сист. табл.	верно	неверно	хаот.	сист. и дерево решений
К. 24	кол-во уч-ся	8	16	17	7	16	8	–	24	10	14	12	12
	%	34	66	70	30	66	34	–	100	42	58	50	50
Экс. 32	кол-во уч-ся	26	6	6	26	31	1	–	32	28	4	1	31
	%	81	19	19	81	97	3	–	100	87	13	3	97

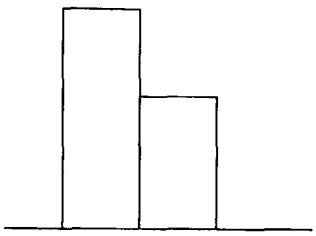
Результаты верно решенных задач представлены на гистограммах.

Задача 1.



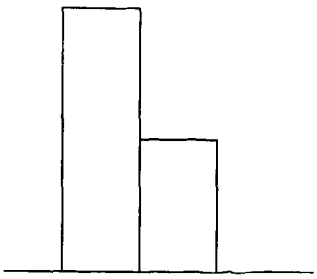
Экс. К.

Задача 2.



Экс. К.

Задача 3.



Экс. К.

Анализ результатов эксперимента показывает, что число учащихся, справившихся со всеми тремя задачами в экспериментальной группе (8%, 97%, 87%) значительно выше, чем в контрольной (34%, 66%, 42%).

В процессе решения задач методом системного перебора пользовались в экспериментальной группе (81%, 97%) учащихся, контрольной – (30% и 50%) учащихся. Таким образом, в экспериментальных классах у учащихся сформированы умения решать комбинаторные задачи методом перебора. В контрольных классах этот показатель значительно ниже, несмотря на то, что комбинаторные задачи включены в процесс обучения этих школьников математике. Причина на наш взгляд в том, что учащиеся контрольной группы не готовые к пониманию сути комбинаторной задачи (нет подготовительной работы); недостаточно времени в 5 классе на усвоение учащимися методов (хаотичный, системный перебор) и способов (перебор, таблицы, графы, «дерево решений») решения комбинаторных задач; не разработаны методические рекомендации для учителей математики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Модернизация содержания математического образования, направленная на развитие мышления школьника, отсутствие исследований, выявляющих возможность использования комбинаторных задач в курсе математики четырехлетней начальной школы, потребность школьной практики в разработке системы комбинаторных задач и методики их решения для младших школьников, необходимость решения проблемы преемственности между начальной и основной школой обусловили цель данного исследования, которое заключается в разработке системы комбинаторных задач для младших школьников и обоснованность возможности и целесообразности её включения в процесс усвоения программного содержания развивающего курса математики начальной школы, а также в доказательстве, что данная система является эффективным средством повышения качества математических знаний.

Исследование включало в себя две части: теоретическую и практическую.

В теоретической части определены исходные положения исследования на основе изучения и анализа научных исследований психологов (Л.С. Выготский, П.Я.Гальперин, В.В.Давыдов, А.К. Дусавицкий, Л.В.Занков, А.А.Люблинская, С.Л.Рубинштейн, И.С.Якиманская), педагогов и специалистов в области методики преподавания математики (А.К.Артемьев, Н.Я.Виленкин, Б.В.Гнеденко, Н.Б.Истомина, Ю.М.Колягин, А.Н.Колмогоров, Г.В.Дорофеев, Л.П.Стойлова, Л.М.Фридман, А.Ф.Эсаулов), а также ученых-математиков (К.Берж, А.Кофман, Г.Райзер, А.Ренои, К.А.Рыбников, А.Я.Халамайзер).

В качестве исходных определены следующие теоретические положения «комбинаторика», «комбинаторная задача» и на их основе сформулированы существенные признаки понятия «система комбинаторных задач».

«Система комбинаторных задач – это совокупность видов и способов решения комбинаторных задач, а также определенный порядок их реализации как средства усвоения программного содержания начального курса математики».

Исходя из обозначенной сущности понятия «система комбинаторных задач» раскрыты структурные элементы системы комбинаторных задач. Выделены взаимосвязанные подсистемы: виды комбинаторных задач, способы решения комбинаторных задач, этапы реализации видов и способов решения комбинаторных задач.

Первая подсистема включает три вида задач: задачи на перестановки, задачи на размещения, задачи на сочетания.

Вторая подсистема (способы решения комбинаторных задач) содержит два способа: хаотичный перебор, системный перебор.

Третья подсистема (этапы реализации видов и способов решения комбинаторных задач) состоит из подготовительного и основного этапов. Взаимосвязь первой и второй подсистем заключается в следующем: способы решения для всех видов комбинаторных задач одинаковы. Реализация взаимосвязи осуществляется сначала с помощью пропедевтических заданий (подготовительный этап), а затем - решение комбинаторных задач всех видов и разными способами (основной этап).

Обозначенная система комбинаторных задач, разработанная в русле методической концепции развивающего обучения математике (авт. Н.Б.Истомина) стала теоретической основой для разработки методики обучения младших школьников решению комбинаторных задач.

Средствами реализации разработанной методики являются: логика построения начального курса математики, сориентированная на формирование приемов умственной деятельности: анализа, синтеза, сравнения, аналогии, классификации, обобщения; новые методические подходы к усвоению учащимися теоретических понятий и общих способов действий; методика обучения решению текстовой задачи, сориентированная на формирование обобщенных умений: навыков чтения, усвоение конкретного смысла арифметических действий, приобретение опыта в соотнесении предметных, вербальных и схематических моделей, знакомства со схемой, знакомство со схемой как способом моделирования.

В условиях формирующего эксперимента осуществлялась проверка разработанной методики обучения решению комбинаторных задач.

Результаты проведения сравнительно-констатирующего эксперимента подтвердили выдвинутую гипотезу, что если в русле единой методической концепции, направленной на развитие учащихся, разработать систему комбинаторных задач, в процессе решения которых учащиеся усваивают основные вопросы программного содержания, то это повысит качество математических знаний младших школьников и сформулирует у них умение решать комбинаторные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдульманов Р. Н. Клименченко В. В., Шихалиев Х. Ш. Различные комбинаторные упражнения. /Нач. школа №6/,1977.

2. Азовский В. В. Решение некоторых учебных задач по комбинаторике : Пособие по решению задач : [Для студентов физ.-мат. специальности и учителей математики] / В. В. Азовский, Е. И. Томина, Т. В. Фомина;

3. Азовский В. В. Элементы комбинаторики в примерах и задачах: Пособие по решению задач / В. В. Азовский, Е. И. Томина, Т. В. Фомина; Самар. ин-т повышения квалификации и переподгот. работников образования .- Самара : Изд-во СИПКРО, 2000.- 51 с.

4. Актуальные проблемы методики обучения математике в начальных классах /Под ред. М. И. Моро, А. М. Пышкало.- М.: Педагогика, 1977.- 248 с.

5. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9-го класса средней школы //Колмогоров А. Н., Вейц Б. Е., Демидов И. Т. и др. /Под ред. А. Н. Колмогорова.- 2-е изд.- М.: Просвещение, 1976.- 222 с.

6. Анализ различных подходов к обучению младших школьников решению задач : [Теорет. аспект] // Учебная деятельность и психическое развитие школьников.-Нижневартовск,1994.- С. 88-94.

7. Аргинская И. И. Математика. Комплект учебников для 1,2,3,4 кл; М.,2001

8. Артемов А. К. Обучение сравнению в математике // Начальная школа.-1932.- № 4 - С. 43-46.

9. Артемов А. К. Развивающее обучение математике в начальных классах: Учебное пособие для учителей и студентов факультета педагогики и методики начального обучения.-Самара:Самарский ун-т,1995.-117с.

10. Артемов А. К., Истомина Н. Б., Микулина Г. Г. Теоретические основы методики обучения математике в начальных классах. М.,1996.

11. Балл Г.А. Теория учебных задач.:М.- Педагогика 1980-184с.

12. Бантова М. А., Бельтюкова Г. В. Методика преподавания математики в начальных классах: Учеб. пособие для учащихся школьных отделений под.

училищ /Под ред. М. А. Бантовой.- 3-е изд., испр.-М.: Просвещение, 1984.- 335 с.

13. Бартенев Ф. А., Савин А. П. Метод перебора /Занимательно о физике и математике /Сост. С. С. Кротов, А. П. Савин.- М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1937.- С. 27-29.

14. Белокурова Е. Е. Методика обучения младших школьников проведению комбинаторных рассуждений при решении задач. Автореф. дис...канд. пед. наук.-Спб-1993.-17с.

15. Беляева И. О. Комбинаторный подход и его применение в преподавании математики в восьмилетной школе: Автореф. дис. канд. пед. наук.- Орел, 1971.- 18 с.

16. Березина Л. Ю. Графы и их применение .-М.: Просвещение ,1979.-143с.

17. Березина Л. Ю. Использование графов в совершенствовании среднего математического образования: Автореф. дис ..... канд. пед. наук.- М., 1975.- 25 с.

18. Берж К. Теория графов и ее применения. Пер. с франц. А. А. Зыкова /Под ред. И. А. Вайнштейна. - М.: Изд-во иностр. литературы, 1962.- 319 с.

19. Блонский П. П. Избранные психологические произведения.-М.: Просвещение, 1964.- 547 с.

20. Божович Л. И., Леонтьев А. П., Морозова П. Г., Эльконин Д. Б. Очерки психологии детей (младший школьный возраст).- М.: Изд-во АНН РСФСР, 1950.- 191 с.

21. Бондаренко С. М. Учите детей сравнивать.- М.: Знание, 1981.- 96 с.

22. Бунимович Е.А.. Вероятность и статистика : Пособие для общеобразоват. учеб. заведений : 5-9 кл. / Е. А. Бунимович, В. А. Булычев,- М.: Дрофа, 2002.- 159с.

23. Бухарова Г. Д. Понятие " задача " в психологии, общей и частной дидактиках: [На прим. изуч,. естеств.- науч. дисциплин в сред. шк.] // Понятийный аппарат педагогики и образования.- Екатеринбург, 1995.- Вып. 1,- С. 96-106.

24. Варга Т. Математика 2. Плоскость и пространство. Деревья и графы. Комбинаторика и вероятность: Математические игры и опыты. Пер. с нем.- М.: Педагогика, 1978.- 112 с.

25. Варга Т. Математика. Математические игры и опыты. Кн. 1,2. М. 1978.

26. Василевский С. И. Методы решения задач.- Минск: Вышэйшая школа, 1974.- 238 с.

27. Вергелес Г. И. Развитие анализа и синтеза у младших школьников в условиях управления их умственной деятельностью в процессе обучения: Автороф. дис. . канд. пед. наук.- Л., 1972.- 22 с.

28. Верченко А. И. Верченко С. Б. Дифференциальное обучение математике во Франции //Математика в школе.-1989.-№3.

29. Виленкин И. Я., Голубкова Н. К. Материалы для внеклассной работы по математике в 4-5 классах. Множества и комбинаторика. М.: Изд-во НИИ. общ. и пед. психологии, 1981.- 70 с.

30. Виленкин Н. Я. О некоторых аспектах преподавания математики в младших классах //Математика в школе.- 1965.- № 1.-С. 19-30.

31. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика.- М.: Наука, 1975.- 208 с.

32. Виленкин П. Я. Индукция. Комбинаторика: Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 1976.- 48 с.

33. Виленкин П. Я. Комбинаторика.- М.: Наука, 1969.- 328 с.

34. Возрастные возможности усвоения знаний (младшие классы школы) /Под ред. Д. Б. Эльконина и В. В. Давыдова.- М.: Просвещение, 1966.- 442 с.

35. Возрастные возможности усвоения знаний (Младшие классы школы). /Под. ред. Д. Б. Эльконина и В. В. Давыдова. М.,1996.

36. Возрастные и индивидуальные особенности образного мышления учащихся /Под ред. И. С. Якиманской.- М.: Педагогика, 1989.- 224 с.

37. Волгина В. Ф. Графовые модели в методике преподавания математики: Автореф. дис. . . . канд. пед. наук.- М., 1977.- 23 с.

38. Выготский Л. С. Воображение и творчество в детском возрасте: Психол. очерк: Кн. для учителя.- 3-е изд.- М.: Просвещение, 1991.- 93 с.

39. Выготский Л. С. Избранные психологические исследования. М.,1956.-519с.

40. Выготский Л. С. Педагогическая психология /Под ред. В. В. Давыдова М.: Педагогика,1991.-480с.

41. Гальперин П. Я. Формирование умственных действий// Хрестоматия по психологии.-М., 1981.

42. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях: Элементы теории вероятностей в курсе сред. школы: Пособие для учителя /Пер. с фр. А. К. Звонкина.- М.: Просвещение, 1979. 176 с.

43. Гнеденко Б. В. Математика в современном мире и математическое образование // Математика в школе.- 1991.- № 1.-С. 2-4.

44. Грабарь М. И., Краснянская К. А. Некоторые положения выборочного метода в связи с организацией изучения знаний учащихся.- М.: Педагогика, 1973.- 46 с.

45. Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике.- М.: Педагогика, 1987.- 160 с.

46. Гутенмахер В.Л., Раббот Ж. М. Введение в комбинаторику : Решения задач: Метод, разработки для преподавателей ВЗМШ / АПН СССР, Всесоюз. заоч. мат. шк. при МГУ.- М.: АПН СССР, 1989.- 18 с.

47. Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении. М.:Педагогика,1972.-423с.

48. Давыдов В. В. Психическое развитие младших школьников. М.: Педагогика,1990.

49. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения.-М.,1996.

50. Демидова Т.Е., Тонких А.П.. Текстовые задачи и методы их решения.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.- 261 с.

51. Дограшвили А. Я. Формирование у учащихся умений и навыков решения комбинаторных и вероятностных задач при обучении математике в восьмилетней школе: Автореф. дис. . . . канд. пед. наук.- Тбилиси, 1976.- 30 с.

52. Дорофеев Г. В. О принципах отбора содержания школьного математического образования//Математика в школе.-1990.-№6.-С. 2-5

53. Дорофеев Г. В., Муравин Г. К., Петерсон Л. Г. Математика для каждого:

концепция и программа гуманитарного непрерывного курса математики в основной школе (1-9 кл.). Сб. «Школа 2000…» Концепция и программы непрерывных курсов для общеобразовательной школы. Вып. 1 –М: Баллас, 1997.

54. Дусавицкий А. К. Развивающее обучение: зона актуального и ближайшего развития//Начальная школа.-1999.-№7.-С.24-30.

55. Ермакова Е. С. Развитие гибкости мыслительной деятельности детей как предпосылки продуктивного и творческого мышления. Иваново, 1997.

56. Загашев И. Как решить любую проблему / И. Загашев.- СПб.:Прайм-ЕВРОЗНАК; М.: Олима-Пресс, 2001.- 127 с.

57. Зайцев Г. Т. Теоретические основы обучения решению задач в начальных классах: Учебное пособие.- Л.: Изд-во ЛГПИ, 1983.- 98 с.

58. Зайцев Г. Т. Теоретические основы обучения решению задач в начальных классах . Учебное пособие .-Л.,1983.-99с.

59. Зак А. З. О развитии у младших школьников способности действовать «в уме» //Вопросы психологии.-1981.-№5.

60. Занков Л. В. Избранные педагогические труды. М.,1990.-420с.

61. Ильясов И.И. Система эвристических приемов решения задач.-М., 1992 с.101

62. Истомина Н. Б. Активизация учащихся на уроках математики в начальных классах. Пособие для учителей. –М.: Просвещение, 1985.-63с.

63. Истомина Н. Б. Концепция обучения математике в начальной школе. //Начальная школа, 1996, №10. С. 48-57

64. Истомина Н. Б. Курс математики в начальных классах. //Начальная школа, 1995, №8. С. 49

65. Истомина Н. Б. Математика. Учебник для второго класса четырехлетней начальной школы.-Смоленск,2002.-175с.

66. Истомина Н. Б. Математика. Учебник для первого класса четырехлетней начальной школы.-Смоленск,2002.-176с.

67. Истомина Н. Б. Математика. Учебник для третьего класса четырехлетней

начальной школы.-Смоленск,2002.-175с.

68. Истомина Н. Б. Математика. Учебник для четвертого класса четырехлетней начальной школы.-Смоленск,2002.-239с.

69. Истомина Н. Б. Методика обучения математике в начальных классах.-М.: Академия, 1999.-288с.

70. Истомина Н. Б. Методическая система развивающего обучения математике в начальной школе. Автореф…докт. пед. наук.-М.,1995.-42с.

71. Истомина Н. Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика 1 класс».-Смоленск,2002.-105с.

72. Истомина Н. Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика 2 класс».-Смоленск,2002.-95с.

73. Истомина Н. Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика 3 класс».-Смоленск,2002.-112с.

74. Истомина Н. Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика 4 класс».-Смоленск,2002.-129с.

75. Кабанова-Меллер Е. Н. Психология формирования знаний и навыков у школьников.-М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962.- 376 с.

76. Кабанова-Меллер Е. Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся.- М.: Просвещение, 1968.- 288 с.

77. Кабехова Л. М. Методика построения единого курса "Начала теории вероятностей с элементами комбинаторики" для 9 класса средней школы: Автореф. дис. . . . канд. пед. наук.- Л., 1971.-21 с.

78. Кабехова Л. М. Некоторые вопросы комбинаторики в курсе 9 класса /Преподавание математики в средней школе.- Л.: Изд-во ЛГНИ, 1972.- С. 102-119.

79. Калмыкова З. И. Продуктивное мышление, как основа обучаемости. М.,1981.-200с.

80. Калошина И.П. Структура и механизмы творческой деятельности.-М., 1983.

81. Каменкова, Наталья Геннадиевна. Элементы теории вероятностей в начальной школе : Учеб. пособие / Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена.- СПб.:

Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 1999.- 44 с.

82. Катасонова А. Т. Простейшие комбинаторные задачи /Нач. шк.- 1972.- № 9.- С. 36-38.

83. Клименченко Д. В. Задачи с многовариантными решениями /Нач. шк.- 1991.- № 6.- С. 25-29.

84. Клименченко Д. В. Различные комбинаторные упражнения / Нач. шк.- 1977.- № 6.- С. 44-48.

85. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Часть I, 2.- М.: Просвещение, 1977.- 109 с.

86. Колягин Ю. М. Оганесян В. Л. Санинский В. Я. Луканкин Г. Л. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика.-М.: Просвещение, 1980.

87. Колягин Ю.М. «Поисковые задачи по математике».-М., 1979

88. Комбинаторные задачи на кружковых занятиях в 4-8 классах: Методические рекомендации для учителя /Составитель М. А. Шайдук.- Омск: Омское обл. отделение Цед. о-ва РСФСР, 1979.- 12 с.

89. Концепция развития школьного математического образования //Математика в школе.- 1990.- № 1.- С. 2-14.

90. Концепция четырехлетнего начального образования /Разраб. под рук. В. В. Давыдова, А. М. Пышкало //Начальная школа.- 1992.-№ 7-8.- С. 62-67.

91. Коробейникова М. Н. Как учить детей самостоятельно решать математические задачи // Развитие познавательной самостоятельности школьников.- Киров, 1999.- С. 82-99.

92. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику /Пер. с фр. В. П. Мякшиева и В. Е. Тараканова /Под ред. Б. А. Севастьянова.- М.: Наука, 1975.- 480 с.

93. Крутецкий В.А. Психология.-М., 1980.

94. Кузбеков Т.Т. Методы решений тестовых задач по математике / Т. Т. Кузбеков, Ф. А. Саитгареева.- Уфа : Б. и., 2001. Ч. 1.- 2001.- 108 с. Дорофеева Н. В.

95. Кушнерук Е. Н., Айзенберг М. Н. . Клименченко Д. В. Комбинаторные упражнения. /Нач. шк. №6,1977,с. 44.

96. Леонтьев А. Н. Умственно развитие ребенка. М.,1950.-30с.

97. Ли Г. М. Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Алма-Ата. 1976.

98. Липкина А. И., Рыбак Л. А. Критичность и самооценка в учебной деятельности.- М.: Просвещение, 1968.- 142 с.

99. Лишенко Г. П. Совершенствование системы математических задач для начальных классов общеобразовательных школ: Автореф. дис. . . . канд. пед. наук.- Киев, 1990.- 18 с.

100. Люблинская А. А. Ранние формы мышления ребенка /Исследования мышления в советской психологии.- М.: Наука, 1966.-С. 319-348.

101. Люблинская А. А. Учителю о психологии младшего школьника.- М.: Просвещение, 1977.- 224 с.

102. Математика. Учебник для пятого класса/Под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина,М.,1996.-286с.

103. Математическая энциклопедия. Том 2. /Гл. редактор И. М. Виноградов.- М.: Советская энциклопедия, 1979.- 1103 с.

104. Медведева 0. 0. Решение задач комбинаторного характера как средство развития мышления учащихся 5-6 классов: Автореф. дис. . . . канд. пед. наук.- М., 1990.- 15 с.

105. Менчинская Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника.- М.: Педагогика, 1989.- 220 с.

106. Менчинская Н. А., Моро М. И. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах.- М.: Просвещение, 1965.- 224 с.

107. Метельский Н. В. Идеи движения за реформу современны // Математика в школе. " 1992.-№ 1.- С. 8-10.

108. Методика начального обучения/Под ред. А. А. Столяра, В. Л. Дрозда. Минск,1988.-254с.

109. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов /Колягин Ю. М.,

Оганесян В. А., Санинский В. Я., Луканкин Г. Л.- М.: Просвещение, 1975.- 462 с.

110. Моро М. И. Волкова С. И. Степанова С. В. Математика. Комплект учебников для 1,2,3 и 4 классов.- М.:Просвещение, 2002.

111. Моро М. И., Пышкало А. М. Методика обучения математике в 1-3 классах: Пособие для учителя.- 2-е изд., перераб. и доп.-М.: Просвещение, 1978.- 336с.

112. Начальное обучение математике в зарубежных школах/Под ред. Л. Н. Скаткина. М.,1973.-184с.

113. Обухова Л. . Ф. Концепция Жана Пиаже: За и против.- М.: Изд-во Московского ун-та, 1981.- 191 с.

114. Обучение и развитие/Под ред. Л. В. Занкова. М.,1975.-440с.

115. Овсиенко Г. В. Развитие личности школьника средствами математики: //Развитие одаренности детей.- М.,1997.- С. 47-53.

116. Общая характеристика /Под ред. А.В.Петровского.-М.,1975

117. Орехов Ю.В. Начала комбинаторики.- Уфа : Технология, 1998.- 36;

118. Пали Ф., Пали Ж. Дети и графы. Обучение детей шестилетного возраста математическим понятиям.- Брюссель-Монреаль-Париж, 1968. Пер. с фр.- М.: Педагогика, 1974.- 192 с.

119. Петерсон Л. Г. Математика. Комплект учебников-тетрадей для 1,2,3 4 кл. .- М.:С-инфо,1999.

120. Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников : Кн. для учащихся.- М.: Просвещение, 1996.- 188 с.

121. Плоцки А. Вероятность события в стохастической линии школьного математического образования : Пер. внематемат. пробл. на яз. математики // Математика в шк.- 1997.- № 2.- С. 24-28. №3. –С.67-70.

122. Повышение эффективности обучения математике в школе: Кн. для учителя: Из опыта работы /Сост. Г. Д. Глейзер, - М.: Просвещение, 1989.- 240 с.

123. Поддъяков А. Развитие комбинаторных способностей : [Занятия в дет.

саду]/ А. Поддъяков // Дошкол. воспитание.- 2001.- N 10.- С. 90-96.

124. Пономарев Я. А. Знание, мышление и умственное развитие. М.,1967.-263с.

125. Пойа Дж. Обучение через задачи /На путях обновления школьного курса математики: Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 1978.- С. 220-226.

126. Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. Часть 1 /Научный редактор А. Е. Мерзон.- М.: Изд-во МГПИ, 1989.- 216 с.

127. Прикладная комбинаторная математика. Сб. статей.-М.:Мир, 1968.

128. Процесс мышления и закономерности анализа, синтеза и обобщения/Под ред. С. Л. Рубинштейна. М.,1960.-167с.

129. Психологические критерии качества знаний школьников: Сб. науч. тр. /Под ред. И. С. Якиманской.- М.: Изд-во АПН СССР, 1990.- 142 с.

130. Психологический словарь/Под ред. В. В. Давыдова и др.

131. Психология младшего школьника /Под род. Е. И. Игнатьева.- М.: Изд-во АНН РСФСР, 1960.- 336 с.

132. Психология. Словарь. /Под ред. А. В. Петровского,М. Г. Ярошевского.- М. 1990.

133. Пути повышения качества усвоения знаний в начальных классах /Под ред. Д. Н. Богоявленского, Н. А. Менчинской.- М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962.- 280 с.

134. Радченко В. П. Теоретико-методологические основы использования сюжетных задач в обучении математике : // Проблемы и перспективы развития методики обучения математике .- СПб.,1999.- С. 21-26.

135. Развитие учащихся в процессе обучения (1-2 классы) /Под ред. Л. В. Занкова.- М.: Изд-во АЛЛ РСФСР, 1963.- 291 с.

136. Развитие учащихся в процессе усвоение знаний (на материале начальных классов)/Под ред. М. В. Зверевой. М.,1981.-108с.

137. Райзер Г. Дд. Комбинаторная математика /Перевод с англ. К. А. Рыбникова.- М.: Мир, 1966.- 154 с.

138. Реньи А. Трилогия о математике. /Переписка Паскаля и Ферма/. "Мир". 1980.

139. Ринбаяси К., Чошанов М., Ямазаки И. Радостные уроки, или почему японские дети любят математику / Народное образование.- 1991.- № 12.- С. 53-58.

140. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования .-М.,1958.-147с.

141. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. В двух томах. Том I.- М.: Педагогика, 1989.- 486 с.

142. Румянцева Л. И. Особенности процесса сравнения у младших школьников /Типические особенности умственной деятельности младших школьников /Под ред. С. Ф. Жуйкова.- М.: Просвещение, 1968.- С. 12-71.

143. Русанов В. И. Математические олимпиады младших школьников: Кн. для учителя: Из опыта работы (в сел. . р-нах).- М.: Просвещение, 1990.- 77 с.

144. Рыбников К. А. О комбинаторных методах современной математики /Математика в школе.- 1966.- № 4.-С. 12-23.

145. Салмина И. Г. Виды и функции материализации в обучении.- М.: Изд-во Московского ун-та, 1981.- 134 с.

146. Самигуллина З. П. К методике решения простейших комбинаторных задач и задач на вычисление вероятности в средней школе: Автороф. дис. . . . канд. пед. наук.- Челябинск, 1970.- 21 с.

147. Сельдюкова С. И. Нестандартные текстовые задачи в обучении младших школьников математике: Автореф. дис. . . . канд. пед. наук.- М., 1982.- 16 с.

148. Скрипченко А. В. Умственное развитие младших школьников: Автореф. дис. . . . д-ра психол. наук.- Л., 1971.- 55 с.

149. Стойлова Л. П. Математика.-М.:Издат. Центр «Академия»,1999.-424с.

150. Стойлова Л. П. Способы решения комбинаторных задач //Начальная школа.-1994.-№1.

151. Сурикова, С. В. Элементы комбинаторики и теории графов: Учеб. пособие / Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена,- СПб.: Образование, 1995.- 70с.

152. Талызина Н.Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников.-М., 1988

153. Умственное развитие младших школьников в процессе обучения: Сб. науч.

тр.- Л.: ЛГПИ, 1974.- 240 с.

154. Усина 0. А. Нестандартная задача как средство развития математического мышления учащихся : [Математика в нач. шк.] // Активизация познавательной деятельности младших школьников в процессе обучения.- Ульяновск,1997.- С. 11-15.

155. Федосеев В. Н. Решение вероятностных задач / Всерос. шк. математики и физики "Авангард".- М.: Авангард, 1998. Ч. 1.- 1998, - 198 с.

156. Федосеев В. Н. Решение вероятностных задач / Всерос. шк. математики и физики "Авангард".- М.: Авангард, 1999. Ч. 2.- 1999. – 111с.

157. Формирование знаний и умения на основе теории поэтапного формирования умственных действий/ Под ред. П. Я. Гальперина, Н. Ф. Талызина. М.,1968.

158. Фридман Л. М. Методика обучения решению математических задач /Математика в школе.- 1991.- № 5.- С. 59-63.

159. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. М.,1983.

160. Фридман Л. М. Теоретические основы методики обучения математике. М.,1998.

161. Хабибуллин К. Я. Обучение учащихся творческой деятельности в процессе решения задач : [Математика в сред. шк.]/ К. Я. Хабибуллин // Школ. техн. ологии.- 2002.- №4.- С. 115-119.

162. Халамайзер А. Я. Комбинаторика и бином Ньютона: Пособие для учащихся 9-10 классов.-М.: Просвещение, 1980.- 32 с.

163. Халамайзер А. Я. Математика?-Забавно! М. 1989.

164. Холл М. Комбинаторика. /Перевод с англ. /. М. 1970.

165. Царева С. Е. Обучение решению задач // Нач. шк.- 1997.- N 11.- С. 93-98.

166. Цукерман Г. А. Азбучные истины развивающего обучения //Начальная школа.-1991.-№4.-С. 37-38.

167. Цукерман Г. А. Виды обобщения в обучении.-Томск.,1993.

168. Чуприкова Н. И. Умственное развитие и обучение. Психологические

основы развивающего обучения. .-М.,1995.

169. Шарыгин И. Ф. Решение задач. М.,1994.-352с.

170. Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики : Мат. анализ. Теория вероятностей. Старин, и занимат. задачи: Кн. для учащихся 10-11 кл. общеобразоват. шк.- М.: Просвещение, 1997.- 268 с.

171. Шилова Е. Н. Формирование у младших школьников (1-2 класс) интеллектуального приема сравнения в процессе обучения математике: Автореф. дис. . . . канд. психол. наук.- Л., 1972.-23 с.

172. Шихова А. П. Комбинаторные задачи в 1-8 классах средней школы / Обучение и воспитание учащихся в процессе преподавания математики в школе.- Киров-Йошкар-Ола: КП1И, 1976.-С. 24-34.

173. Шихова А. П. Комбинаторные задачи в 1-8 классах. Обучение и воспитание учащихся в процессе преподавания математики в школе . Киров . Йошкар-Ола. 1978.

174. Шихова А. П. Обучение комбинаторике и ее приложениям в средней школе: Автореф. дис. . . . канд. под. наук.- М., 1978.-20 с.

175. Элементы комбинаторики: Учеб. пособие. - Минск: НИИ Педагогики МП БССР, 1976.- 44 с.

176. Эльконин Д. Б. Возрастные возможности усвоения знаний .-М.,1966.

177. Эльконин Д. Б. Избранные психологические труды

178. Эльконин Д. Б. О теории начального обучения. //Народное образование.- 1963.-№4

179. Эльконин Д. Б. Психология обучения младшего школьника.-М.,1974.

180. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Теория и методика обучения математике в начальной школе.- М.: Педагогика, 1988.-208 с.

181. Эсаулов А. Ф. Психология решения задач: Методическое пособие. М.: Высшая школа, 1972.- 216 с.

182. Якиманская И. С. Развивающее обучение.- М.: Педагогика,1979.- 141 с.

183. Якиманская И. С. Как развивать учащихся на уроках математики.-М.,1996.

184. Artigues C., Bellecave Y, Terracher P. Mathematiques 2-e, 1990.

185. Fredon D. Mathematiques 2-e, 1990.

186. National Council of Teachers of Mathematics. Curriculum and Evaluation for School Mathematics Reston: Discussion. VA: Author,1989.

187. National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft NCTM Web-site,1999.

Приложение

Комбинаторные задания и задачи, предлагаемые ученикам начальных классов в процессе формирующего эксперимента.

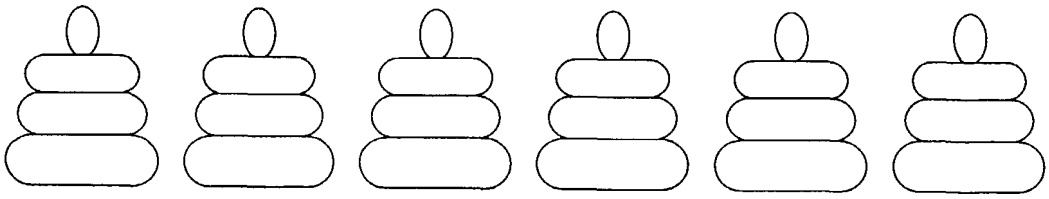
1-2 классы.

Основные темы курса:

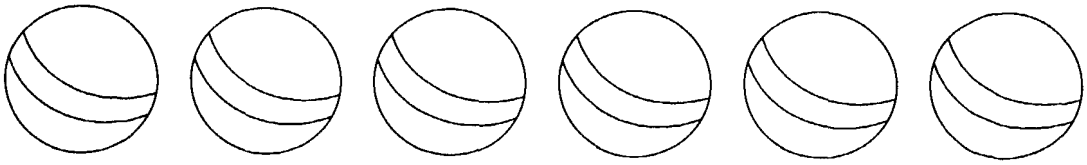
1. Признаки предметов
2. Сложение. Состав числа.
3. Двухзначные числа.
4. Понятие текстовой задачи. Структура задачи.
5. Умножение.
6. Трехзначные числа.

Задачи

1. Раскрась пирамидки красным и желтым карандашами так, чтобы они были различными.

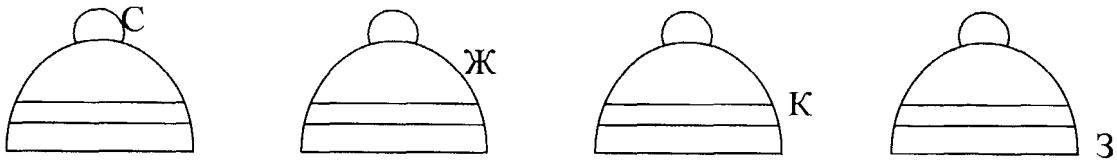


2. Красками трех цветов: голубой, желтой и синей раскрасьте мячики так, чтобы они отличались друг от друга.



3. На столе лежали три яблока: красное, зеленое и желтое. Нарисуй их так, чтобы каждый раз они лежали по-разному.
4. На иве сидели: шмель, оса, пчела, стрекоза. Двое насекомых улетели. Кто улетел?

5. Весной первоклассникам было поручено посадить перед школой три куста роз: красные, желтые и белые. В какой последовательности дети могут посадить цведы?
6. У Катиной куклы есть три ленты: красная, желтая и голубая. Катя вплела две ленты ей в косы. Какие ленты могла вплести Катя своей кукле?
7. У зайца, лисы и волка было по 4 воздушных шарика двух цветов: синие и красные. Какие наборы были у них, если заяц говорит, что у



него синих шаров столько же, сколько красных. У волка, оказалось синих шаров больше, чем красных, а у лисы красных шариков больше, чем синих. Какие шары были у каждого?
8. Раскрась шапочки так, чтобы все они были разными.
9. У Юли 3 летних платья и один сарафан. Сколькими способами она может выбрать или платье, или сарафан?
10. Из кондитерской бабушка принесла несколько пирожных: песочное, бисквитное, бизе и эклер. Она разрешила Андрюше взять одно. Сколько возможных выборов одного пирожного есть у мальчика?
11. На столе в вазе стоят цветы: белые и розовые пионы: белых пионов – 5, розовых – 6. Сколькими способами можно выбрать белые пионы? Розовые? Сколько вариантов выбрать одного пиона существует?
12. В магазине «Обуви» в отделе для детей на продажу выставлены 7 видов босоножек и 3 вида летних туфель. Сколько вариантов выбора летней обуви для дочери есть у мамы?
13. От Олиного дома до школы ведут три дороги через сквер, одна мимо

булочной и две вдоль стадиона. Сколько вариантов выбора дороги от дома к школе есть у Оли?

14. В конкурсе собак принимали участие две овчарки, один доберман и одна колли. Сколько способов выбора одной собаки на I место есть у членов жюри?
15. Таня с мамой выращивают кактусы. Ко дню рождения бабушки расцвели 3 цветка, а 4 еще нет. Сколько выборов одного кактуса для бабушки есть у Тани с мамой? А если бы они подарили цветущий кактус?
16. На выходные дни родители предложили Антону сходить в цирк или поплавать в бассейне, или съездить с ними на дачу. Сколько выборов занятия в выходные дни есть у Антона?
17. Три белки запаслись грибами, орехами и ягодами. Что может заготовить каждая белка, если она соберет два вида каждого запаса?
18. На клумбе росло 7 тюльпанов и 8 нарциссов. Для букета срезали 5 цветков. Какие цветы могли срезать?
19. Мама купила 8 яблок: 6 красных и два зеленых. Двумя она угостила соседку. Какие яблоки отдала мама?
20. В вазе лежали конфеты: 5 с черной начинкой и 2 – с белой. Артему разрешили взять три. Какие конфеты мог взять Артем?
21. В магазине на витрине мама увидела заколки для волос: 4 пластмассовых и 1 металлическую. Она решила купить две. Какие заколки могла купить мама?
22. Собираясь к Ослику на день рождения Пятачок решил подарить ему воздушный шарик. В отделе игрушек продавали: красные, синие, желтые, зеленые и фиолетовые шары. Сколько способов выбора одного шарика есть у Пятачка?
23. Мама заготовила 8 банок вишневого и малинового варенья. Сколько

среди них банок вишневого, а сколько малинового варенья?

24. Как из монет 1 руб., 2 руб. и 5 руб. можно набрать 10 рублей. Назови самый «длинный» путь набора и самый «короткий».

Есть ли варианты с одинаковым количеством набора монет?

25. Среди мальчиков 1 «А» и 1 «Б» классов забито 4 шайбы. С каким счетом могла закончиться игра?

26. Бабушка дала Маши 5 конфет. Она их положила в два кармана. Сколько конфет могло быть в каждом кармане?

27. Еж с ежихой нашли 8 грибов. Эти грибы они укрепили друг другу на спину. Сколько грибов на иголках могло быть у каждого ежа?

28. Мама Белка дала трем бельчатам 6 орехов. Как могли поделить орехи бельчата?

29. Еж сушит грибы на зиму. На три сучка он развесил 9 грибов. Как мог развесить грибы еж?

30. На клумбе расцвели астры: красные, белые и синие. Помоги Ане собрать букет из 5 цветов.

31. Ирина помогала маме развешивать белье на балконе. 10 наволочек она повесила на три веревки. Как могла повесить белье Ирина?

32. Из цифр 1, 2, 3 составь все двузначные числа.

33. Запиши все двузначные числа из цифр 5, 0, 8.

34. Из цифр 2, 3, 4, 5 составь двузначные числа, чтобы цифры в записи числа не повторялись.

35. Из цифр 6, 7, 8, 9 составь двузначные числа так, чтобы число десятков было больше числа единиц.

36. Почтальону Печкину нужно разнести посылки, но он забыл на почте лист с номерами домов. В какие дома Печкин должен отнести посылки, если он помнит, что номера их – двузначные числа, в записи которых есть цифры 2, 3, 5, 8, 9 и число десятков больше

числа единиц? Получили ли посылку кот Матроскин и пес Шарик, если номер их дома больше 30, но меньше 50?

37. Сколько существует двузначных чисел, сумма числа десятков и единиц каждого из которых равно 16? Какие это числа?
38. Сколько в офисе телефонов, если номер каждого из них двузначное число, образованное из цифр 5, 9, 3, 0?
39. Сколько двузначных номеров телефонов можно составить из цифр 4, 5, 6, 7?
40. Маша и Миша составили двузначные числа из цифр 1, 2, 3, 4, 5. Миша записал 25 чисел, а Маша – 20. Кто из них прав? Составь таблицу.
41. Для составления двуцветных ручек на фабрике использовали фиолетовые, красные, синие, черные и зеленые стержни. Составь таблицу и покажи, какие двухцветные ручки выпускает фабрика?
42. Для варенья ассорти использовали ягоду: малину, вишню, черную смородину и крыжовник. Сколько видов варенья ассорти получилось, если брали по два сорта ягод?
43. Шестерым девочкам закололи по две отличные между собой заколки разной формы: сердечком, ленточкой, звездочкой, бантиком. Возможен ли вариант, чтобы ни у каких двух девочек не было одинакового набора заколок?
44. Настя пригласила в гости своих друзей: Сережу, Веру, Лену и Богдана. У нее было три вида пирожных: бисквитное, песочное и бизе. Можно ли из них составить различные наборы из двух пирожных для ее друзей?
45. В строительном наборе 7 зеленых кубиков и 2 синих; 5 желтых треугольников и 4 синих. Построй из этих фигур домики. Сколько получится домиков одинакового цвета? Запиши решение задачи с

помощью таблицы.

46. У Вовы ощенилась такса и принесла 5 черных и 2 коричневых щенка. Двух щенят Вова решил подарить другу. Есть ли вероятность того, что у Вовы останутся только черные щенки?
47. На полке у Ани стоят книги А.С. Пушкина, Ш. Перро, Г-Х. Андерсона, братьев Гримм и К. Чуковского. Книги двух писателей Аня еще не прочла. Книги каких авторов Аня могла не прочесть?
48. Сколько домов можно пронумеровать числами, состоящими из цифр 8, 5, 3, 1? Можно ли ответить на вопрос задачи не составляя таблицы?
49. Экипаж космического корабля состоит из пилота и бортинженера. Сколько способов составления экипажа есть, если на место пилота 3 кандидата, а на место инженера – 5?
50. На почте в продаже имеется 7 конвертов различных видов и 6 различных марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
51. В классе в шахматы играют 3 девочки и 7 мальчиков. Сколькими способами можно составить команду на турнир из одной девочки и одного мальчика этого класса?
52. В кафе можно заказать сок и пирожное. Сколькими способами можно сделать заказ, если в продаже 6 видов пирожных и 4 вида сока?
53. В школьной столовой на второе приготовили плов, манты и блины, а на третье – сок, компот и чай. Сколько и каких комплектов обедов можно составить.
54. Сколькими способами из слова «математика» можно выбрать две буквы, первая из которых гласная, а вторая – согласная?

55. Сколькими способами можно составить команду на школьные соревнования из 1 девочки и 1 мальчика, если в классе хорошо бегают на лыжах 4 девочки и 7 мальчиков?

56. Лера задумала двузначное число, сумма числа десятков и единиц которого равна 16. Цифры в записи числа не повторяются и число десятков меньше числа единиц. Какое число задумала Лера?

57. У бабушке были фрукты: персики, груши, яблоки и абрикосы. У нее пять внуков. Она решила угостить их наборами из двух фруктов. Может ли она для каждого сделать различный набор?

58. У кошки Шалуньи родились котята: Пушок, Дымок, Рыжик и Маркиз. Двух котят решено было подарить соседям. Кого из котят могли подарить?

59. В цирке выступали звери: Мишка ездил на велосипеде, Обезьяна била в барабан, Кот прыгал на батуте, Пудель ходил на задних лапах, Дельфин играл в мяч. На следующий день двое из зверей заболели. Кто мог заболеть?

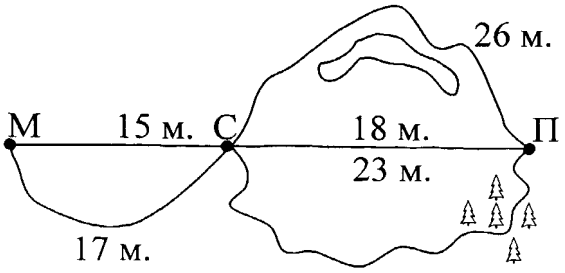
60. Старшеклассники отправились в поход и взяли с собой красные, синие, желтые и зеленые палатки. Когда ребята стали располагаться на ночлег, оказалось, что две палатки лишние. Какие палатки могли быть лишними?

61. В коробке лежат белые и голубые шары. Из нее вынули три шара. Нарисуй, какие шары могли вынуть. Будут ли среди них два шара одного цвета? А если вынуть два шара?

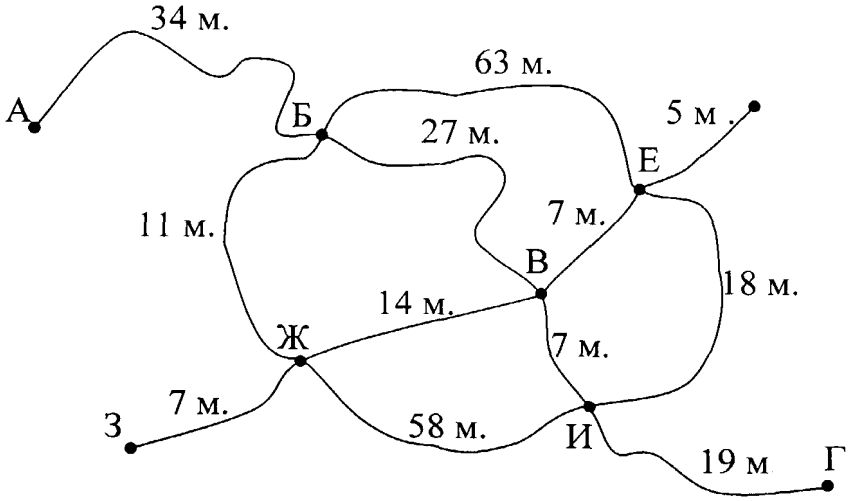
62. У Лены было 4 мягких игрушки: Заяц, Собака, Тигренок и Мишка и две куклы Барби и Мальвина. Она сегодня играет с одной куклой и одной мягкой игрушкой. Какие это могут быть игрушки?

63. Из букв *а*, *т*, *н*, *о*, *у* составь все возможные двухбуквенные сочетания. Реши задачу двумя способами.

64. От дома Марины до дома Саши – 2 дороги длиной 17 м. и 15 м. От Саши до Пети – 3 дороги: напрямик (12 м.), через лес (23 м.) и по озеру (26 м.) Сколькими способами можно добраться от Марины до Пети, заехав к Саше? Какой путь самый длинный? (5 дорог, самая длинная через озеро: 17 + 26 = 43 м.)



65. Перед тобой карта дорог королевства Кривых зеркал. Сколькими способами может Оля из п. А попасть в п. Г, где живет Яло? Какой путь самый короткий? Оля прошла 86 м. Дошла ли она до Яло? По какому пути она могла идти 86 м.?



66. У Ксюши две блузки: белая и розовая и две юбки: длинная и короткая. Сколько комплектов одежды может составить Ксюша?

67. На аэродроме было 4 самолета и 6 вертолетов. 5 машин поднялись в воздух. Какие это машины?

68. Для детского сада купили 6 стульчиков и 2 табуретки. Три предмета поставили в ясельную группу. Досталось ли малышам табуретка и какие предметы им могли поставить?

69. У мальчика Вовы две рубашки – желтая и голубая и двое шортиков черные и синие. Что Вова может надеть на праздник?
70. Маша хочет подарить маме букет из 5 роз: белых и розовых. Помоги ей собрать букет.
71. В игрушечном поезде в шести вагонах ехали 6 зверят-игрушек: собачка, кошечка, мишка, слоник, зайчик, тигренок. Кто ехал в двух первых вагонах?
72. В столовой на обед поваром было предложено 4 вида салатов: весенний, мимоза, оливье, крабовый и три вида горячих блюд: плов, пельмени, картофельное пюре с котлетой. Сколько можно сделать заказов из одного салата и одного горячего блюда?
73. На арене цирка медвежата ездили на двухколесных и трехколесных велосипедах. Сколько было медвежат, если колес было 17?
74. В буфете продаются 5 видов пирожных: воздушное, картошка, бисквитное, песочное и трубочка. И 3 вида напитков: апельсиновый, клубничный и яблочный. Сколько есть возможных вариантов покупки напитков и пирожного?
75. Кролик заготовил на зиму вишневое и клубничное варенье в 9 баночках. Вишневого варенья больше, чем клубничного. Сколько банок вишневого и сколько банок клубничного варенья мог заготовить Кролик?
76. На коньках катались ребята: Петя, Витя, Олег, Стас, Настя и Лена. Сколько пар «мальчик-девочка» могло быть? Можешь ли ты ответить на вопрос не составляя пары? Сколько способов решения есть у данной задачи? Реши задачу всеми способами. Какой из них для тебя был самым удобным?
77. К Буратино пришли в гости Мальвина, Пьеро, Артемон. Сколькими способами он может рассадить гостей на синей, белой, красной

табуретках и сесть сам?

78. В вазе лежат 5 яблок и 7 груш. Сколькими способами можно выбрать 1 грушу и 1 яблоко?

79. В магазине продаются елочные украшения: красные, желтые, зеленые, шары, зайчики, белочки, звездочки большие и маленькие. Сколькими способами можно составить набор состоящий из одного шара, зайчика, белочки, любой звездочки?

80. Пять мальчиков и три девочки играют в мяч. Им нужно разделиться на две команды. Как это можно сделать, чтобы в каждой команде был хотя бы один мальчик?

81. Как можно 10 тетрадей раздать 2-ум (3-м, 4-м, 5-ти) ученикам? Сколько способов раздачи тетрадей ты можешь предложить?

82. Маша и Миша собираются на дачу. Миша взял 3 футболки: серую, белую и голубую и одни черные шорты. Маша взяла две блузки розовую и белую и две юбки: черную и серую. Маша утверждает, что она может составить из своих вещей больше костюмов, чем Миша. Миша говорит, что костюмов у них получится одинаково, так как каждый из них взял равное количество вещей. Кто прав? (Составь таблицу)

83. Вернувшись с дачи, Миша и Маша поехали в загородный лагерь. Теперь Миша взял 8 вещей: 6 футболок и 2 шорт. Маша взяла 7 вещей: 4 блузки и 3 юбки. Миша с радостью заявил, что теперь в его гардеробе больше костюмов, чем у Маши. Прав ли он?

Подумай, сможешь ли ты ответить на вопрос задачи не составляя таблицы.

84. Саша пригласил Колю к себе домой на новогодний праздник, но Коля забыл номер квартиры друга. Он помнил, что там были цифры 1, 4 и номер не был записан с помощью одной и той же цифры. Как

помочь Коле найти квартиру, если номера квартир в подъезде Саши все трехзначные?

85. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр: 1, 3, 5?

86. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 5, 7, если цифры в записи чисел не должны повторяться?

87. Из цифры 9, 5, 3, 7 составь варианты дву- и трехзначных чисел (цифры в записи чисел не должны повторяться).

88. У Кати 3 чайных чашки для кукол красных и 3 – розовых. Сколькими способами она может выбрать одну?

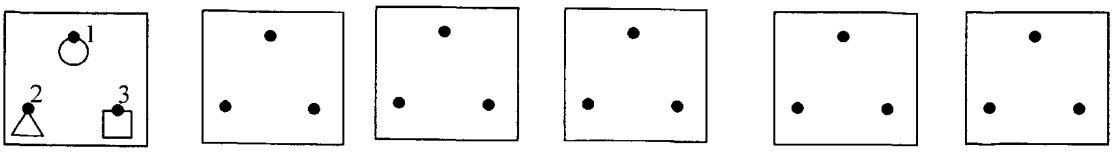
89. В туристическом агентстве 4 путевки в Финляндию, 3 – в Германию. Сколькими способами можно выбрать одну путевку?

90. У Маши 10 марок с цветами и 12 – с памятниками архитектуры. Сколькими способами она может выбрать одну марку для конверта?

91. В обувном отделе 7 видов босоножек и 12 видов туфель. Сколькими способами можно выбрать для покупки одну пару обуви?

92. На выставке – продаже 12 натюрмортов и 23 пейзажа. Сколькими способами можно выбрать для покупки одну картину?

93. «Картина». Художник написал 3 картины и сделал для них рамки: △, ○, □. Помогите ему найти лучший способ расположения картин на стене.



94. Из г. А в г. В ведут 2 дороги, а в г. С – 3 дороги. Сколькими способами можно проехать из г. А либо в г. В, либо в г. С?

95. Маша нарвала 5 ромашек и 6 васильков. Сколькими способами можно выбрать один цветок из букета?

96. В магазине продается 21 красный шар и 30 синих. Сколькими

способами можно выбрать один шар?

97. В школьном наборе 13 конфет с начинкой, 12 – без начинки. Сколькими способами можно выбрать одну конфету?

98. В вазе лежат 7 яблок и 13 груш. Сколькими способами можно взять из вазы 1 фрукт?

99. На полке 2 детектива и 8 романов. Сколькими способами можно выбрать или детектив или роман?

100. У Коли 5 грузовых машин-игрушек и 7 легковых. Сколькими способами можно выбрать или легковую или грузовую машину?

101. У Юли 8 юбок и 9 брюк. Сколькими способами она может выбрать или юбку или брюки?

102. В отделе «Ткани» 20 цветов шелка и 15 цветов сатина. Сколькими способами можно выбрать или шелк или сатин?

103. В магазине продаются 4 вида больших пеналов и 3 – маленьких. Сколькими способами можно выбрать один пенал?

104. У Кати 3 чайных чашки для кукол красных и 3 – розовых. Сколькими способами она может выбрать одну?

105. В туристическом агентстве 4 путевки в Италию, 3 – в Германию. Сколькими способами можно выбрать одну путевку?

106. Сколько домов можно пронумеровать двузначными числами, состоящими из цифр 8, 5, 3, 1?

$4 \cdot 4 = 16$ (д.)

Сколько среди них таких, в записи которых цифры не повторяются?

$4 \cdot 3 = 12$ (д.)

107. Сколько сумм можно составить, используя числа 27, 15, 4, 45, 34, 38. Суммы состоят из двух неповторяющихся слагаемых.

108. Лиса, Волк и Заяц поспорили, что каждый из них обгонит Хорька, Рысь и Крысу. Сколько забегов наблюдали звери, собравшиеся на

лесном стадионе?

109. На столе 2 блюда и три чашки. Сколькими способами можно составить пару для чая?

110. Катя хочет купить куклу. Придя в магазин, она увидела 9 кукол в синем платье и 5 – в красном. Сколько различных способов существует у Кати, чтобы выбрать одну куклу?

111. Молодой человек хочет купить одну розу. Сколько различных способов существует, если перед ним: 3 алые, 3 белые и 4 розовые розы?

112. У Филиппа в шкафу стоят 6 книг про партизан, 12 сборников стихов и 8 книг со сказками. Сколькими способами он может выбрать одну книгу для чтения?

113. Буратино нужно открыть волшебную дверцу. Для этого он должен набрать код: трехзначное число, составленное из цифр 5, 6, 7, 8. И еще условие: код – число большее 800. Какие числа должен проверить Буратино?

114. 5 девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на 2 команды по 4 человека если хотя бы один юноша входит в каждую команду?

115. Из группы, состоящей из семи мальчиков и четырех девочек надо выбрать шесть человек, так, чтобы среди них было не менее двух девочек. Сколькими способами это можно сделать?

116. 3 курицы, 4 утки и 2 гуся живут у бабушки Дуси в деревне. К ней приезжают все ее внуки и правнуки. Для праздничного стола ей нужно приготовить одну курицу, одну утку, и одного гуся. Сколькими способами она может выбрать из имеющихся у нее трех – утку, гуся и курицу?

117. У учителя 4 вида ручек и 3 вида карандашей. Сколько различных

комплектов, содержащих по одной ручке и одному карандашу можно из них составить?

118. Лиса, Волк и Заяц поспорили, что каждый из них обгонит Хорька, Рысь и Крысу. Сколько забегов зрители наблюдали?

119. Для участия в концерте нужен один мальчик и одна девочка. Но хотят участвовать три мальчика и две девочки. Сколькими способами можно выбрать одну девочку и одного мальчика?

120. Сколько возможно составить сумм, используя данные числа: 27, 15, 45, 34, 38 (суммы состоят из двух слагаемых, и ни одно слагаемое не повторяется)?

3-4 классы

Основные темы курса:

1. Текстовые задачи на четыре арифметических действия.
2. Порядок выполнения действий.
3. Четырехзначные, пятизначные и шестизначные числа.
1. Текстовые задачи.
2. Многозначные числа.

Задачи

121. В каком году родился Старик Хоттабыч, если он утверждает, что в записи его года рождения есть три из четырех цифр 3, 5, 9, и 1; расположены они в порядке убывания и сумма цифр в записи года рождения равна 9.

122. В офисном центре установлены трехзначные номера телефонов, в записи которых есть цифры 3, 4, 5, 6. Известно, что на каждом этаже установлены телефоны, сумма цифр в записи которых одинакова. Сколько этажей в офисном центре и телефоны с какими номерами расположены на каждом?

123. В школу закупили карамель «Чебурашка», «Рачки», «Клубника со сливками», «Гусиные лапки», шоколадные конфеты «Былина», «Чародейка», «Кара-Кум», «Лимон», лимоны, яблоки 2-х сортов, ирис «Кис-кис», «Молочный». Сколькими способами детям на Новый год могут составить различные подарки, состоящие из одного вида карамели, шоколадных конфет, лимонов, яблок, ириса?

$$4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 64 \text{ (сп.)}$$

Ответ: 64 способами.

124. К Буратино пришли в гости Мальвина, Пьеро, Артемон. Сколькими способами он может рассадить гостей на синей, белой, красной, зеленой табуретках и сесть сам?

125. В вазе 5 яблок и 7 груш. Сколькими способами можно =выбрать 1 грушу и 1 яблоко?

126. В магазине продаются елочные украшения: красные, желтые, зеленые, шары, зайчики, белочки, звездочки большие и маленькие. Сколькими способами можно составить набор состоящий из одного шара, зайчика, белочки, любой звездочки?

127. В школу закупили карамель «Чебурашка», «Рачки», «Клубника со сливками», «Гусиные лапки», шоколадные конфеты «Былина», «Чародейка», «Кара-Кум», «Лимон», лимоны, яблоки 2-х сортов, ирис «Кис-кис», «Молочный». Сколькими способами детям на Новый год могут составить различные подарки, состоящие из одного вида карамели, шоколадных конфет, лимонов, яблок, ириса?

128. У девочки шесть тюбиков гуаши: красный, синий, черный, желтый, зеленый, голубой. Сколько вариантов сложных красок она может получить, смешивая имеющиеся у нее по три?

129. У Миши три рубашки: белая, серая и голубая и три галстука: черный, коричневый и в полоску. Сколько вариантов одежды из

рубашки и галстука он может составить?

130. Бабушка срезала 16 роз: 2 белых, 2 красных и розовые. Букетик из трех роз она решила подарить соседке по даче. Какого цвета розы бабушка подарила?

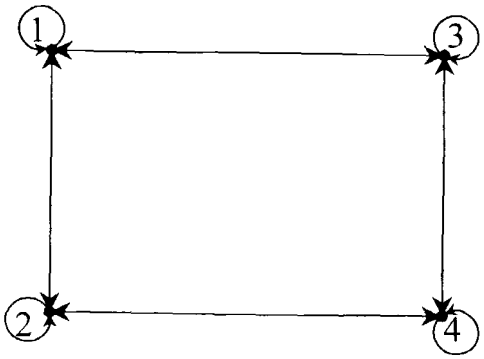
131. Запиши все возможные частные делимыми могут быть числа 12, 9, 8, 16, 15, а делителями – 1, 2, 3, 4. Сколько таких частных может быть? (Используй таблицу в решении задачи)

132. Ребята 3 а, 3 б, 3 в, 4 а, 4 б, 4 в, 4 г классов соревновались по лазанию на ледяную горку. Победителями стали два класса. Назовите возможных победителей. Какой способ решения задачи тебе поможет не допустить ошибок?

133. Вставь пропущенные слова в условие задачи. «В парфюмерный магазин завезли товар: 2 вида ..., 3 вида ..., одной фирмы. Сколько различных подарочных наборов может составить из двух разных предметов? Реши задачу, составив таблицу.»

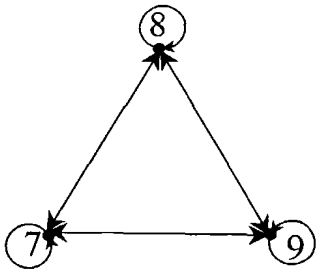
134. В одном из отделов «Детского мира» продавали вязаные вещи: шарфы – черные и бордовые; береты – желтые, красные, синие' варежки – голубые, розовые. Сколько комплектов из трех вещей можно составить?

135. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4? На примере этой задачи можно подвести учащихся к изображению ориентированного графа:



136. Сколько двузначных чисел можно составить используя цифры 7, 8, 9?

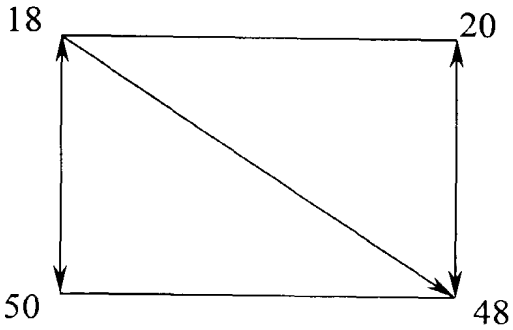
Правильно ли построен граф к этой задачи? Докажите.



137. Подходит ли граф к решению такой задачи: «Сколько двузначных чисел, в записи которых не повторяются одинаковые цифры, можно составить, используя цифры 7, 8, 9?» Почему?

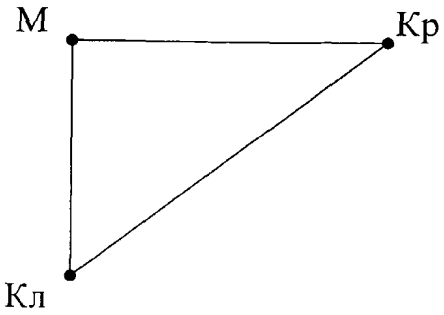
138. Сколько разностей можно составить из чисел 18, 20, 48, 50. Правильно ли построен граф к этой задаче? Докажи.

Измени граф, так, чтобы подходил к данной задаче.

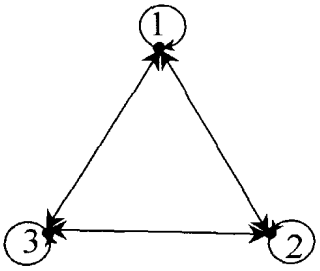


139. В саду растут малина, крыжовник, смородина, клубника, Мама нарвала ягоды 2-х сортов. Какие наборы ягод мама нарвала?

Дополни граф и реши задачу.



140. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 2, 3? Цифры в записи чисел могут повторяться. Правильно ли построен граф к этой задачи?



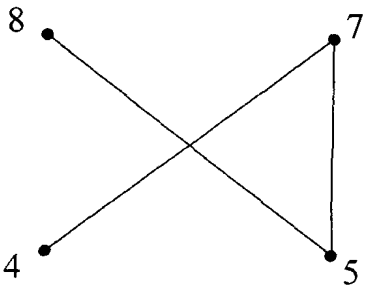
Подходит ли этот граф к решению такой задачи:

«Сколько двузначных чисел, в записи которых числа не повторяются, можно составить используя цифры 1, 2, 3,?» Почему?

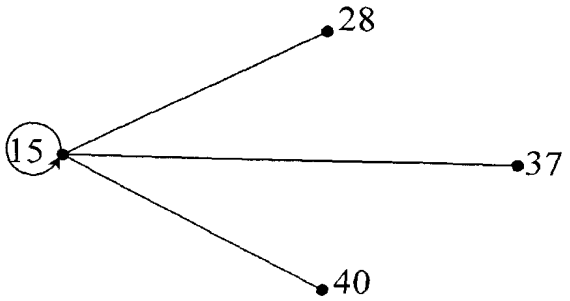
141. У коли 20 марок, а у Миши – 15. Сколькими способами они могут обменять одну марку одного мальчика на марку другого?

142. В коробке лежат шарики 4-х цветов. Каждый ребенок взял по 2 шарика. И у всех оказались отличающиеся наборы шариков. Сколько детей взяли шарики?

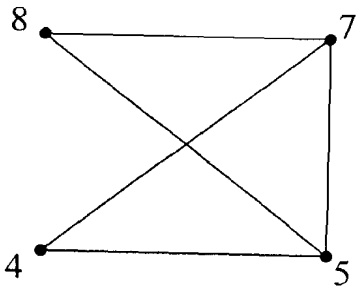
Дополни граф и ответь на вопрос задачи (Точками обозначали шарики разного цвета)



143. Составьте все возможные суммы из чисел 15, 28, 37, 40, 51. Сколько их может быть? Дополните граф и ответьте на вопрос задачи.



144. Сколько двузначных чисел можно составить, если цифра десятков выбирается из цифр 8, 4, 7, а цифра единиц – из цифр 7, 5?



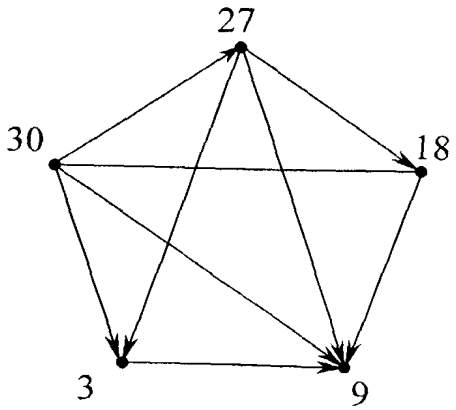
(нужно указать стрелками цифру десятков и единиц в числе)

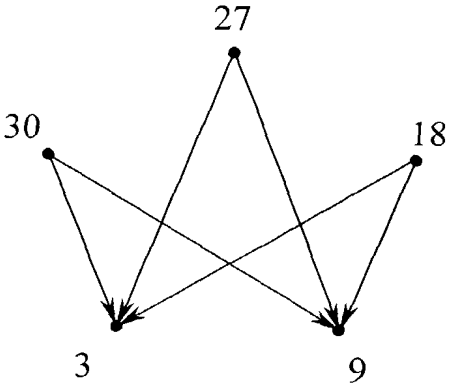
Измени граф так, чтобы он подходил к решению задачи.

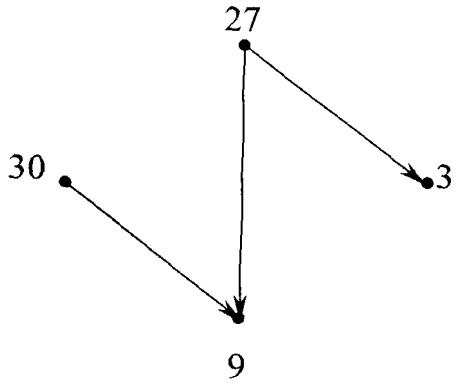
145. Из Радостного в Удачное можно доехать двумя дорогами, а из Удачного в Счастливое – тремя. Сколькими способами можно доехать из Радостного в Счастливое с остановкой в Удачном? Реши с помощью графа.

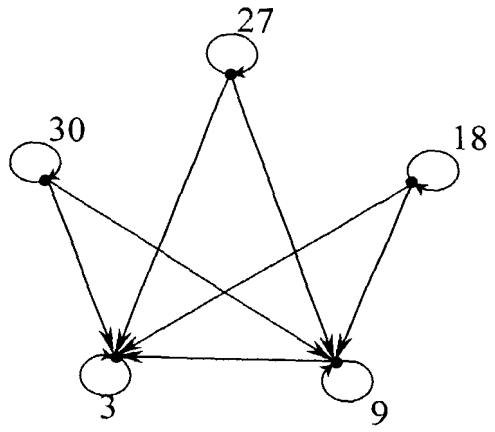
146. Какие частные можно составить из чисел 30, 27, 18, 9, 3?

Выбери граф к данной задаче.





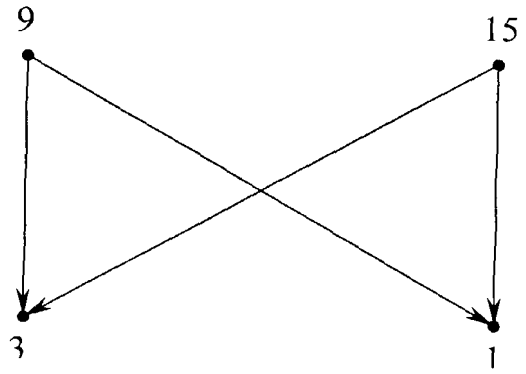




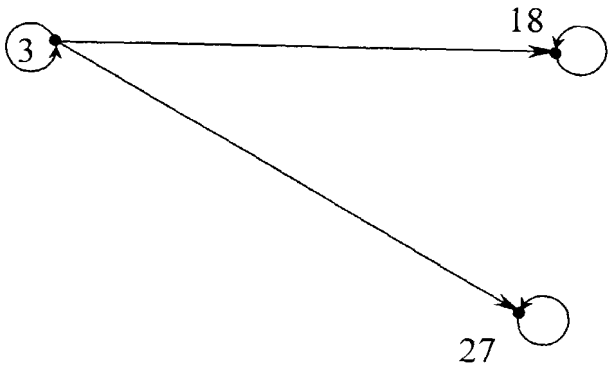
Объясни, почему другие графы не подходят к решению этой задачи.

147. Составь задачу по графам:

А)



Б)



148. Три девочки играют с мячом, каждая из них должна по одному разу бросить мяч в сторону каждой подруги. Сколько всего раз будет подбрасываться мяч? Начерти граф.

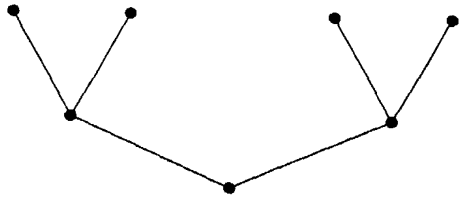
149. Однажды встретились пятеро друзей. Каждый, здороваясь пожал каждому руку. Сколько всего рукопожатий было сделано? Реши задачу двумя способами.

150. В вазе лежали конфеты по 4 сортов. Каждый ребенок взял по 2 конфеты. И у всех оказались отличающиеся наборы конфет. Сколько могло быть детей?

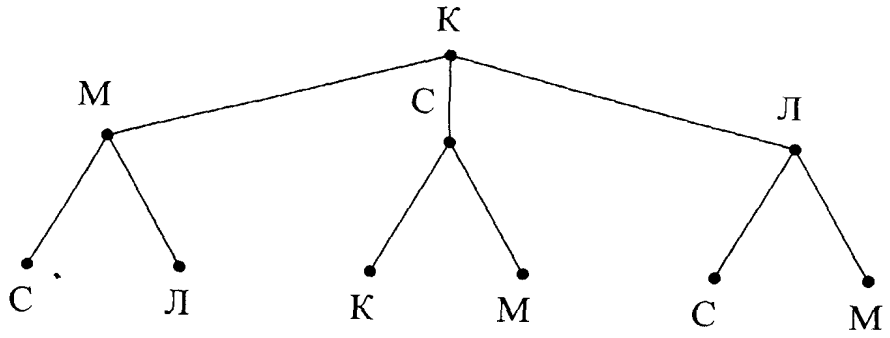
151. В магазине продают сказки народов мира: русские, немецкие, узбекские. Сколько наборов из трех книг можно составить?

152. Сосчитай, сколько слов содержится в заклинании волшебника, если слова начинаются с букв ш и щ, второй буквой могут быть о, е, и, и заканчиваются слова буквами р, к, х.

153. Составь задачу по «граф-дереву»



154. Найдите ошибки, допущенные при составлении «граф-дерева». «Сколькими способами можно поставить на полку куклу, машину, лису и сову?»



155. Аня, Боря и Гена – лучшие лыжники школы. На соревнование нужно составить команду из трех лыжников. Сколькими способами

это можно сделать?

156. В финал турнира по шашкам вышли 2 российских игрока, 2 немецких и 2 американских. Сколько партий будет в финале, если каждый играет с каждым по одному разу, и представители одной страны между собой не играют?

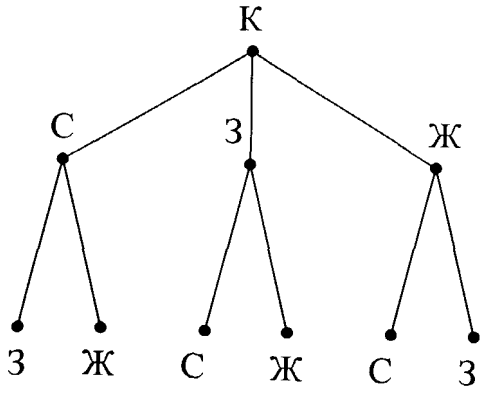
157. Сколько разностей можно составить из чисел 30, 25, 17, 9 если для их составления брать по 2 числа? Будут ли среди них разности, значения которых равны?

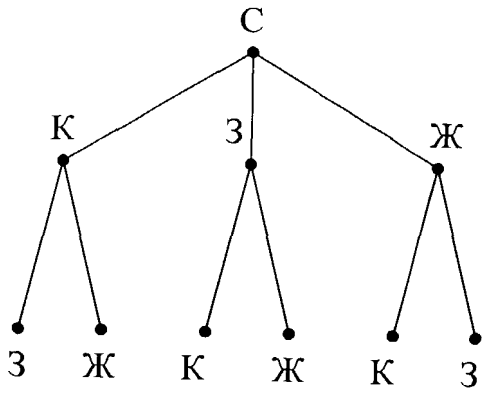
158. Четыре подружки вечером по телефону созваниваются друг с другом. Сколько звонков было сделано, если каждая подружка поговорила с каждой по одному разу?

159. Между шестью странами устанавливается авиационное сообщение. Сколько потребуется составить воздушных линий чтобы жители каждой страны могли прямо долететь на самолете в любую другую страну?

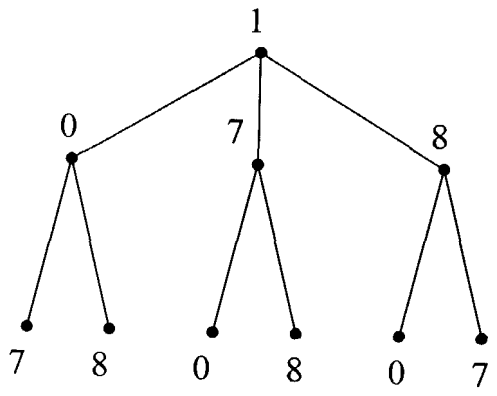
160. В магазине продаются елочные шары пяти видов. Сколько отличных наборов, состоящих из двух разных шаров можно составить?

161. Дополни граф-дерево так, чтобы оно подходило к решению задачи. На фабрике есть стержни для ручек 4-х цветов красного, синего, зеленого и желтого. Сколько различных 4-х цветных ручек можно при этом собрать?



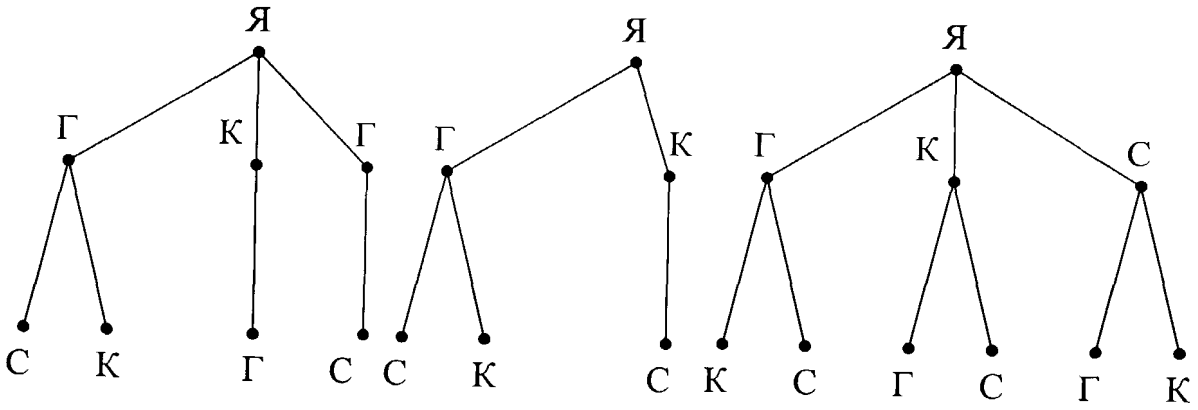


162. Правильно ли построено граф-дерево для задачи: «Какие трехзначные числа можно составить из 1, 0, 7, 8 не повторяя цифр в числе?»



163. Выбери граф-дерево к задаче:

«У мамы есть яблоки, груши, крыжовник и смородина. Сколько различных компотов может приготовить на зиму мама, если будет для одного компота брать по 3 разных компонента?»

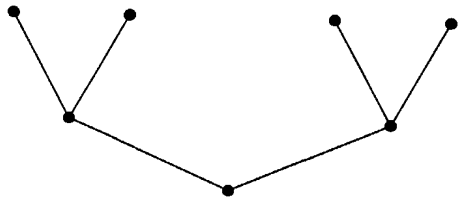


164. Три друга: Алеша, Саша, Коля сели на скамейку в один ряд. Сколькими способами они могли это сделать? Реши задачу разными способами.

165. В столовой на обед приготовили в качестве вторых блюд мясо< котлеты и рыбу. На сладкое – крем, фрукты и пирог. Какие бы

блюда вы выбрали, желая заказать одно второе блюдо и одно на десерт? Сколько всего существует возможных вариантов? Реши задачу разными способами.

166. Составьте задачу по граф-дереву:



167. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если есть материя белого, голубого и красного цвета? Реши задачу двумя способами.

168. Шерлоку Холмсу нужно открыть сейф, для этого он должен отгадать код. Он знает, что код – то трехзначное число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4 и большее числа 400. Какие числа должен проверить Шерлок Холмс, чтобы найти код?

169. Сосчитайте, сколько слов содержится в заклинании волшебника, если слова начинаются с букв Ш или Ц, второй буквой М, Д, Т, И, Е, а оканчивается слова могут буквами Р, К, Н.

170. Три поросенка: Ниф-Ниф, Нуф-Нуф, Наф-Наф. Они захотели построить себе домики, чтобы им было где жить. Выбрали три прекрасных места: у реки, на озере, на горе. Кто из них где будет жить? Они стали перебирать все возможные варианты. Сможете ли вы с помощью «дерева» составить все возможные варианты?

171. В кондитерском магазине продаются пирожные 4-х сортов: «Наполеон», «Эклер», «Песочное», «Слоеное». Мама купила по одному пирожному каждого вида и еще два. Какими они могут быть?

172. Выбери решение к данной задаче.

Например: Сколько различных наборов, состоящих из 1 карандаша, 1 ручки, 1 линейки, 1 набора фломастеров можно составить, если имеются 7 различных цветов (видов) карандашей, 3 (цвета) ручек, 2 вида линеек, 3 вида фломастеров?

Решения: 1. $7 + 3 + 2 + 3 = 15$

2. $7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 126$

173. Дополни задачу данными и реши ее.

На почте открытки с цветами и с животными. Сколькими способами можно выбрать 2 открытки, одну с цветами, другую с животными?

174. Сформулируйте такой вопрос к задаче, чтобы она стала комбинаторной и решите ее.

В магазине 8 цветов мохера и 4 – шерсти.

(Сколькими способами можно выбрать 1 цвет мохера, и 1 шерсти для свитера)

175. Найдите ошибку в записи решения задачи (Исправь ошибку …, Проверь, правильно ли решена задача).

Сколько четырехзначных чисел, в записи которых, цифры не повторяются, можно составить, используя 0, 1, 2, 3?

Решение: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (ч)

Верное решение: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ (ч)

176. Продолжи решение задачи.

Разведчики сказочной страны составляют шифровку в штаб. Они используют 7 букв, 4 знака действия, 5 цифр и 3 геом. фигуры. Сколько различных знаков они могут составить?

$7 \cdot 4$ …

177. Сколькими способами можно составить 3рехцветный флаг, если имеется материя шести различных цветов?

178. Сколькими способами можно составить команду из трех человек,

если нужно выбрать из 7 человек?

179. Сколькими способами можно выбрать из слова «комбинаторика» две буквы, первая из которых гласная, вторая согласная?

180. Сколькими способами можно выбрать из слова «прыжок» три буквы, первые две из которых гласные, третья – согласная?

181. Сколько различных положений могут занять 2 пешки на шахматной доске?

182. В столовой в качестве второго блюда приготовили бифштекс, мясо, рыбу, в качестве гарнира – картофельное пюре, рис, гречку, в качестве третьего блюда – чай, сироп из шиповника, томатный сок. Сколькими способами можно выбрать обед из второго блюда с гарниром и третьего блюда?

183. Сколькими способами Даша, Валя и Галя могут сесть в ряд на скамейку?

184. Сколькими способами могут сесть в ряд на скамейке 4 мальчика?

185. У Коли 20 марок, а у Миши – 15. Сколькими способами они могут обменять одну марку одного мальчика на марку другого?

186. Сколько трехзначных номеров телефонов можно составить из цифр 9, 1, 8?

Четырехзначные? Пятизначные?

187. Можно ли, не записывая все числа, сказать сколько пятизначных чисел

а) можно записать с помощью цифр 6 и 7?

б) можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 0.

188. Составьте из цифр 1, 3, 5, 7 всевозможные двузначные номера для машин сказочной страны. Сколько номеров можно составить?

189. Сколько номеров машин, состоящих из букв и трех цифр можно составить из 7 букв: а, в, с, д, е и 8 цифр: 6, 5, 4, 3, 2, 1, 7, 8?

190. … при условии, что цифры и буквы в одном номере машины не повторяются?

191. Сколько существует прямоугольников, площадь которых 24 см^2, а длина сторон выражается целыми числами?

192. Начерти прямоугольник с периметром 12 см, длины сторон которого целые числа. Верно ли, что такой прямоугольник ни один?

193. Сколькими способами можно составить команду из четырех человек, если нужно выбирать из 7 человек?

194. Сколько букетов можно составить, если брать по одному цветку из вазы:

1 ваза – шафран, пион

2 ваза – лилия, нарцисс, тюльпан

3 ваза – гвоздика, фиалка, незабудка

195. Сколько различных комплектов обедов можно составить если в меню:

1 блюдо: борщ, рассольник

2 блюдо: пельмени, манты, чебуреки

3 блюдо: компот, чай, кисель, сок

Задачи с одним способом решения, но требующие комбинаторных умений.

1. Поставь два знака «+» в нужное место между указанными цифрами так, чтобы получилось данная сумма.

а) 8789924 = 1010

б) 7878787 = 1672

в) 93845693 = 1676

г) 4545454 = 913

д) 5454545 = 1094

е) 4567456 = 775

2. Не меняя расположения цифр в каждом ряду, поставь между ними знаки арифметических действий и скобки так, чтобы равенства были верными.

   1) 1 2 3 = 1
   2) 1 2 3 4 = 1
   3) 1 2 3 4 5 = 1
   4) 1 2 3 4 5 6 = 1
   5) 1 2 3 4 5 6 7 = 1
   6) 1 2 3 4 5 6 7 8 = 1
   7) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1
   8) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 = 1

3. Среди записанных чисел

а) 831024854109

б) 173860998921

в) 949573232434

г) 613416522046

д) 844106164726

Найди

- наименьшее четырехзначное;
- наименьшее четырехзначное, записанное разными цифрами;
- наименьшее больше 4000;
- число, ближайшее к 340;
- наименьшее четырехзначное, записанное различными цифрами;
- число, самое близкое к 7386, после его округления до сотен;
- наибольшее число близкое к 5000.

4. Расставь скобки так, чтобы равенства были верными

а) $40 - 24 + 16 : 4 = 20$

$40 - 24 + 16 : 4 = 8$

$40 - 24 + 16 : 4 = 30$

$40 - 24 + 16 : 4 = 12$

б) $8 + 40 : 8 - 3 \cdot 2 = 7$

$8 + 40 : 8 - 3 \cdot 2 = 0$

$8 + 40 : 8 - 3 \cdot 2 = 28$

$8 + 40 : 8 - 3 \cdot 2 = 24$

в) $24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 27$

$24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 7$

$24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 20$

$24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 48$

$24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 15$

$24 - 18 : 6 + 3 \cdot 2 = 12$

5. Поставь один знак « · » в каждом ряду цифр, чтобы равенства были верными

37254 = 20088

83416 = 35528

43639 = 17004

81237 = 37989

61237 = 7422

12756 = 9072

52869 = 14345

32163 = 6489