

Министерство образования Российской Федерации

Ставропольский государственный университет

на правах рукописи

Самонов Виталий Евгеньевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДВИЖЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ**

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
доцент В.С. Игропуло

Ставрополь – 2003

Оглавление

Основные сокращения и обозначения.....	4
Введение	6
Глава I. Математические модели движения тонкого слоя жидкости и некоторые методы их исследования	10
§ 1.1. Моделирование расходящихся течений на поверхности жидкости ..	10
§ 1.2. Экспериментальные исследования расходящихся течений на поверхности жидкости.....	17
§ 1.3. Анализ возможности использования метода эталонных уравнений при моделировании гидродинамических систем.....	18
§ 1.4. Постановка задач исследования	33
Глава II. Разработка аналитического метода моделирования движения жидкости.....	36
§ 2.1. Основные направления модификации метода эталонных уравнений... ..	36
§ 2.2. Операторное представление метода эталонных уравнений	38
§ 2.3. Анализ нестационарных систем в операторном представлении.....	42
§ 2.4. Общие требования, накладываемые на эталонную систему	43
§ 2.5. Алгоритм практической реализации ММЭУ	44
§ 2.6. Использование ММЭУ при исследовании гидродинамических процессов.....	47
§ 2.7. Анализ некоторых частных случаев гидродинамических систем	51
§ 2.8. Апробация модифицированного метода эталонных уравнений	54
Глава III. Исследование движения тонкого слоя обычной жидкости	61
§ 3.1. Построение математической модели	61
§ 3.2. Создание эталонной математической модели.....	65
§ 3.3. Решение уравнений движения жидкости в эталонной системе	67

§ 3.4. Анализ краевых условий в эталонной системе внутри и вне «ямки» ...	71
§ 3.5. Анализ краевых условий на границе «ямки»	75
§ 3.6. Анализ распределения ПАВ в поверхностном слое.....	76
§ 3.7. Определение соотношений для исследуемой системы.....	79
§ 3.8. Численный анализ полученных результатов.....	82
Глава IV. Математическое моделирование анизотропных течений на примере движения магнитной жидкости	88
§ 4.1. Общий анализ влияния магнитного поля на расходящиеся течения магнитной жидкости	88
§ 4.2. Математическая модель движения тонкого слоя магнитной жидкости	91
§ 4.3. Предварительное преобразование соотношений для исследуемой и моделирующей систем.....	96
§ 4.4. Определение общего вида выражения для скорости жидкости.....	99
§ 4.5. Анализ полученных результатов	101
Заключение.....	106
Список литературы	108
Приложение 1 О возможности разработки «динамических методов» определения коэффициента поверхностного натяжения магнитной жидкости	124
Приложение 2 Некоторые классические задачи движения жидкости	127
Приложение 3 Влияние магнитного поля на движение тонкого слоя магнитной жидкости.....	131
Приложение 4 Качественный анализ влияния поверхностных и магнитных сил на движение магнитной жидкости	138
Приложение 5 Решение уравнения для фазовой функции $R(\sigma, \tau)$	141

Основные сокращения и обозначения

- Метод ВКБ – метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна.
- Метод ПФМГЖ – метод Петрашень-Фока-Миллера-Гуда-Жирнова (то же, что и обобщенный ВКБ-метод).
- Обобщенный ВКБ-метод – обобщенный метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна.
- ММЭУ – модифицированный для исследования гидродинамических систем метод эталонных уравнений.
- ПАВ – поверхностно-активное вещество.

- α – коэффициент поверхностного натяжения.
- Γ – концентрация ПАВ в поверхностном слое.
- η – динамическая вязкость жидкости.
- η' – коэффициент сдвиговой вязкости.
- $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость.
- ρ – плотность жидкости.
- ψ и Ψ – соответственно скалярные решения эталонной и исследуемой систем (потенциалы скорости, волновые функции и т.д.).
- \vec{f} – внешняя объемная сила.
- g – ускорение свободного падения.
- H – толщина недеформированной подложки.
- \vec{H}_0 – напряженность внешнего магнитного поля.
- \hat{h} и \hat{H} – операторы Гамильтона исследуемой и эталонной систем соответственно.
- j_n – поток ПАВ из объема жидкости в поверхностный слой и обратно.
- p и P – давление в жидкости в исследуемой и эталонной системах соответственно.

- p_m и p_u – нормальная и тангенциальная компоненты тензора напряжений в исследуемой системе.
- P_m и P_u – нормальная и тангенциальная компоненты тензора напряжений в эталонной системе.
- $Q(t | \bar{x})$ и $Q_{ij}(t | \bar{x})$ – фазовые множители преобразования $\{X\} \rightarrow \{x\}$.
- \hat{T} – оператор преобразования $\{X\} \rightarrow \{x\}$ (решения эталонной системы в решение исследуемой системы).
- \bar{u} и \bar{U} – соответственно вихревые составляющие скорости движения жидкости в исследуемой и эталонной системах.
- \bar{u}' и \bar{U}' – соответственно потенциальные составляющие скорости движения жидкости в исследуемой и эталонной системах.
- \bar{v} и \bar{V} – скорость движения жидкости в исследуемой и эталонной системах соответственно.
- $\{x\}$, $\{X\}$ – пространства переменных (x_1, x_2, x_3, \dots) и (X_1, X_2, X_3, \dots) исследуемой системы и модели соответственно.
- $\{X, x\} = \frac{X_{xxx}}{X_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{X_{xx}}{X_x} \right)^2$ – производная Шварца.
- (X, Y, Z) , (r, φ, z) , (R, Φ, Z) , (r, θ, φ) , (σ, τ, z) системы координат, использованные в диссертации; соответственно декартова (эталонная система), цилиндрическая, цилиндрическая (эталонная система), сферическая, система координат эллиптического цилиндра.

Введение

В последние несколько лет значительно усилился интерес исследователей к расходящимся течениям, вызванным поверхностными силами. Это объясняется важной ролью таких течений в биологических системах [128], возможностью

использования результатов исследований в медицине [140] и промышленности.

В ряде экспериментальных [128, 170] и теоретических [147, 162] работ показано, что при точечном нанесении на свободную поверхность жидкости поверхностно-активного вещества (ПАВ), вследствие эффекта Марангони, возникает осесимметричное течение жидкой подложки приводящее к ее деформации

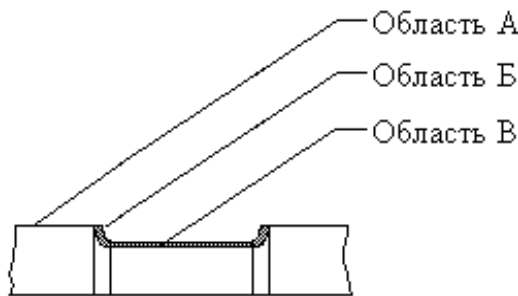


Рис. 1. Схематическое изображение деформации свободной поверхности вследствие движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил

и появлению некоторой устойчивой области в форме «ямки» (рис. 1). Подобная деформация свободной поверхности жидкости возникает и при ее локальном нагреве [117, 118, 161, 163]. В некоторых случаях деформация свободной поверхности столь существенна, что приводит к образованию сухого участка («сухого пятна»).

Существующие математические модели движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил [117, 147, 161–163] разработаны для движения пленки толщиной порядка 0,01 – 1 мкм. В этом приближении не учитываются силы тяжести, а иногда и вертикальное движение жидкости.

Экспериментально была обнаружена деформация [170] и образование сухих пятен в слоях жидкости значительно большей толщины, составляющей 1 – 2,5 мм. Эти процессы не могут удовлетворительно описываться существующими теоретическими моделями пленочного течения.

Поэтому возникает необходимость разработки и исследования математической модели движения тонкого слоя жидкости конечной толщины, учиты-

вающей влияние силы тяжести, возможность движения жидкости в вертикальном направлении и деформацию свободной поверхности. Такая модель будет иметь нелинейный характер, поскольку она описывает гидродинамические процессы в системе со свободной границей.

Нелинейность математической модели и сложность протекающих физико-химических процессов требуют разработки специальных методов ее исследования. Нами предложено применить известный метод математического моделирования – *метод эталонных уравнений* [21, 35, 47]. Существенным достоинством этого метода является возможность [47] моделирования многомерных систем, не допускающих разделения переменных, системами, допускающими такое разделение. Это создает предпосылки к его использованию при исследовании математических моделей нелинейных систем.

Основная идея метода заключается в выражении искомого решения дифференциального уравнения через известное (эталонное) решение. Классический метод эталонных уравнений разработан для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, их систем, а также дифференциальных уравнений в частных производных со скалярным аргументом. Этот метод успешно применяется в квантовой теории и теории распространения волн. Однако непосредственное использование его в гидродинамике невозможно, поскольку уравнения движения жидкости являются векторными.

По этой причине использование метода эталонных уравнений для моделирования движения жидкости требует его предварительной модификации.

Целью диссертации является исследование математической модели движения тонкого слоя жидкости конечной толщины при нанесении на ее поверхность капли поверхностно-активного вещества.

Методы исследования. В процессе выполнения диссертационного исследования использованы: стандартные методы теории операторов; методы решения дифференциальных уравнений в частных производных; вариационный метод Ритца при численном анализе полученных результатов.

С использованием указанных выше методов осуществлена модификация известного метода эталонных уравнений для исследования некоторых гидродинамических систем, его апробация при решении классических задач движения жидкости и применение для изучения движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил.

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. Известный метод эталонных уравнений модифицирован применительно к моделированию гидродинамических процессов и апробирован при решении известных задач течения жидкости.
2. С использованием модифицированного метода эталонных уравнений получено приближенное решение нелинейной задачи движения тонкого слоя жидкости конечной толщины.
3. Теоретически исследована динамика роста экспериментально обнаруженных ранее сухих пятен, образующихся при растекании тонкого слоя жидкости конечной толщины, и определен максимальный радиус этих образований. Показана зависимость их радиуса от толщины слоя жидкости, количества наносимого на ее поверхность ПАВ, коэффициентов поверхностного натяжения жидкости и ПАВ.
4. На примере движения тонкого слоя магнитной жидкости под действием поверхностных сил теоретически исследовано анизотропное течение и показано, что общий характер течения в этом случае сходен с движением обычной жидкости, а образующиеся сухие участки при некоторых условиях принимают эллиптическую форму.

Практическая ценность полученных в работе результатов заключается в следующем:

1. Предложенный модифицированный метод эталонных уравнений может быть применен к моделированию процессов диффузии и теплопроводности, уравнения для которых аналогичны уравнению Навье-Стокса [20].
2. Имеется принципиальная возможность использования разработанного мето-

да при решении нелинейных уравнений параболического типа [82] (уравнение Зельдовича, уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова), описывающих распространение пламени, рост биологических популяций и т.д.

3. Результаты моделирования движения тонкого слоя жидкости конечной толщины могут использоваться в медицине при разработке новых способов доставки жидких лекарственных препаратов [140].
4. Результаты исследования анизотропных течений могут использоваться для разработки динамических методов исследования характеристик анизотропных сред, в частности, поверхностного натяжения магнитных жидкостей.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений.

На защиту выносятся следующие **основные положения**:

1. Математическая модель движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил, учитывающая влияние гравитационных сил и деформацию свободной поверхности.
2. Модифицированный метод эталонных уравнений (ММЭУ) для моделирования гидродинамических систем и его апробация.
3. Результаты исследования математической модели движения тонкого слоя жидкости: собственные функции скорости, анализ условий на границе, переход от эталонной системы к исследуемой.
4. Построенная на основе полученных выражений динамическая компьютерная модель движения тонкого слоя жидкости. Выводы о характере течения жидкости, размерах образующихся сухих участков, зависимости характера протекания процесса от внешних факторов. Сравнение полученных результатов с данными независимого эксперимента.
5. Исследование анизотропных течений на примере движения тонкого слоя магнитной жидкости во внешнем однородном горизонтальном магнитном поле: математическая модель, анализ частных случаев и результаты исследования модели.

Глава I. Математические модели движения тонкого слоя жидкости и некоторые методы их исследования

§ 1.1. Моделирование расходящихся течений на поверхности жидкости

Движение жидкости под действием поверхностных сил возникает либо вследствие неравномерного нагрева ее свободной поверхности (*термокапиллярный эффект Марангони, термокапиллярная конвекция, конвекция Бенара–Марангони*), либо при неоднородном распределении на поверхности других веществ, в частности, ПАВ (*концентрационно-капиллярный эффект Марангони*). Оба фактора приводят к неоднородности поверхностного натяжения вдоль свободной или межфазной поверхности, следствием которой являются возникающие течения.

Термокапиллярная конвекция Марангони исследована в работах [116–118, 121, 133, 141, 144, 151, 154, 155, 159–161, 163, 164, 166] и т.д. Расходящиеся течения в этом случае возникают в результате локального нагрева свободной поверхности жидкости. Экспериментальное теоретическое исследование такого процесса осуществлено К. Огавой и соавт. [152]. Нагрев свободной поверхности жидкости пучком лазера привело к уменьшению поверх-

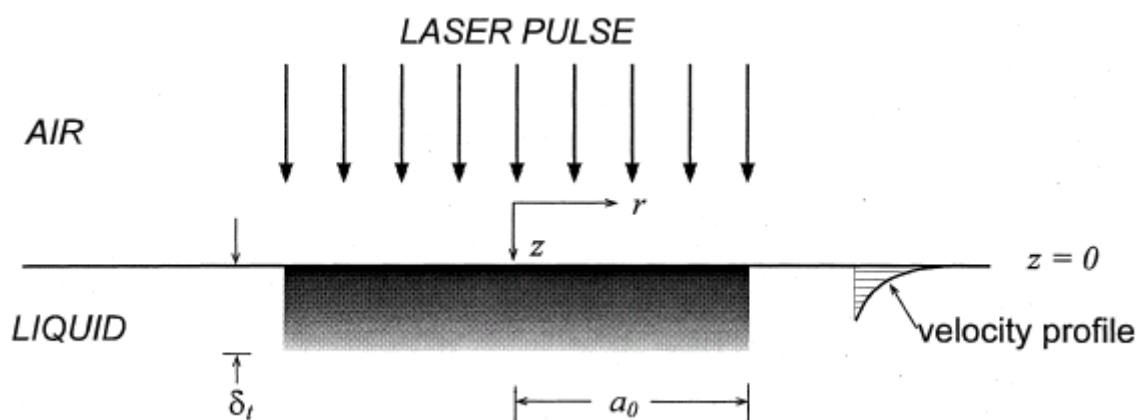


Рис. 2. Схема эксперимента и профиль скоростей движения жидкости вследствие локального нагрева ее поверхности [152]

ностного натяжения в области нагрева и возникновению радиального течения,

изображенного на рис. 2.

Математическая модель движения жидкости этого течения основана на системе уравнения Навье-Стокса [76]

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}, \quad (1.1)$$

уравнения неразрывности

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (1.2)$$

и уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T \quad (1.3)$$

при соответствующих начальных и граничных условиях. Здесь T – температура χ – коэффициент температуропроводности. Также учитывается зависимость коэффициента поверхностного натяжения жидкости от температуры

$$\alpha(T) = \alpha(T_0) + \frac{d\alpha}{dT}(T - T_0), \quad (1.4)$$

имеющая линейный характер.

В [152] предполагается наличие цилиндрической симметрии и отсутствие деформации свободной поверхности. Последнее обосновывается тем, что деформация поверхности значительно меньше глубины жидкого слоя. Кроме то-

го, вследствие нагрева, коэффициент поверхностного натяжения изменяется незначительно и возникающие течения достаточно слабы.

В результате непосредственного численного моделирования получены профили скорости движения жидкости, изображенные на рис. 3. Как видно из ри-

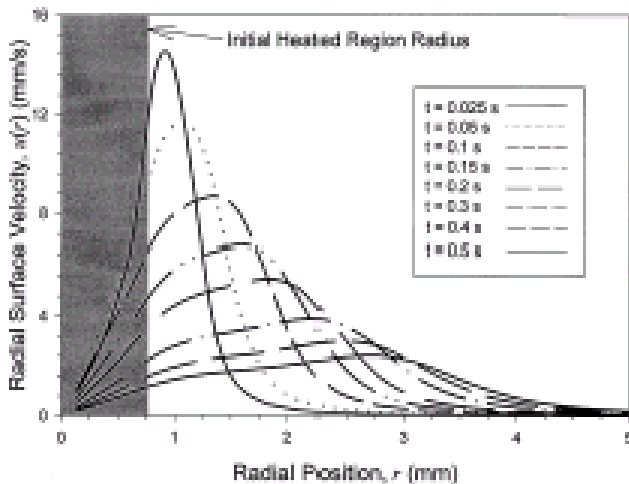


Рис. 3. Зависимость скорости от радиальной координаты [152]

сунка, максимум скорости на границе нагреваемой области с течением времени

перемещается в область большего радиуса, величина максимальной скорости при этом уменьшается.

В статье Г.З. Гершуни, А.А. Непомнящего и М.Г. Веларде [131] моделируется движение полубесконечного слоя жидкости при наличии источника тепла, включающегося по гармоническому закону. Математическая модель также основана на системе уравнений Навье-Стокса, неразрывности и уравнении теплопроводности.

Как и в [152], предполагается отсутствие деформации свободной поверхности жидкости и, кроме того, введено дополнительное предположение об отсутствии вертикальных течений. Исследование построенной модели основано на линейном анализе устойчивости в первом приближении и применении численных методов в более высоких приближениях. В результате исследования получены условия возникновения осцилляторной неустойчивости.

Линейный анализ устойчивости достаточно широко используется при исследовании термокапиллярной конвекции как в первых исследованиях Дж. Пирсона [154], Д. Ниелда [151], М. Такашимы [159], так и в современных работах [114, 116, 121, 133, 155].

Исследование расходящихся течений, возникающих вследствие термокапиллярной конвекции в тонком слое жидкости, выполнено в [117, 118, 161, 163]. Толщина рассматриваемого слоя жидкости имеет величину порядка долей микрометра. Это позволяет пренебречь влиянием гравитации, а в некоторых случаях и градиентом давления.

Математическая модель движения тонкой пленки основана на уравнении неразрывности (1.2), теплопроводности (1.3) и эволюционном уравнении свободной поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} = v_z. \quad (1.5)$$

Уравнение Навье-Стокса (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0. \quad (1.6)$$

Построенные математические модели исследуются в различных приближениях. В [117] выполняется непосредственное численное решение построенной начально-краевой задачи, в [161] при анализе учитываются только Ван-дер-Ваальсовы силы, в [163] математическая модель движения пленки исследуется в приближении смазки.

Одним из результатов исследования [117, 118, 161, 163] явился вывод об образовании «ямки» на свободной поверхности жидкости вплоть до сухого участка. Этот вывод подтвержден экспериментально в статье [118].

Как указано в [117, 163], результаты исследований растекания жидкости вследствие термокапиллярной конвекции применяются в промышленности при осушении полупроводниковых пластин.

Перейдем к анализу концентрационно-капиллярной конвекции Маранго-ни, исследованной в работах [96, 112, 121–124, 126, 127, 129, 132, 145, 146, 149, 150, 153, 156, 158, 167].

Математическая модель этого процесса, также как и при термокапиллярной конвекции, в большинстве случаев основана на уравнениях Навье-Стокса (1.1), неразрывности (1.2) и дополнена уравнением диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)c - D\Delta c = 0. \quad (1.7)$$

Здесь c – концентрация растворенного вещества, D – коэффициент диффузии.

В некоторых случаях [78] уравнение диффузии заменяют уравнением баланса концентрации Γ поверхностно-активного вещества в поверхностном слое:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \vec{v}_\tau - D_s \operatorname{grad} \Gamma) + j_n = 0. \quad (1.8)$$

При одновременном существовании термокапиллярного и концентрационно-капиллярного механизмов конвекции математическая модель движения жидкости под действием поверхностных сил включает как уравнение теплопроводности (1.3), так и уравнение диффузии (1.7) (или уравнение баланса ПАВ (1.8)).

Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от концентрации

ПАВ $\alpha(c)$ имеет более сложный характер, чем определяемая (1.4) зависимость от температуры $\alpha(T)$ в общем случае носит нелинейный характер и при исследовании поверхностных явлений предполагается известной из физико-химических исследований [1].

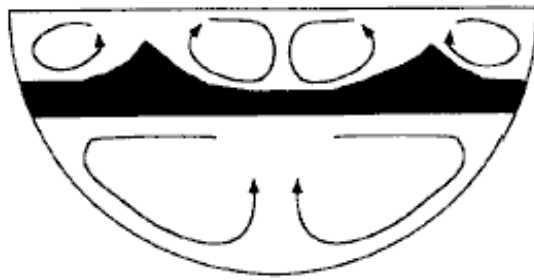


Рис. 4. Схематическое изображение валов, образующихся вследствие движения жидкости под действие поверхностных сил [153]

локального уменьшения толщины жидкой подложки.

Подробный обзор исследований движения тонких жидких пленок, на ко-

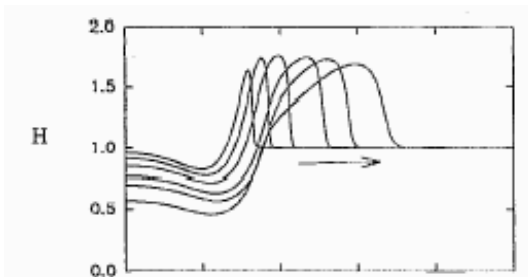


Рис. 5. Эволюция поверхности тонкого слоя жидкости, на поверхность которого наносится ПАВ [140]

торые наносится ПАВ, приведен в [140, 165]. В [140] рассматривается также влияние на движение жидкости растворимого ПАВ. Математическая модель, основанная на системе уравнений (1.2), (1.5), (1.6), построена в пренебрежении силой тяготения и градиентом давления. Исходя из этого авторами по-

лучено нелинейное эволюционное уравнение для толщины слоя $h(t|x)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{v}_x) = 0 \quad (1.9)$$

и концентрации $\Gamma(t|x)$ монослоя ПАВ. Здесь \bar{v}_x – среднее значение горизонтальной составляющей скорости.

Результаты численного решения уравнения (1.9) для профилей свободной поверхности приведены на рис. 5. Отчетливо деформация свободной поверхно-

сти и распространение возмущения с течением времени.

В работе А.Л. Бертоцци, А. Мюнха и М. Ширера [115] рассмотрена задача движения жидкой пленки под действием поверхностных сил на наклонной плоскости (рис. 6). В результате преобразования стандартных гидродинамических уравнений получено эволюционное уравнение формы поверхности:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h^2 - h^3) = -\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right). \quad (1.10)$$

Предполагается, что движение жидкости носит в данном случае характер удар-

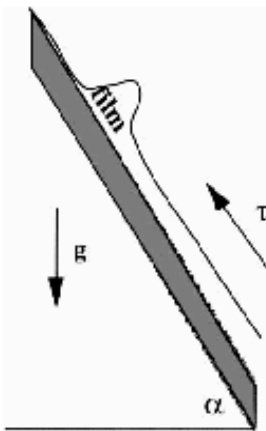


Рис. 6

ной волны. В отмеченной работе выполнен качественный анализ полученного уравнения и его численное решение. Кроме того, исследуются имеющиеся в поведении системы бифуркации.

Нелинейный анализ эволюции свободной поверхности тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости, стратифицированной вследствие неоднородной температуры, выполнен А.В. Порубовым [96]. В частности, им исследована эволюция нелинейных длинных волн с учетом эффекта Марангони на свободной поверхности. Решение задачи сведено к решению нелинейного уравнения второго порядка по времени типа Буссинеска-Бюргера для функции, описывающей возмущение свободной поверхности. Показано, что существуют интервалы таких значений чисел Рэлея и Марангони, при которых это решение может быть сведено к уравнению Кортевега-де-Фриза-Бюргера. Путем качественного анализа математической модели определен характер изменения параметров образующихся волн вследствие вязкости, теплопроводности и термокапиллярности. Определен порог значений чисел Рэлея и Марангони, при которых солитон и периодические волны распространяются без искажений.

Исследование нелинейных уравнений Кортевега-де-Фриза (КдФ), Курamoto-Сивашинского (КС), Бюргера и т.д. эволюции свободной поверхности жидкости вследствие термокапиллярной и концентрационно-капиллярной не-

устойчивости выполнено также в работах [72, 130, 134, 144, 168, 169]. Обширный обзор данного направления представлен в статье Р.Х. Зейтуныяна [169].

Пленочные течения также исследуются в [123, 126, 127, 132].

Отдельно отметим исследования [147, 162], в которых предсказано образование сухого участка в результате расходящегося течения жидкости. В статье [162] поверхность жидкости описывается уравнением Ландау–Левича, которое в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{d^3 h}{dr^3} = h^{-2} - h^{-3}. \quad (1.11)$$

Уравнение вида (1.7) и его модификации весьма часто используются при моделировании течений жидкости в пленках [171].

В работе [147] математическая модель строится на уравнении (1.5) и уравнениях концентрации поверхностно-активного вещества в поверхностном слое, объеме жидкости и в воздухе над поверхностью жидкости. Исследование построенной модели осуществляется в приближении тонкого слоя (пренебрегается влияние гравитации и вертикальных течений) с учетом испарения ПАВ и его растворения в объеме жидкости.

Результатом исследований [147, 162] является вывод о деформации свободной поверхности вплоть до образования сухого участка («осушение Марангони»).

Таким образом, существует ряд теоретических исследований [117, 147, 167–163], предсказывающих деформацию тонкого слоя жидкости вследствие поверхностных сил и образование сухого участка. Поверхностные силы в этом случае образуются как в результате неоднородного нагрева свободной поверхности [117, 161, 163], так и вследствие нанесения на нее незначительного количества ПАВ [147, 162]. Используемые в перечисленных работах математические модели построены в приближении тонкой пленки толщиной до 0,01–1 мкм. По этой причине не учитывается сила тяжести, а в ряде случаев и градиент давления, что позволило авторам существенно упростить анализ.

Имеющиеся исследования растекающихся течений в более глубоких сло-

ях [152], учитывающие влияние гравитационных сил и вертикальные течения, не учитывают деформации свободной поверхности жидкости.

§ 1.2. Экспериментальные исследования расходящихся течений на поверхности жидкости

Экспериментальное исследование расходящихся течений вследствие концентрационного эффекта Марангони выполнено в работах С. Трояна и соавт [128], А.Л. Зуева [170], М. Вонга и Н. Минга [167]. Кроме того, концентрационно-капиллярная конвекция экспериментально исследовалась в [112, 121, 129, 145, 149, 150, 153].

В работе [128] изучено движение фронта тонкой жидкой пленки, растекающейся по поверхности другой жидкости вследствие поверхностных сил. Показано, что при наличии источника постоянной концентрации растекание происходит пропорционально $t^{3/4}$, а для легкоиспаряющихся жидкостей – по закону $t^{1/2}$.

В [167] выполнено экспериментальное исследование движения водной пленки в процессе растворения кристалла $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$. Авторы обнаружили колебания поверхности раствора и периодический отток жидкости от кристалла с образованием сухого участка. В результате такого процесса поверхность кристалла приобретала волнообразную форму. Объяснение авторов основано на эффекте Марангони. Поверхностное натяжение раствора увеличивается с ростом концентрации соли. Рост кристалла вызывает уменьшение концентрации раствора вблизи его поверхности. Это приводит к оттоку жидкости от кристалла. После этого концентрация становится однородной, жидкость возвращается к кристаллу и процесс продолжается.

В [170] исследовано локальное уменьшение толщины подложки вследствие поверхностных сил, приводящее к осушению. В качестве подложки использовалась вода, а в качестве ПАВ – различные растворимые жидкости, а также пары спирт – предельный углеводород (гексан, гептан, декан и т.д.). В результате эксперимента наблюдалось растекание нанесенной капли ПАВ и почти од-

новременное возникновение сухого пятна. Обнаружено уменьшение радиуса «сухого пятна» с ростом толщины жидкой подложки, а также найдено критическое значение толщины, при которой происходит осушение твердого основания. В зависимости от химического состава жидкостей ее толщина варьируется от 1,2 до 2,5 мм.

Очевидно, в этом случае приближение пленки является несправедливым и требуется создание более общей математической модели, которая учитывает действие силы тяготения, движение в вертикальном направлении и т.д. Таким образом, возникает необходимость разработки и исследования математической модели движения слоя жидкости, на поверхность которой наносится небольшое количество (капля) поверхностно-активного вещества.

Представляется интересным исследование особенностей течения тонкого слоя магнитной жидкости под действием поверхностных сил, экспериментальные исследования которого в настоящее время отсутствуют.

§ 1.3. Анализ возможности использования метода эталонных уравнений при моделировании гидродинамических систем

Предложенная в предыдущем параграфе математическая модель движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил с учетом силы тяжести, вертикальных течений и деформации свободной поверхности описывает процессы в системе со свободной границей, что делает ее нелинейной. Поскольку непосредственное исследование таких систем чрезвычайно затруднено, необходимо рассмотреть ряд специальных методов моделирования.

Рассмотрим более подробно один из методов математического моделирования – *метод эталонных уравнений*. Интерес автора к данному методу связан с возможностью (в соответствии с основной идеей метода) выражать искомое решение математической модели некоторой гидродинамической системы через известное решение другой гидродинамической системы, обладающей сходным характером течения.

Как уже отмечалось выше, основная идея данного метода состоит в вы-

ражении искомого решения дифференциального уравнения через решение другого, эталонного уравнения. Впервые такой способ для решения уравнения

$$[k(x)y_x]_x + [\lambda^2 r(x) + q(x)]y = 0 \quad (1.12)$$

при $k(x) > 0$, $r(x) > 0$, $a \leq x \leq b$ был использован Дж. Горном [21]. В результате были получены асимптотические представления решений при больших λ и асимптотические выражения n -го собственного значения для краевых задач Штурма-Лиувилля.

Метод эталонных уравнений был впоследствии развит в работах М.И. Петрашень [94] и Р. Лангера [21], которыми были получены асимптотические представления решений уравнения (1.12) для случая, когда $r(x)$ имеет нуль первого порядка в замкнутом интервале $[a, b]$. Во всех перечисленных работах роль «эталонного» (в [94] – «присоединенного») уравнения играло уравнение вида (1.12) с постоянными коэффициентами.

Обобщение результатов указанных выше работ, исследование природы метода эталонных уравнений и обоснование его справедливости при решении уравнения (1.12), а также ряда частных случаев:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 r(x) + q(x)]y = 0, \quad r(x) = (x - x_0) \cdot r_\alpha(x) \quad (r_\alpha(x) > 0); \quad (1.13)$$

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + [\lambda^2 r(x) + q(x)]y = 0 \quad (r(x) > 0) \quad (1.14)$$

выполнено в 50-е гг. прошлого века академиком А.А. Дородницыным [21].

Уравнению (1.14) в работе [21] уделяется особое внимание, так как к нему относится ряд классических дифференциальных уравнений (уравнение Лежандра, уравнение полиномов Чебышева, Якоби и т.д.), к которым приводит множество задач математической физики.

В качестве эталонного уравнения для (1.13) выбрано уравнение Эйри

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + sU = 0, \quad (1.15)$$

либо, в более общем случае, уравнение вида

$$\frac{d^2U}{ds^2} + s^\alpha U = 0. \quad (1.16)$$

Для уравнения (1.14), которое после замены $p(x) = p^{(0)} + xp^{(1)}(x)$ и преобразования

$$y(x) = x^{-p^{(0)}/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x p^{(1)}(x) dx\right) z(x)$$

принимает вид

$$L(z) = \frac{d^2z}{dx^2} + \left[\lambda^2 \frac{r(x)}{x} + \frac{p^{(0)}}{2} \left(1 - \frac{p^{(0)}}{2}\right) \frac{1}{x^2} + \frac{q^{(1)}(x)}{x} \right] \cdot z = 0,$$

эталонное уравнение выбрано в виде

$$\frac{d^2U}{ds^2} + \left[\frac{p^{(0)}}{2} \left(1 - \frac{p^{(0)}}{2}\right) \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right] U = 0. \quad (1.17)$$

Здесь $q^{(1)}(x) = q + \frac{1}{2} p^{(0)} p^{(1)} + \frac{1}{4} x (p^{(1)})^2 - \frac{1}{2} x p_x^{(1)}$. Во всех перечисленных случаях решение исследуемого уравнения выражается через решение соответствующего эталонного посредством соотношения:

$$y = A(x) \cdot U^{(1)}[\varphi(x)] + B(x) \cdot U^{(2)}[\varphi(x)]. \quad (1.18)$$

Дальнейшая задача сводится к определению вида зависимости $A(x)$, $B(x)$ и $\varphi(x)$. Для этого выражение (1.18) подставляют в исследуемое уравнение (1.13) или (1.14) с учетом соответствующего эталонного уравнения (1.15), (1.16) или (1.17). Наличие в (1.13) и (1.14) большого параметра λ позволяет потребовать отдельного равенства нулю членов, имеющие различный порядок малости. Последнее требование позволяет записать следующее уравнение для $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \cdot [\varphi_x(x)]^2 = \lambda^2 r(x). \quad (1.19)$$

Коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ в этом случае определяются из соотношений:

$$A(x) = \frac{C_1}{\sqrt{\varphi_x(x)}}, \quad B(x) = \frac{C_2}{\sqrt{\varphi_x(x)}}. \quad (1.20)$$

Далее в статье [21] выполняется обоснование справедливости введенного подхода.

Формализм, предложенный А.А. Дородницыным, развит в работе А.И. Курьянова и В.В. Ларичевой [74] при решении системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \lambda a_{11}(t)x_1 + \lambda a_{12}(t)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \lambda a_{21}(t)x_1 + \lambda a_{22}(t)x_2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Преобразовывая систему (1.21) с помощью подстановки

$$y_i = x_i \cdot \exp\left[-\frac{\lambda}{2} \int_0^t (a_{11} + a_{22}) dt\right],$$

авторы [74] приходят к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \lambda^2 \left[r(t) + \frac{b_2(t)}{\lambda} \right] y_i - b_2(t) \frac{dy_i}{dt} = 0. \quad (1.22)$$

В качестве эталонного для (1.22), как и в [21], выбирается уравнение Эйри (1.15), а их решения связываются посредством соотношений

$$y_i = A_i(t) \cdot U_i[\lambda^{2/3} \cdot \varphi(t)]. \quad (1.23)$$

Вид (1.23) сходен с выражениями (1.18), связывающими решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка и соответствующего эталонного уравнения. Последующий анализ, выполненный в [74], также посвящен обоснованию справедливости предложенного подхода.

Таким образом, из [74] следует возможность обобщения метода эталонных уравнений в формализме [21] на системы дифференциальных уравнений, что, в принципе, позволяет провести дальнейшее обобщение данного метода на уравнения в частных производных.

Несколько иной путь моделирования исследуемой системы при помощи эталонной предложен в монографии А. Эрдейи [111]. Здесь осуществляется поиск решения уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 p(x) + r(x, \lambda)] \cdot y = 0, \quad (1.24)$$

выраженного через решение эталонного уравнения

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + \lambda^2 XY = 0. \quad (1.25)$$

В отличие от классической расчетной схемы метода эталонных уравнений, в [111] осуществляется поиск обратного преобразования: от исследуемого уравнения (1.24) к эталонному (1.25). Для этого выполнена замена переменных

$$X = X(x), \quad Y = Q(x)y, \quad (1.26)$$

приводящая (1.24) к виду

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + \frac{1}{X_x} \left(\frac{X_{xx}}{X_x} - 2 \frac{Q_x}{Q} \right) \cdot \frac{dY}{dX} + \left[\frac{\lambda^2 p + r}{X_x^2} + \frac{Q}{X_x^2} \frac{d^2 Q^{-1}}{dx^2} \right] \cdot Y = 0. \quad (1.27)$$

Для того чтобы вид (1.27) приближенно совпадал с видом (1.25), на функции $X(x)$ и $Q(x)$ накладываются требования:

$$\frac{X_{xx}}{X_x} - 2 \frac{Q_x}{Q} = 0,$$

откуда следует

$$Q = \sqrt{X_x}; \quad (1.28)$$

и

$$\frac{p(x)}{X_x^2} = X. \quad (1.29)$$

В результате (1.27) принимает вид

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + \lambda^2 XY = \rho(X)Y,$$

где $\rho(X) = \frac{1}{2} \frac{X_{xxx}}{X_x^3} - \frac{3}{4} \frac{X_{xx}^2}{X_x^4} - \frac{r}{X_x^2}$.

В работе [111] показано, что существует единственная вещественная функция $X(x)$, имеющая непрерывную производную третьего порядка и удовлетворяющая уравнению (1.29).

Дальнейшие исследования, как правило, носят прикладной характер и

связаны с использованием данного метода для решения уравнения Шредингера [35] и уравнения Гельмгольца [4, 81].

Квантовомеханическое приложение метода эталонных уравнений, получившего название обобщенного ВКБ-метода или метода ПФМГЖ, в основном, развивалось независимо от фундаментальных математических работ. С точки зрения квантовой теории метод эталонных уравнений применительно к решению уравнения Шредингера представляет собой обобщение известного метода Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна. Впервые идея о возможности обобщения ВКБ-метода была сделана в 40-е годы прошлого века акад. В.А. Фоком и М.И. Петрашень [35, 94]. Эта работа была продолжена С. Миллером и Р. Гудом [148], а впоследствии – Н.И. Жирновым [35].

Основной задачей метода ПФМГЖ, также как и обычного метода ВКБ, является получение приближенных решений одномерного (или радиального) уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{\hbar^2} p(x)\psi = 0; \quad p(x) = 2\mu[e - u(x)] \quad (1.30)$$

в случае, если известно точное решение эталонного уравнения

$$\frac{d^2\Psi}{dX^2} + \frac{1}{\hbar^2} P(X)\Psi = 0; \quad P(X) = 2\mu[E - U(X)]. \quad (1.31)$$

Физическое обоснование обобщенного ВКБ-метода [35] связано с представлениями об инвариантности формы волновой функции квантовомеханической системы относительно малых изменений ее гамильтониана, для которого указанная функция является собственной. Из приведенных соображений следует принцип моделирования решений уравнения (1.30) для исследуемой системы с помощью точных решений аналогичного уравнения для некоторой другой квантовомеханической системы (1.31), называемой моделирующей (или эталонной).

Волновая функция $\Psi(X)$ эталонной системы преобразовывается в волновую функцию $\psi(x)$ исследуемой путем растяжения или сжатия отдельных ее участков (т.е. путем непрерывного преобразования пространственных масшта-

бов с помощью функции $X(x)$) и одновременного согласования их амплитуд с помощью некоторой функции $Q(x)$, т.е.

$$\psi(x) = Q(x) \cdot \Psi[X(x)]. \quad (1.32)$$

Функция $X(x)$ получила название *фазовой функции*, а функция $Q(x)$ – *фазового множителя*.

Вид соотношений (1.32), полученных на основе физических представлений о поведении волновых функций в исследуемой и эталонной системах, совпадает с выражениями (1.18) и (1.23) для общего случая линейного дифференциального уравнения второго порядка. Таким образом, обобщенный ВКБ-метод можно рассматривать как частный случай метода эталонных уравнений.

Вообще говоря, возможно указать множество путей реализации преобразования (1.32), различающихся способом определения функций преобразования $X(x)$, $Q(x)$ и выбором базисных функций $\Psi(X)$. В зависимости от этого можно получить целый ряд как точных (например, метод фазовых функций), так и приближенных методов решения квантовомеханических задач. Так, в методе фазовых функций [3, 23, 67], широко используемом в теории столкновений, в качестве базисных функций $\Psi(X)$ выбираются волновые функции свободной частицы, а функции преобразования $X(x)$ и $Q(x)$ определяются из двух дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентных уравнению (1.30).

В обобщенном ВКБ-методе выбор базисных волновых функций $\Psi(X)$ не фиксируется, а функции преобразования $X(x)$ и $Q(x)$ определяются так, чтобы приближенные решения уравнения (1.30) при некоторых условиях переходили в соответствующие квазиклассические решения, определяемые при помощи стандартного метода ВКБ. Это оказывается возможным только в случае, если

$$Q(x) = [X_x(x)]^{-1/2}.$$

Тогда искомое преобразование (1.32) имеет вид

$$\psi(x) = [X_x(x)]^{-1/2} \cdot \Psi[X(x)], \quad (1.33)$$

и носит название преобразования Фока-Петрашень [35].

Функция $X(x)$ в преобразовании (1.33) определяется из нелинейного дифференциального уравнения 3-го порядка, впервые полученного в работе [94]:

$$(X_x)^2 P(X) - p(x) + \frac{\hbar^2}{2} \{X, x\} = 0. \quad (1.34)$$

Уравнение (1.34) является основным уравнением обобщенного ВКБ-метода, и получается подстановкой решения в виде (1.33) в исходное уравнение (1.30) с учетом соответствующего эталонного уравнения (1.31). Уравнение Фока-Петрашень (1.34) полностью эквивалентно исходному волновому уравнению (1.30) в том смысле, что точное решение $X(x)$ данного уравнения, подставленное в (1.31), приводит к точному решению уравнения исследуемой системы (1.30).

Поскольку указанное уравнение (1.34) является нелинейным уравнением третьего порядка, как правило, рассматривается задача его приближенного решения и, соответственно, поиска приближенного решения (1.30).

Известны четыре основных способа получения приближенных решения уравнения (1.34):

1. Использование метода последовательных приближений и получение решений в виде равномерных асимптотических разложений по степеням малого параметра \hbar^2 [35].
2. Итерационный метод [38].
3. Метод построения приближенных адиабатических инвариантов, предложенный Лю (цитируется по [35]).
4. Метод построения решений в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов, основанный на применении формализма Н. и П. Фрёманов [108], разработанного применительно к стандартному методу ВКБ.

Наиболее изученным из них является метод последовательных приближений, разработанный в диссертации Н.И. Жирнова [35]. Здесь же показана

возможность использования обобщенного ВКБ-метода при исследовании широкого круга квантовомеханических проблем, требующих решения одномерного стационарного уравнения Шредингера, а также радиального уравнения Дирака (см., в частности, [30, 31, 34]).

В одномерном случае обобщенный ВКБ-метод успешно используется для расчета самых низких одноэлектронных состояний в атомах [28, 29, 32, 36], самых низких колебательно-вращательных уровней в двухатомных молекулах [14, 42], исследования низкоэнергетического рассеяния частиц [44, 45]. Частный случай движения в центральносимметричном поле рассмотрен в работе [33]. Основное внимание здесь уделено радиальному уравнению Шредингера.

Также данный метод успешно используется для расчета колебательно-вращательных спектров двухатомных молекул [14, 28], для анализа электронно-колебательных переходов в двухатомных молекулах [46], для построения приближенной теории туннельного эффекта [25–27], при решении обратной задачи спектроскопии [13, 39], обратной задачи теории потенциала [37, 40, 41], обратной задачи рассеяния [43].

Успешное использование обобщенного ВКБ-метода (метода эталонных уравнений) при решении столь большого числа квантовомеханических задач, согласие с результатами эксперимента свидетельствуют о высокой надежности данного метода.

В более поздних работах Н.И. Жирнова и соавт. [47–51] обобщенный ВКБ-метод модернизирован для решения трехмерного уравнения Шредингера

$$\Delta_x \Psi + \frac{1}{\hbar^2} P^2(x_1, x_2, x_3) \Psi = 0, \quad (1.35)$$

где x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты исследуемой системы, Δ_x – оператор Лапласа в пространстве $\{x\}$, $P^2(x_1, x_2, x_3) = 2\mu[e - u(x_1, x_2, x_3)]$. В качестве модели выбирается уравнение

$$\Delta \Psi + \frac{1}{\hbar^2} P^2(X_1, X_2, X_3) \Psi = 0, \quad (1.36)$$

где $P^2(X_1, X_2, X_3) = 2\mu[E - U(X_1, X_2, X_3)]$, Δ_X – лапласиан в пространстве $\{X\}$.

Следуя основной идее метода, решение для исследуемой системы (1.35) выражается через решение эталонного уравнения в виде:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = Q(x_1, x_2, x_3) \cdot \Psi[X_1(x_1, x_2, x_3), X_2(x_1, x_2, x_3), X_3(x_1, x_2, x_3)], \quad (1.37)$$

где $Q(x_1, x_2, x_3)$ и $X_i(x_1, x_2, x_3)$ – соответственно *фазовые множители* и *фазовые функции*.

Преобразовывая (1.37), можно записать:

$$\frac{\Delta\psi}{\psi} = \frac{\Delta Q}{Q} + \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i \neq k)}}^3 \frac{1}{\Psi^2} \frac{\partial\Psi}{\partial X_i} \frac{\partial\Psi}{\partial X_k} \nabla X_i \nabla X_k + \sum_{i=1}^3 \left[(\nabla X_i)^2 \cdot \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2\Psi}{\partial X_i^2} + \left(\frac{2}{Q} \nabla Q \cdot \nabla X_i + \Delta X_i \right) \cdot \frac{1}{\Psi} \frac{\partial\Psi}{\partial X_i} \right]. \quad (1.38)$$

В работе [47] на (1.38) накладываются требования

$$\frac{2}{Q} \nabla Q \cdot \nabla X_i + \Delta X_i = 0, \quad (1.39a)$$

$$\nabla X_i \nabla X_k = 0, \quad (i \neq k), \quad (1.39b)$$

вытекающие из физических соображений. Соотношение (1.39b) выражает также ортогональность системы координат (X_1, X_2, X_3) .

При выполнении условий (1.39) задача решения уравнения Шредингера для исследуемой системы сводится к решению уравнения

$$\left[(\nabla X_1)^2 + (\nabla X_2)^2 + (\nabla X_3)^2 \right] \cdot P^2(X_1, X_2, X_3) - p^2(x_1, x_2, x_3) - \hbar^2 \frac{\Delta Q}{Q} = 0. \quad (1.40)$$

В случае, если в качестве модели выбрано уравнение, допускающее разделение переменных:

$$\Psi(X_1, X_2, X_3) = \prod_{i=1}^3 \Psi_i(X_i),$$

уравнение (1.40) принимает более простой вид:

$$\left[P_1(X_1) \nabla X_1 + P_2(X_2) \nabla X_2 + P_3(X_3) \nabla X_3 \right]^2 - p^2(x_1, x_2, x_3) - \hbar^2 \frac{\Delta Q}{Q} = 0.$$

(1.41)

Уравнения (1.40) и (1.41) являются основными уравнениями обобщенного ВКБ-метода в трехмерном случае.

Решение системы (1.39а) относительно $\frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X_i}$ имеет вид

$$\frac{1}{Q} \cdot \frac{dQ}{d\vec{r}} = -\vec{A}, \quad (1.42)$$

где $\vec{A} = \frac{1}{2J} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} (J_{k1}\vec{i}_1 - J_{k2}\vec{i}_2 + J_{k3}\vec{i}_3) \Delta X_k$; $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ – орты прямоугольной декартовой системы координат, $J(x_1, x_2, x_3) = \det \|\partial X_i / \partial x_j\|$ – якобиан от X_i по x_j , J_{ij} – его миноры.

Тогда для (1.42) можно записать

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \exp\left(-\int \vec{A} \cdot d\vec{r}\right), \quad (1.43)$$

а решение уравнений (1.40) и (1.41) сводится, соответственно, к решению уравнений

$$\left[(\nabla X_1)^2 + (\nabla X_2)^2 + (\nabla X_3)^2 \right] \cdot P^2(X_1, X_2, X_3) - p^2(x_1, x_2, x_3) + \hbar^2 (\operatorname{div} \vec{A} - A^2) = 0, \quad (1.44)$$

$$\left[P_1(X_1) \nabla X_1 + P_2(X_2) \nabla X_2 + P_3(X_3) \nabla X_3 \right]^2 - p^2(x_1, x_2, x_3) + \hbar^2 (\operatorname{div} \vec{A} - A^2) = 0. \quad (1.45)$$

В дальнейшем, в работах [47, 48] найден общий вид волновых функций и выполнено асимптотическое разложение решения уравнения (1.45) в пределе $\hbar \rightarrow 0$ и рассматривается нулевое приближение. В последующей работе [49] рассмотрены два конкретных примера разработанного метода к исследованию связанных состояний многомерных квантовомеханических систем. В частности, исследовано решение задачи квантового гармонического осциллятора (допускающей разделение переменных) и квантового ангармонического осциллятора (задачи, не допускающей разделение переменных).

Работа [50] посвящена поиску более высоких приближений обобщенного

ВКБ-метода в трехмерном случае, а в [51] рассмотрены особенности решения данным методом уравнения Шредингера в цилиндрических и сферических координатах.

Важным выводом работ [47–51] является положение о принципиальной возможности выражать решение уравнения, не допускающего разделения переменных, через решение соответствующего эталонного уравнения, допускающего такое разделение. Данный факт свидетельствует о возможном использовании модифицированного метода эталонных уравнений при решении нелинейных начально-краевых задач.

В большинстве случаев решение основного уравнения обобщенного ВКБ-метода в одномерном случае (1.34), также как и уравнений (1.44), (1.45) – в многомерном случае, строится в виде асимптотического разложения по малому параметру \hbar^2 . В связи с этим кратко рассмотрим исследования, посвященные построению асимптотических решений.

Значительный вклад в создание общей математической теории построения асимптотических решений линейных и нелинейных дифференциальных уравнений внес академик В.П. Маслов [83–89]. Им, в частности, рассмотрены операторные методы построения асимптотических разложений уравнения Шредингера [85–87], которые в дальнейшем были обобщены на линейные и нелинейные уравнения в частных производных [83–89], в том числе на уравнение Навье-Стокса, при наличии в последнем малого параметра [88]. Вопросы построения асимптотических решений в методе эталонных уравнений рассмотрены также М.Ф. Федорюком [106].

Метод эталонных уравнений для решения уравнения Шредингера и его математического обобщения развивается в последующем С.Ю. Славяновым [102]. В данной монографии [102] выполнено построение асимптотик решения вблизи особых точек (точек перехода) с помощью, так называемых, «эталонных» функций. В качестве последних в работе рассматриваются функции Эйри, цилиндрические функции и т.д. Кроме того, в данной монографии рассмотре-

ны конкретные физические проблемы, исследованные на основе данного метода: нормальные волны в океаническом волноводе, экспоненциальное расщепление спектра, квазистационарные состояния, одномерная задача рассеяния, зонный оператор и т.д.

Помимо приближенного решения уравнения Шредингера метод эталонных уравнений, как отмечалось выше, успешно развит для решения уравнения Гельмгольца в многомерном [4] и одномерном [81] случаях. В частности, в [4] рассматривается уравнение вида

$$\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} u = 0 \quad (1.46)$$

и его более сложная модификация

$$\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} u = \delta(M - M_0). \quad (1.47)$$

Основное содержание [4] связано с исследованием асимптотики данных уравнений при $\omega \rightarrow \infty$.

В частности, в случае круговой симметрии, рассмотрено решение уравнение

$$\omega^{4/3} A \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \omega^{2/3} B \frac{\partial u}{\partial v} + C \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \omega^{-2/3} D \frac{\partial u}{\partial s} + \omega^2 E u = 0, \quad (1.48)$$

где A, \dots, E – известные функции s и v , $v = n\omega^{2/3}$.

В качестве эталонного также выбирается уравнение Гельмгольца, имеющее в полярных координатах r, φ вид:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{\omega^2}{c^2} u = 0. \quad (1.49)$$

Решение (1.49) имеет вид:

$$u(r, \varphi) = J_\zeta \left(\frac{\omega}{c} r \right) \exp(i\zeta\varphi), \quad (1.50)$$

где ζ – постоянная разделения, $J_\zeta \left(\frac{\omega}{c} r \right)$ – функция Бесселя, которую в данном случае удобно представить в виде асимптотического разложения:

$$J_{\zeta}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{T_r}{\zeta^2 - (kr)^2} \right]^{1/4} \left\{ \frac{d}{dz} \left[z + \frac{p_1(z)}{(kr)^2} + \dots + \frac{p_n(z)}{(kr)^{2n}} + O\left[(kr)^{-2n-2}\right] \right] \right\}^{-1/2} \times$$

$$\times v \left[T_r + \frac{p_1(z)}{(kr)^{4/3}} + \dots + \frac{p_n(z)}{(kr)^{2n-2/3}} + O\left[(kr)^{-2n-2/3}\right] \right]$$
(1.51)

Тогда решение уравнения (1.48) для исследуемой системы представлено в виде

$$u(s, v) = \text{const} \cdot \exp \left\{ i \sum_{m=3}^{M-1} a_m(s, v) \omega^{-m/3} + O(\omega^{-M/3}) \right\} \times$$

$$\times U \left\{ i \sum_{m=0}^{M-1} b_m(s, v) \omega^{-m/3} + O(\omega^{-M/3}) \right\},$$
(1.52)

где $a_m(s, v)$ и $b_m(s, v)$ – искомые полиномы относительно v с коэффициентами, зависящими от s ; $U(Z)$ – функция Эйри. Дальнейшая задача сводится к поиску функций $a_m(s, v)$ и $b_m(s, v)$, которые представляются в виде асимптотических разложений.

В упоминавшейся работе [81] метод эталонных уравнений используется для решения уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 q(x, \lambda) y = 0, \quad (1.53)$$

где λ – большой параметр. Роль эталонного для (1.53) играет либо соответствующее уравнение с постоянными коэффициентами¹

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + \lambda^2 Y = 0, \quad (1.54)$$

либо уравнение Эйри (1.15).

В соответствии с расчетной схемой метода решение (1.53) соответственно выражается через решения эталонных уравнений следующим образом:

$$y = aA(x, \lambda) \exp[i\lambda X(x)] + bB(x, \lambda) \exp[-i\lambda X(x)] \quad (1.55a)$$

¹ Решение эталонного уравнения (1.54) имеет вид $Y = a \exp(i\lambda X) + b \exp(-i\lambda X)$.

и

$$y(x) = [X'(x)]^{-1/2} \cdot U(-k^{2/3} \cdot X(x)), \quad (1.556)$$

где $U(x)$ – функция Эйри.

Уравнение (1.53) описывает процессы распространения волн в неоднородной плазме, падения плоской волны на неоднородный слой плазмы [17]; а также используется в расчетах открытых волноводов и резонаторов [11].

Итак, метод эталонных уравнений представляет собой эффективный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. В прикладном отношении указанный метод наиболее успешно применяется при решении уравнения Шредингера [35, 47] и уравнения Гельмгольца [4]. В последних двух случаях метод эталонных уравнений обобщен на исследование уравнений в частных производных.

Этот факт также указывает на принципиальную возможность использования данного метода при исследовании математических моделей гидродинамических процессов. Однако имеется существенное различие между многомерным уравнением Шредингера и уравнением Гельмгольца, с одной стороны, и уравнениями гидродинамики – с другой. Уравнения Шредингера и Гельмгольца с математической точки зрения представляют стационарные скалярные уравнения. Уравнения же гидродинамики, в общем случае, носят нестационарный векторный характер. Это требует обобщения данного метода и его расчетной схемы на случай нестационарных векторных задач вообще и системы гидродинамических уравнений, в частности.

За основу такого обобщения целесообразно взять расчетную схему обобщенного ВКБ-метода. Это вызвано следующими причинами:

1. Соотношения, выражающие преобразование решения эталонного уравнения в решение исследуемой системы (1.30) и (1.37) в наибольшей степени соответствуют аналогичным выражениям (1.18) фундаментальных математических исследований.
2. Расчетная схема обобщенного ВКБ-метода позволяет осуществлять модели-

рование систем, не допускающих разделения переменных, системами, допускающими такое разделение [47]. Это может быть весьма ценным при исследовании нелинейных математических моделей.

3. Расчетная схема метода эталонных уравнений, конкретизированная для решения уравнения Шредингера, обобщена на исследование трехмерных систем.
4. Выражения преобразования решения моделирующей системы в решение исследуемой системы (1.30) и (1.37), в отличие от (1.52), не содержат малых параметров.

По мнению автора, основная идея метода эталонных уравнений не сводится только к поиску соотношений, выражающих решение исследуемой системы через решение модели в виде асимптотических разложений, тенденция использования которых сложилась в большинстве работ. Данный факт отмечен в диссертации Н.И. Жирнова [35], где рассмотрено несколько способов решения основного уравнения обобщенного ВКБ-метода (1.34). Это дает принципиальную возможность не использовать в процессе решения малых параметров, что также повышает значимость данного метода.

В некоторых исследованиях [93] под методом эталонных уравнений понимают метод приближенного решения интегральных уравнений типа Вольтерра. Это вносит некоторую неясность в терминологию. Поэтому далее в настоящей диссертации под методом эталонных уравнений понимается метод приближенного решения дифференциальных уравнений в смысле [4, 21, 35].

§ 1.4. Постановка задач исследования

Проведенный обзор исследований движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил показал, что существующие математические модели [117, 141, 161–163] этого процесса справедливы для слоев толщиной 0,01–1 мкм. При исследовании растекающихся течений в слоях толщиной порядка миллиметров необходимо учитывать действие силы тяжести, наличие вертикальных течений и т.д.

При этом, существующие математические модели, описывающие расходящиеся течения в слоях жидкости большой толщины [152] в большинстве случаев не учитывают деформацию свободной поверхности.

Таким образом ни математические модели пленочных течений, ни модели слоя бесконечной толщины не описывают наблюдаемую экспериментально [170] деформацию слоя жидкости толщиной 1–2,5 мм вследствие расходящихся течений. По этой причине возникает необходимость разработки и исследования более общей математической модели движения тонкого слоя жидкости, учитывающей, с одной стороны, влияние силы тяжести и вертикальное течение жидкости, а, с другой стороны, – деформацию свободной поверхности жидкости.

Исследование этой модели традиционными методами (как аналитическими, так и численными) затруднено из-за нелинейности происходящих процессов. По этой причине необходимо использовать специальные методы моделирования.

Как показывает проведенный анализ, представляется перспективным использование при исследовании математических моделей гидродинамических процессов вообще и течения под действием поверхностных сил, в частности, известного метода эталонных уравнений. Однако к настоящему времени метод эталонных уравнений разработан только для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторых скалярных уравнений в частных производных, что требует его модификации на решение системы уравнений неразрывности и Навье-Стокса.

Кроме этого, возможен анализ движения тонкого слоя магнитной жидкости под действием поверхностных сил, находящейся во внешнем однородном горизонтальном магнитном поле. Решение данной задачи может быть полезным при разработке «динамических» методов измерения поверхностного натяжения магнитных жидкостей (см. Приложение 1).

Учитывая изложенное выше, сформулируем основные **задачи** диссертационного исследования:

1. Преобразовать известные гидродинамические модели для описания движения слоя жидкости конечной толщины под действием поверхностных сил с учетом влияния гравитации, многомерного характера течений и деформации свободной поверхности.
2. Разработать модифицированный метод эталонных уравнений (ММЭУ) для решения гидродинамических задач.
3. Исследовать математическую модель движения тонкого слоя жидкости, определить поле скоростей и описать деформацию свободной поверхности.
4. Исследовать анизотропное течение на примере движения тонкого слоя магнитной жидкости под действием поверхностных сил во внешнем однородном горизонтальном магнитном поле.

Глава II. Разработка аналитического метода моделирования движения жидкости

§ 2.1. Основные направления модификации метода эталонных уравнений

Перейдем к модификации метода эталонных уравнений для исследования гидродинамических процессов. Поскольку существующие расчетные схемы этого метода пригодны только при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений [21], их систем [74] и многомерных стационарных скалярных уравнений [47], возникает необходимость его обобщения на решение векторных уравнений Навье-Стокса и неразрывности.

Как показано выше, за основу модификации метода целесообразно взять расчетную схему обобщенного ВКБ-метода. Указанная схема разработана для многомерного случая и позволяет моделировать системы, не допускающие разделения переменных, системами, переменные в которых разделяются.

Поставим задачу разработки модифицированного метода эталонных уравнений на исследование нестационарных и векторных начально-краевых задач. Очевидно, для этого необходимо иметь определенную связь между скалярными и векторными уравнениями. Это возможно, в случае представления скалярного и векторного дифференциальных уравнений в наиболее общей, операторной, форме. Для этого введем некоторый (в общем случае – многомерный) дифференциальный оператор \hat{L} [87], позволяющий представить исследуемое уравнение, решение которого неизвестно, в виде:

$$\hat{L}\psi = 0 \quad (2.1a)$$

или

$$\hat{L}\vec{u} = 0. \quad (2.1б)$$

Соотношения (2.1a) и (2.1б) записаны, соответственно, в скалярном или векторном пространствах.

Операторное представление вида (2.1) обладает рядом существенных преимуществ по сравнению с традиционной записью дифференциального уравнения:

1. Запись исследуемого и эталонного уравнений в операторном виде позволяет глубже понять математическую природу метода и выявить связь между их решениями.
2. Операторное представление является более общим, поскольку имеет одинаковый вид для различных уравнений, а переход к конкретному уравнению осуществляется путем записи в явном виде оператора \hat{L} .
3. Переход от скалярного уравнения к векторному в данном случае может быть осуществлен заменой скалярной функции, на которую действует оператор, векторной функцией¹. При этом характер действия оператора \hat{L} на скалярную и векторную функции может быть сходным.

Тем не менее, несмотря на отмеченные преимущества, представление исследуемого и эталонного уравнений в операторном виде существенно осложняет практические расчеты. По этой причине представляется целесообразным далее совершить преобразование от операторного представления ММЭУ к более традиционному, используемому в стандартной схеме метода [21] и в обобщенном ВКБ-методе [35, 47, 148]. В рамках последнего решение исследуемой системы выражается через решение эталонной системы при помощи соотношений вида (1.37), что позволяет относительно просто разработать алгоритм реализации расчетной схемы метода, необходимого для практического использования.

Полученный модифицированный метод эталонных уравнений, в принципе, может использоваться при решении нестационарного векторного уравнения произвольного вида. Конкретизируем его гидродинамических систем, матема-

¹ В принципе, таким же образом возможно осуществить обобщение метода эталонных уравнений и на тензорные уравнения. Однако, последнее не входит в число задач настоящего исследования.

тические модели которых основаны на системе уравнений Навье-Стокса и неразрывности. Кроме того, дополнительно рассмотрим важные частные случаи, соответствующие различным моделирующим системам.

§ 2.2. Операторное представление метода эталонных уравнений

Как показывает анализ, выполненный в § 1.3, метод эталонных уравнений наиболее широко применяется при исследовании квантовомеханических систем, и решении стационарного уравнения Шредингера (обобщенный ВКБ-метод [35, 47, 149]). В связи с этим представляется целесообразным построить операторное представление метода для данного случая, а затем обобщить его на уравнение произвольного вида.

Согласно [35, 149], запишем уравнение для исследуемой системы в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi = 0 \quad (2.2a)$$

(для одномерного случая) или, в соответствии с [47],

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - U(x_1, x_2, x_3)]\psi = 0 \quad (2.2б)$$

– в трехмерном случае.

При этом в качестве модельной задачи выбирается уравнение

$$\frac{d^2\Psi}{dX^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E_0 - W(X)]\Psi = 0 \quad (2.3a)$$

или, соответственно,

$$\Delta\Psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E_0 - W(X_1, X_2, X_3)]\Psi = 0, \quad (2.3б)$$

которые имеют точные решения.

Соотношения, описывающие переход от решений эталонной системы (2.3a) и (2.3б) к решениям исследуемой системы (2.2a) и (2.2б) имеют соответственно вид

$$\psi(x) = Q(x) \cdot \Psi(X(x)) \quad (2.4a)$$

и

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = Q(x_1, x_2, x_3) \cdot \Psi(X_1(x_1, x_2, x_3), X_2(x_1, x_2, x_3), X_3(x_1, x_2, x_3)). \quad (2.46)$$

С точки зрения теории операторов, уравнения (2.2) и (2.3) можно записать в виде

$$\hat{h}\psi = 0 \quad (2.5)$$

для исследуемой системы и

$$\hat{H}\Psi = 0 \quad (2.6)$$

– для моделирующей системы. Здесь \hat{h} и \hat{H} – операторы Гамильтона соответствующих систем. Очевидно, оператор \hat{h} действует на волновые функции, определенные в координатном пространстве $\{x\}$, а оператор \hat{H} – на функции, определенные в пространстве $\{X\}$. Будем считать, что оператор \hat{h} задан (вид оператора \hat{h} определяет исследуемую систему), а \hat{H} соответствует выбранной модели (вид оператора \hat{H} определяет эталонную систему).

Введем оператор \hat{T} , преобразующий в соответствии с (2.4) решение модели Ψ в решение исследуемой системы ψ :

$$\psi = \hat{T}\Psi. \quad (2.7)$$

Очевидно, данный оператор помимо непосредственного преобразования волновых функций задает преобразование пространств, в которых эти функции определены: $\{X\} \rightarrow \{x\}$. Следовательно, уравнение (2.5) для ψ можно рассматривать как образ [73] уравнения (2.6) для Ψ в пространстве $\{x\}$.

Составим уравнение для оператора \hat{T} . Подставляя (2.7) в (2.5), имеем:

$$\hat{h}\hat{T}\Psi = 0.$$

Заметим, что хотя правые части последнего уравнения и соотношения (2.6) равны нулю, приравнивать их **нельзя**, поскольку указанные выражения записаны в различных пространствах. Исходя из физических соображений, наложим на преобразование \hat{T} дополнительное ограничение, связанное с переводом нулей пространства $\{X\}$ в нули пространства $\{x\}$: $0_x = \hat{T}0_X$. Тогда имеем:

$$\hat{T}\hat{H} = \hat{h}\hat{T}. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) представляет собой *уравнение для оператора \hat{T}* , преобразующего решение эталонной системы, определяемой выбором оператора \hat{H} , в решение исследуемой системы, определяемой заданным оператором \hat{h} . В соответствии с этим задача нахождения решения уравнения (2.5) для исследуемой системы сводится к выбору подходящей моделирующей системы (к выбору \hat{H}), решение для которой известно или ищется дополнительно, и решению уравнения (2.8) для оператора преобразования \hat{T} .

Найдем связь между операторами Гамильтона для исследуемой системы и модели. Из уравнения (2.8) следует:

$$\hat{H} = \hat{T}^{-1}\hat{h}\hat{T} \quad \text{или} \quad \hat{h} = \hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1}. \quad (2.9)$$

Здесь \hat{T}^{-1} – оператор, обратный \hat{T} , осуществляющий отображение $\{x\} \rightarrow \{X\}$. Вид соотношения (2.9) полностью совпадает с выражением для преобразования операторов в случае перехода от одного квантовомеханического представления к другому [75]. Однако, поскольку в нашем случае на оператор \hat{T} не наложено требование унитарности, соотношение (2.9) носит более общий характер.

Далее рассмотрим произвольное операторное уравнение

$$\hat{a}_1\psi = 0 \quad (2.10a)$$

или

$$\hat{a}_1\vec{u} = 0, \quad (2.10б)$$

записанное соответственно для скалярной или векторной функции.

Будем предполагать, что оператор \hat{a}_1 в общем случае зависит от времени, т.е. задача (2.10) носит нестационарный характер. Оператор \hat{a}_1 действует в координатном пространстве $\{x\}$, его вид известен, а функции $\psi(t|\vec{x})$ или $\vec{u}(t|\vec{x})$ являются искомыми функциями задачи.

Соответствующие эталонные уравнения имеют вид:

$$\hat{A}_1\Psi = 0 \quad (2.11a)$$

или

$$\hat{A}_1 \bar{U} = 0. \quad (2.11б)$$

Оператор \hat{A}_1 характеризует выбранную модель и действует в пространстве $\{X\}$. Решение уравнений (2.11) считается известным.

Введем оператор \hat{T} , осуществляющий отображение $\{X\} \rightarrow \{x\}$ и преобразующий решения эталонных уравнений (2.11) в соответствующие решения исследуемой системы (2.10):

$$\psi = \hat{T}\Psi \quad \text{или} \quad \bar{u} = \hat{T}\bar{U} \quad (2.12)$$

Выполняя преобразования, аналогичные проделанным при выводе (2.8), получим

$$\hat{T}\hat{A}_1 = \hat{a}_1\hat{T}. \quad (2.13)$$

Кроме того, имеют место выражения

$$\hat{A}_1 = \hat{T}^{-1}\hat{a}_1\hat{T} \quad \text{или} \quad \hat{a}_1 = \hat{T}\hat{A}_1\hat{T}^{-1}. \quad (2.14)$$

Таким образом, соотношения, выражающие связь исследуемой системы и модели, полученные для частного случая систем, описываемых уравнением Шредингера, оказываются справедливыми и для произвольной пары: исследуемая система – эталонная система. Аналогичный вид имеет и уравнение для оператора перехода \hat{T} .

Одинаковый вид выражений (2.13) и (2.8), а также (2.14) и (2.9), подтверждает сделанные выше предположения о возможности обобщения основной идеи и расчетной схемы как метода эталонных уравнений [21], так и обобщенного ВКБ-метода [35, 47] на решение произвольного дифференциального уравнения в скалярном или векторном функциональных пространствах. Это, в частности, позволяет использовать в дальнейшем анализе основные леммы, теоремы и следствия, доказанные при обосновании метода эталонных уравнений в «классической постановке». Также, по всей видимости, сохранится общий вид выражений, связывающих решение исследуемой системы с решением модели.

Кроме того, в ММЭУ будет иметь место и ряд особенностей метода эталонных уравнений. В частности, можно ожидать, что расчетная схема модифи-

цированного метода эталонных уравнений также позволит выбирать в качестве модели для начально-краевых задач, не допускающих разделение переменных, задачи, допускающие разделение переменных.

§ 2.3. Анализ нестационарных систем в операторном представлении

Отдельно рассмотрим случай, в котором зависимость от времени решенной исследуемой и моделирующей систем имеет одинаковый характер и может быть выделена явным образом. Ограничимся анализом таких систем, для которых зависимость от времени описывается первой производной. Математические модели этого типа соответствуют системам, в которых имеет место перенос вещества или энергии, а также гидродинамическим системам, исследуемым ниже. Рассматриваемую задачу несложно обобщить на модели, в которых зависимость от времени описывается производными более высокого порядка.

Вводя операторы

$$\hat{a} = \frac{\partial}{\partial t} - \hat{a}_1 \quad \text{и} \quad \hat{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1,$$

представим уравнения (2.10) и (2.11) в виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{a} \psi, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \hat{a} \bar{u}; \quad (2.15)$$

и

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{A} \Psi, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \hat{A} \bar{U}. \quad (2.16)$$

Здесь оператор \hat{a} не зависит от времени явно и считается известным. Нетрудно показать, что уравнение (2.13) для оператора преобразования \hat{T} принимает вид

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \hat{T} \hat{A} - \hat{a} \hat{T} = 0. \quad (2.17)$$

Зависимость оператора \hat{T} от времени в уравнении (2.17) позволяет выбирать в качестве эталонного уравнение с независимым от времени оператором \hat{A} , поскольку неявная зависимость от времени оператора \hat{a} компенсируется зависимостью от времени оператора \hat{T} . Преимущества данного подхода показаны в

§ 2.7 и иллюстрируются в главе III.

Таким образом, задача решения операторных уравнений (2.10) или (2.15) для исследуемой системы сводится к решению соответствующих модельных задач (2.11) или (2.16) и поиску оператора преобразования \hat{T} , являющегося решением уравнения (2.13) или его частного случая, уравнения (2.17).

Если известно точное решение модельной задачи, а также точное решение уравнений для \hat{T} , мы получаем *точное* решение для исследуемой системы (2.10) или (2.15). Преимущество данного подхода состоит в разделении задачи решения уравнения (2.10) или (2.15) на две подзадачи, связанные с решением соответствующего эталонного уравнения (2.11) или (2.16) и поиском оператора преобразования \hat{T} . При оптимальном выборе модели такой подход может существенно упростить процесс решения.

В случае, если уравнение (2.11) или (2.16) имеет точное решение, а оператор \hat{T} найден приближенно, решение исследуемой системы (2.10) или (2.15) носит приближенный характер. Такой способ получения приближенного решения для исследуемой системы наиболее часто используется в практических приложениях [35, 47].

Кроме того, возможно, что и решение эталонного уравнения (2.11) или (2.16), и решение уравнения (2.13) или (2.17) для оператора перехода носят приближенный характер. Данный случай можно рассматривать как реализацию итерационного процесса в построении аналитического решения для исследуемой системы [52].

§ 2.4. Общие требования, накладываемые на эталонную систему

Как показывает проведенный анализ, на процесс получения решения для исследуемой системы существенным образом влияет выбор оптимальной модели. В связи с этим весьма важным является поиск критериев соответствия эталонной системы определенной исследуемой системе.

Сформулируем наиболее общие требования, накладываемые на оператор \hat{A}_1 (или \hat{A}), характеризующий выбранную модель:

1. Решение эталонного уравнения (2.11) или (2.16) должно быть известным или получаться сравнительно просто.
2. Должно существовать решение уравнения (2.13) или (2.17) для оператора преобразования \hat{T} .
3. Исследуемая система (2.10) или (2.15) и соответствующая моделирующая система (2.11) или (2.16) должны обладать качественным сходством. Последнее требование в каждой конкретной задаче приобретает свой смысл.

Качественное сходство исследуемой и моделирующей систем вытекает из физических соображений и оказывает существенное влияние на процесс решения уравнения для оператора \hat{T} .

Анализ требований 1 и 2, накладываемых на модель, показывает, что указанные требования в некоторой степени конкурируют друг с другом. Действительно, оператор перехода имеет наиболее простой вид, если исследуемая система и модель совпадают (оператор \hat{T} является единичным оператором). В этом случае использование метода эталонных уравнений теряет смысл.

С другой стороны, если в качестве эталонного выбрать произвольное уравнение, решение которого известно, совершенно необязательно, что в данном случае будет найден оператор преобразования. Таким образом, оптимальная модель подбирается на основе баланса требований 1 и 2.

По всей видимости, наиболее удачной в этом случае будет модель, обладающая качественным сходством с исследуемой системой.

§ 2.5. Алгоритм практической реализации ММЭУ

При решении практических задач непосредственная работа с операторами обладает определенными неудобствами, поскольку аппарат операторного исчисления [97], несмотря на более общий характер, весьма сложен для практического использования. В связи с этим представляется целесообразным совершить обратный переход от операторного представления для исследуемого и эталонного уравнений к более традиционному, используемому в [35, 47, 148], и записать оператор преобразования \hat{T} , введенный в предшествующих па-

раграфах, в явном виде.

Как показано выше, оператор \hat{T} осуществляет отображение пространства $\{X\}$, в котором определено эталонное уравнение, в пространство $\{x\}$ для исследуемой системы. Пусть пространство $\{X\}$ представляет собой пространство переменных (X_1, X_2, X_3, \dots) , а $\{x\}$ – пространство переменных (x_1, x_2, x_3, \dots) . (В общем случае размерности пространств $\{X\}$ и $\{x\}$ не совпадают). Отображение $\{X\} \rightarrow \{x\}$ характеризуется выражением координат эталонной системы через координаты исследуемой системы:

$$X_i = X_i(t | x_1, x_2, x_3, \dots) \equiv X_i(t | \bar{x}). \quad (2.18)$$

Простейшими соотношениями, связывающими решения исследуемой системы и модели, являются

$$\psi(t | \bar{x}) = \Psi(t | X_1(t | \bar{x}), X_2(t | \bar{x}), X_3(t | \bar{x}), \dots), \quad (2.19a)$$

$$\bar{u}(t | \bar{x}) = \bar{U}(t | X_1(t | \bar{x}), X_2(t | \bar{x}), X_3(t | \bar{x}), \dots). \quad (2.19b)$$

Однако из соотношений (2.19) следует, что ψ и Ψ (а также, \bar{u} и \bar{U}) являются одной и той же величиной, записанной, соответственно, в координатных системах $\{x\}$ и $\{X\}$. То есть, согласно, (2.19) исследуемая и эталонная системы представляют собой одно и то же уравнение с соответствующими краевыми условиями, записанными в различных системах координат.

Таким образом, действие оператора преобразования \hat{T} носит более сложный характер. Решение модели будет отображаться в решение исследуемой системы в том случае, если помимо преобразования координат, будет осуществлено согласование амплитуд данных решений. Для этого, учитывая выводы §2.2, введем фазовые множители $Q(t | \bar{x})$ и $Q_{ij}(t | \bar{x})$. Тогда решение исследуемой системы выражается через решение модели при помощи соотношений:

$$\psi(t | \bar{x}) = Q(t | \bar{x}) \cdot \Psi(t | X_1(t | \bar{x}), X_2(t | \bar{x}), X_3(t | \bar{x}), \dots) \quad (2.20)$$

для скалярной функции и

$$u_i(t | \bar{x}) = \sum_j Q_{ij}(t | \bar{x}) \cdot U_j(t | X_1(t | \bar{x}), X_2(t | \bar{x}), X_3(t | \bar{x}), \dots) \quad (2.21)$$

для составляющих векторной функции.

Соотношения (2.20) и (2.21) соответствуют действию оператора \hat{T} , выражая преобразование решений $\Psi \rightarrow \psi$ и $U \rightarrow u$ через неизвестные пока фазовые функции $X_i(t|\bar{x})$ и фазовые множители $Q(t|\bar{x})$ или $Q_{ij}(t|\bar{x})$. Дальнейшая задача сводится к решению системы уравнений для $X_i(t|\bar{x})$ и $Q(t|\bar{x})$ или $Q_{ij}(t|\bar{x})$. Искомое решение для исследуемой системы получается путем подстановки решений соответствующих уравнений для фазовых функций и фазовых множителей в соотношения (2.20) и (2.21).

По аналогии с обобщенным ВКБ-методом [35] сформулируем последовательность действий при решении начально-краевой задачи для исследуемой системы при помощи ММЭУ (запишем *алгоритм реализации расчетной схемы метода*):

1. Выбирается система эталонных уравнений, качественно сходная с исследуемой, решение которой известно или ищется заранее.
2. Решение исследуемой системы выражается через решение для модели посредством соотношений (2.20) или (2.21).
3. Осуществляется подстановка соотношений (2.20) или (2.21) в уравнение для исследуемой системы, что приводит к уравнениям для фазовых функций $X_i(t|\bar{x})$ и фазовых множителей $Q(t|\bar{x})$ или $Q_{ij}(t|\bar{x})$.
4. Исходя из дополнительных соображений (как правило, связанных с природой исследуемой и моделирующей систем) полученная при выполнении пункта 3 система уравнений разбивается на более простые, позволяющие последовательно найти выражения для фазовых множителей и фазовых функций.
5. Определяется вид фазовых множителей $Q(t|\bar{x})$ или $Q_{ij}(t|\bar{x})$ как функций $X_i(t|\bar{x})$, \bar{x} и t .
6. Решается система уравнений для фазовых функций $X_i(t|\bar{x})$.
7. Выражения для фазовых множителей и фазовых функций подставляются в

соотношения (2.20) и (2.21), что приводит к искомым решениям.

Построенная расчетная схема применима для решения однородных дифференциальных уравнений. В случае если уравнение является неоднородным, могут возникать затруднения при реализации пункта 4 настоящего алгоритма. Однако, поскольку неоднородные уравнения при изменении соответствующей начально-краевой задачи могут быть сведены к однородным [98], указанный метод может быть распространен и на них.

§ 2.6. Использование ММЭУ при исследовании гидродинамических процессов

Построенный выше модифицированный метод эталонных уравнений на нестационарные и векторные задачи имеет достаточно общий характер и требует уточнения при исследовании конкретных начально-краевых задач. Рассмотрим особенности реализации расчетной схемы данного метода при решении системы уравнений гидродинамики.

Пусть исследуемая система описывается системой уравнений Навье-Стокса и неразрывности

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -gradp + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}, \quad div \vec{v} = 0, \quad (2.22)$$

а эталонная система имеет вид:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -gradP + \eta \Delta \vec{V} + \vec{f}, \quad div \vec{V} = 0. \quad (2.23)$$

Моделирующая система подбирается таким образом, чтобы значения внутренних параметров (плотности ρ , вязкости жидкости η) и внешней силы \vec{f} совпадали со значениями соответствующих параметров для исследуемой системы.

Заметим, что имеется существенное отличие при использовании метода эталонных уравнений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений [21, 111] или уравнения Шредингера [35, 47, 148] и при использовании данного метода в процессе моделирования гидродинамических процессов. В первом случае исследуемая и эталонная системы описываются различными

уравнениями. Во втором случае разные процессы описываются одинаковыми системами уравнений (2.22) и (2.23), на которые накладываются различные начальные и граничные условия. Это приводит к необходимости более глубокого анализа краевых условий, накладываемых на гидродинамическую систему. Указанный анализ важен и в связи с требованиями качественного сходства модели с исследуемой системой, которые рассматриваются ниже.

Традиционно [8], начально-краевые задачи для уравнения Навье-Стокса подразделяются на следующие типы:

1. На поверхности $S(t)$, определенной при $t \geq t_0$, внутри которой находится жидкость, заданы значения скорости жидкости $\vec{v}|_{S(t)}$.
2. На поверхности $S(t)$ заданы нормальные напряжения p_m и действуют силы поверхностного натяжения. Поверхность $S(t)$ задана в начальный момент времени $t = t_0$. Кроме того, известно начальное распределение скоростей. Указанная задача относится к классу *задач со свободной границей*.
3. На поверхности $S(t)$, определенной при $t \geq t_0$, известно значение нормальной скорости v_n , а вектор касательного напряжения пропорционален касательной скорости v_τ . Данная начально-краевая задача возникает в процессе исследования движения жидкости при введении тонкого слоя полимерной смазки, либо при анализе динамических явлений в разреженных газах [8].
4. На поверхности $S(t)$, определенной при $t \geq t_0$, известно значение касательной скорости v_τ и заданы нормальные напряжения p_m .

Последние две задачи называются *задачами с полусвободными границами*.

Кроме перечисленных также существует большое число смешанных начально-краевых задач.

По всей видимости, выбор моделирующей системы будет оптимальным в том случае, если начально-краевая задача, сформулированная для модели, будет относиться к тому же типу, что и для исследуемой системы. В этом случае начальные и граничные условия, наложенные на исследуемую систему, наибо-

более простым образом преобразуются в дополнительные условия, накладываемые на фазовые функции $X_i(t|\bar{x})$ и фазовые множители $Q(t|\bar{x})$ или $Q_{ij}(t|\bar{x})$.

Рассмотрим этот процесс более подробно. Легко видеть, что во всех начально-краевых задачах поверхность $S(t)$, ограничивающая жидкость, либо задана, либо является искомой. Потребуем, чтобы преобразование $\{X\} \rightarrow \{x\}$ отображало граничную поверхность $S(t)$ моделирующей системы в соответствующую поверхность $s(t)$ исследуемой системы:

$$M\{\bar{X}_0[t|\bar{x}_0(t)]\} \in S(t) \quad \forall \bar{x}_0 : m[\bar{x}_0(t)] \in s(t). \quad (2.24)$$

Задание на поверхности $s(t)$ и $S(t)$ компонент вектора скорости движения жидкости \vec{v} или тензора напряжений p_{ik} приводит, соответственно, к граничным условиям для фазовых множителей и фазовых функций.

Переходя к непосредственному решению системы уравнений (2.22), учтем, что построенный ММЭУ удобнее использовать при решении однородных уравнений. Для этого перейдем от уравнения Навье-Стокса к системе соответствующих однородных уравнений.

Согласно известной теореме Гельмгольца [90], любое векторное поле можно рассматривать как суперпозицию потенциального и вихревого полей:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}', \quad \vec{V} = \vec{U} + \vec{U}'.$$

Здесь \vec{u}' и \vec{U}' – потенциальные, а \vec{u} и \vec{U} – вихревые составляющие скорости движения жидкости в исследуемой и эталонной системах. Последнее выражение позволяет вместо системы (2.22) записать уравнения для вихревой составляющей скорости движения жидкости:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \eta \Delta \vec{u} = 0 \quad (2.25a)$$

и для потенциала скорости:

$$\Delta \psi = 0. \quad (2.25b)$$

Соответствующие эталонные уравнения имеют вид:

$$\rho \frac{d\bar{U}}{dt} - \eta \Delta \bar{U} = 0, \quad \Delta \Psi = 0. \quad (2.26)$$

Дальнейшее решение системы (2.25) осуществляется путем подстановки выражений (2.20) и (2.21) в уравнения (2.25) и последующих преобразований в соответствии с алгоритмом, построенном в предыдущем параграфе. На полученные решения для фазовых функций $X_i(t|\bar{x})$ и фазовых множителей $Q(t|\bar{x})$ или $Q_{ij}(t|\bar{x})$ накладывается условие (2.24), а также дополнительные условия, вытекающие из постановки начально-краевой задачи для исследуемой системы.

В общем случае подстановка выражений (2.20) и (2.21) в уравнения (2.25) приводит к весьма громоздким соотношениям, работа с которыми является крайне затруднительной. Данное замечание иллюстрирует *важность выбора подходящей модели*, обладающей, в частности, качественным сходством с исследуемой системой.

Качественное сходство гидродинамических систем, по всей видимости, проявляется в сходстве характеров течений жидкости в исследуемой и моделирующей системах. Это позволяет сформулировать следующие его критерии:

1. Совпадение числа и взаимного расположения источников и стоков в исследуемой системе и модели.
2. Наличие у поверхности S , ограничивающей жидкость в эталонной системе, тех же особенностей (углов, изломов и т.д.), что и у соответствующей ей поверхности s в исследуемой системе.
3. Движение жидкости в моделирующей системе должно задаваться начальными и граничными условиями того же типа, что и в исследуемой системе.

Таким образом, для успешного решения системы уравнений гидродинамики с помощью модифицированного метода эталонных уравнений необходимо:

- выбрать моделирующую систему, обладающую качественным сходством с исследуемой;
- преобразовать уравнения для исследуемой системы и модели к виду (2.25) и

(2.26);

- сформулировать условия для фазовых функций и фазовых множителей, а также условия вида (2.24);
- осуществить подстановку выражений (2.20) и (2.21) в уравнения (2.25) для исследуемой системы и, следуя расчетной схеме метода, найти выражения для вихревой составляющей \vec{u} и потенциала ψ скорости движения жидкости;
- найти поле скоростей движения жидкости с помощью соотношения:

$$\vec{v} = \vec{u} + \text{grad}\psi . \quad (2.27)$$

§ 2.7. Анализ некоторых частных случаев гидродинамических систем

Как следует из предыдущего параграфа, определяющее влияние на успех при использовании ММЭУ в исследовании математических моделей гидродинамических процессов играет выбор подходящей эталонной системы. Проиллюстрируем это на примере двух частных случаев, соответствующих системам «с изменяющейся геометрической симметрией» и системам с «переменным масштабом».

Пусть имеется некоторая гидродинамическая система, описываемая в координатном пространстве $\{x\}$ уравнениями вида (2.25). Причем, эта система обладает определенной геометрической симметрией, выражающейся в независимости всех параметров и переменных состояния от некоторой координаты x_i и тождественном равенстве нулю соответствующей компоненты скорости движения жидкости $\vec{v}_i \equiv 0$. Положим для определенности, $i = 1$, т.е.

$$v_1 \equiv 0, \quad \partial \aleph / \partial x_1 \equiv 0 . \quad (2.28a)$$

Здесь \aleph – произвольная физическая величина.

В качестве эталонной целесообразно выбрать систему, описываемую уравнениями (2.26) в пространстве $\{X\}$, обладающую симметрией аналогичного вида:

$$V_1 \equiv 0, \quad \partial \aleph / \partial X_1 \equiv 0 . \quad (2.28б)$$

Предположим, что такая система существует и решение для нее известно.

Потребуем сохранения симметрии в процессе преобразования $\{X\} \rightarrow \{x\}$. Последнее выберем таким образом, чтобы имело место отображение $X_1 \rightarrow x_1$. В этом случае исследуемая и моделирующая система обладают качественным сходством, связанным с характером симметрии течения.

В соответствии с преобразованием координат

$$X_1 \rightarrow x_1, \quad X_2 \rightarrow x_2, \quad X_3 \rightarrow x_3,$$

компоненты скорости движения жидкости будут преобразовываться по закону

$$U_1 \rightarrow u_1, \quad U_2 \rightarrow u_2, \quad U_3 \rightarrow u_3.$$

Это позволяет перейти от соотношения (2.21), выражающего решение исследуемой системы через решение модели, к более простой записи

$$u_i(t | \bar{x}) = Q_i(t | \bar{x}) \cdot U_i(t | X_1(t | \bar{x}), X_2(t | \bar{x}), X_3(t | \bar{x})), \quad (2.29)$$

что существенно упрощает анализ.

В качестве примера, гидродинамической системы, обладающей геометрической симметрией, можно привести задачу невязкого обтекания эллипсоида вращения [80], движения жидкости в эллиптической трубе, течение Куэтта между двумя концентрическими сферами и т.д. [70]. Моделями в данном случае могут соответственно служить задача невязкого обтекания шара, движение жидкости в круглой трубе, течение Куэтта между коаксиальными цилиндрами и т.д.

Более частный случай связан с различием между симметрией исследуемой и эталонной системам только внутри одной координатной поверхности (например, $x_3 = const$ и, соответственно, $X_3 = const$), не изменяющимся со временем. Тогда, по всей видимости, координаты x_3 и X_3 связаны равенством: $x_3 = X_3$, а зависимость скорости движения жидкости от координаты x_3 и времени t в процессе преобразования не изменяется. Это позволяет перейти от (2.29) к более простому соотношению:

$$u_i(t | \bar{x}) = Q_i(x_1, x_2) \cdot U_i(t | X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2), x_3). \quad (2.30)$$

Полученный результат используется при моделировании движения магнитной жидкости во внешнем однородном горизонтальном магнитном поле под действием поверхностных сил, рассмотренном в главе IV. В качестве эталонной системы выбрана математическая модель аналогичного движения обычной жидкости, исследуемая в главе III.

К системам «другого класса» следует отнести гидродинамические системы, характерные размеры в которых изменяются с течением времени (системы с «переменным масштабом»).

Пусть дана определенная гидродинамическая система, в которой имеется некоторая локальная структура, характерный размер которой изменяется со временем. Введем систему координат таким образом, чтобы одна из координатных поверхностей совпадала с границей этой структуры. Положим для определенности, что указанная поверхность определяется уравнением

$$x_1 = f(t).$$

Легко видеть, что последнее уравнение описывает эволюцию размера локальной области с течением времени.

Выберем в качестве модели аналогичную гидродинамическую систему, отличающуюся от исследуемой только тем, что локальная структура в ней неподвижна:

$$X_1 = const.$$

Такой подход позволяет провести отдельный анализ движения жидкости внутри и вне структуры, и процессов, связанных с ростом данной структуры. Возможность использования модели такого типа обосновывается в § 2.3.

Требую, чтобы в процессе преобразования $\{X\} \rightarrow \{x\}$ граница локальной структуры модели S переходила в соответствующую границу исследуемой системы s , получаем следующие соотношения, связывающие координаты:

$$X_1 = \frac{const}{f(t)} x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_3. \quad (2.31)$$

Использование соотношения (2.31) позволяет существенно упростить анализ.

Полученный результат использован при исследовании математической модели движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил, рассмотренной в главе III. Показано, что в результате такого движения свободная поверхность жидкости деформируется. Это приводит к появлению некоторой достаточно устойчивой «ямки», изображенной на рис. 1. Размер последней с течением времени изменяется. В качестве эталонной системы выбрана математическая модель движения жидкости внутри и вне локальной структуры, характерный размер которой постоянен.

Отдельно рассмотрим ситуацию, когда функция $f(t)$ в (2.31) является степенной функцией времени: $f(t) = t^n$, а фазовый множитель $Q_i(t | \bar{x})$ представляет собой безразмерную константу. В этом случае мы приходим к известному методу построения автомодельных решений [15], который, таким образом, является частным случаем модифицированного метода эталонных уравнений. Указанный факт имеет важное практическое значение, поскольку свидетельствует о возможности использования данного метода при исследовании нелинейных задач. Кроме того, широкое использование метода построения автомодельных решений [15] косвенно свидетельствует о справедливости ММЭУ в данном случае.

§ 2.8. Апробация модифицированного метода эталонных уравнений

Для апробации разработанного ММЭУ выполним с его помощью исследование гидродинамических задач, решение которых известно.

В частности, рассмотрим движение жидкости между двумя вращающимися концентрическими сферами и коаксиальными цилиндрами [76, 80]. В качестве эталонной рассмотрим задачу движения жидкости между двумя параллельными плоскостями [70]. Выбор перечисленных гидродинамических проблем связан с тем, что реализация расчетной схемы ММЭУ в данном случае, с одной стороны, осуществляется достаточно просто и не приводит к чрезвычайно громоздким выражениям; а, с другой, – наглядно демонстрирует особенно-

сти использования указанного метода. Кроме того, использование модифицированного метода эталонных уравнений при исследовании указанных математических моделей приводит к точным решениям, что позволяет наиболее просто осуществить сравнение с известными классическими результатами.

Перейдем к непосредственному анализу использования расчетной схемы метода. Запишем уравнения движения жидкости и граничные условия в каждом из рассматриваемых случаев.

Движению жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами радиусами a_1 и a_2 ($a_2 > a_1$), при котором внутренний цилиндр вращается относительно внешнего со скоростью Ω , соответствует уравнение

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0 \quad (2.32)$$

с условиями

$$v_\varphi|_{r=a_1} = \Omega a_1, \quad v_\varphi|_{r=a_2} = 0. \quad (2.33)$$

Линейное движение между двумя концентрическими сферами радиусами a_1 и a_2 ($a_2 > a_1$), при котором внутренняя сфера вращается вокруг внешней со скоростью Ω , а ось вращения совпадает с осью z , описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (2.34)$$

с граничными условиями

$$v_\varphi|_{r=a_1} = \Omega a_1 \sin \theta, \quad v_\varphi|_{r=a_2} = 0. \quad (2.35)$$

И, наконец, движению жидкости между двумя параллельными плоскостями $z = a_1$ и $z = a_2$ ($a_2 > a_1$), при котором нижняя плоскость движется относительно верхней со скоростью u , соответствует уравнение

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0, \quad (2.36)$$

с граничными условиями

$$v_x|_{z=a_1} = u, \quad v_x|_{z=a_2} = 0. \quad (2.37)$$

Уравнения (2.32), (2.34) и (2.36) представляют собой частные случаи системы

(2.22).

Перейдем к непосредственному исследованию описанных течений на основе модифицированного выше метода эталонных уравнений.

Течение между коаксиальными цилиндрами – течение между параллельными плоскостями.

Найдем с помощью ММЭУ решение краевой задачи (2.32)–(2.33), используя в качестве модели (2.36)–(2.37). В соответствии с расчетной схемой метода выразим решение исследуемой системы в виде:

$$v_{\varphi} = Q(r) \cdot V_x [Z(r)]. \quad (2.38)$$

Подставляя (2.38) в (2.32), выполняя преобразования и учитывая соответствующее эталонное уравнение (2.36), получим

$$\left(Q_{rr} + \frac{1}{r} Q_r - \frac{1}{r^2} Q \right) \cdot V + \left(2 \frac{Q_r}{Q} + \frac{Z_{rr}}{Z_r} + \frac{1}{r} \right) \cdot Q \cdot Z_r \cdot V_z = 0.$$

Как отмечалось выше, выражение (2.38) осуществляет преобразование координатного пространства переменной Z в пространство r . В связи с этим вид выражений $Z(r)$, а также $Q(r)$ не должен зависеть от скорости V и ее производной V_z . То есть, выбор пары «исследуемая система» – «модель», определяемый механизмами протекающих физических явлений, не зависит от значений величин, их описывающих. Это позволяет представить последнее уравнение в виде системы

$$\begin{cases} Q_{rr} + \frac{1}{r} Q_r - \frac{1}{r^2} Q = 0, \\ 2 \frac{Q_r}{Q} + \frac{Z_{rr}}{Z_r} + \frac{1}{r} = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Возможны два пути решения системы (2.39):

- найти из первого уравнение выражение для Q и, подставив во второе, выразить Z ;
- выразить Q через Z и подставить в первое уравнение системы.

Несмотря на то, что первый путь является более простым, второй метод в

большой степени соответствует традиционной расчетной схеме метода эталонных уравнений (и его обобщенного варианта).

Из второго уравнения (2.39) следует

$$Q = \frac{C}{\sqrt{rZ_r}} = C(rZ_r)^{-1/2}. \quad (2.40)$$

Подставляя (2.40) в первое уравнение системы (2.39), имеем:

$$\{Z, r\} + \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} = 0. \quad (2.41)$$

Будем искать решение (2.41) в виде: $Z = r^\alpha$. Тогда получаем $Z = r^2$. Подстановка последнего выражения в (2.38), (П2.5) и (2.40), учет преобразования границ $A_1 \rightarrow a_1$ и $A_2 \rightarrow a_2$ позволяет записать

$$v_\varphi = Q \cdot V[Z(r)] = \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{ua_2^2 r}{a_2^2 - a_1^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a_2^2} \right).$$

Граничные условия (2.33), накладываемые на скорость движения жидкости между двумя цилиндрами, дают

$$v = \frac{\Omega a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) \cdot r. \quad (2.42)$$

Полученное выражение совпадает с известным выражением (П2.9) скорости движения жидкости между двумя цилиндрами.

Течение между концентрическими сферами – течение между параллельными плоскостями.

Найдем решение начально-краевой задачи (2.34)–(2.35) движения жидкости между двумя концентрическими сферами, используя в качестве модели (2.36)–(2.37). Согласно (2.29), запишем:

$$v_\varphi = Q(r, \theta) \cdot V_x[Z(r)]. \quad (2.43)$$

Подставляя (2.43) в (2.34), выполняя преобразования и учитывая соответствующее эталонное уравнение, получим

$$2 \left[\frac{Q_r}{Q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{Z_{rr}}{Z_r} \right] \cdot V_z \cdot Q \cdot Z_r + \left[\frac{\Delta Q}{Q} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \cdot Q \cdot V = 0.$$

Последнее уравнение можно рассматривать как систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\Delta Q}{Q} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} = 0, \\ \frac{Q_r}{Q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{Z_{rr}}{Z_r} = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Введем дополнительное предположение, согласно которому переменные r и θ в выражении для Q разделяются. Тогда

$$Q(r, \theta) = X(r) \cdot Y(\theta).$$

Это позволяет перейти от системы (2.44) к системе уравнений

$$\begin{cases} Y_{\theta\theta} + \operatorname{ctg} \theta \cdot Y_{\theta} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \cdot Y = 0, \\ X_{rr} + \frac{2}{r} \cdot X_r - \frac{\lambda^2}{r^2} X = 0, \\ \frac{X_r}{X} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{Z_{rr}}{Z_r} = 0. \end{cases} \quad (2.44a)$$

Первое уравнение системы (2.44a) преобразуется к уравнению Лежандра. Его решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.35), имеет вид

$$Y(\theta) = P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta, \quad \lambda^2 = 2. \quad (2.45)$$

Из третьего уравнения системы (2.44a) следует

$$X(r) = \frac{C}{r\sqrt{Z_r}} = Cr^{-1} (Z_r)^{-1/2}. \quad (2.46)$$

Подставляя выражения (2.45) и (2.46) во второе уравнение системы (2.44a), имеем

$$\{Z, r\} + \frac{4}{r^2} = 0. \quad (2.47)$$

Осуществляя поиск решения (2.47) в виде $Z = r^\alpha$, имеем $Z = r^3$. Тогда с точностью до постоянного множителя C можно записать

$$v_\phi = \frac{C}{\sqrt{3}} u \frac{a_2^3 r}{a_2^3 - a_1^3} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{a_2^3} \right) \cdot \sin \theta. \quad (2.48)$$

Анализ граничных условий (2.35) приводит к соотношениям:

$$v_\varphi = \frac{\Omega a_1^3 a_2^3}{a_2^3 - a_1^3} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{a_2^3} \right) \cdot r \cdot \sin \theta. \quad (2.49)$$

Последнее выражение совпадает с известным решением (П2.15) для исследуемой системы.

Течение между концентрическими сферами – течение между коаксиальными цилиндрами.

Найдем с помощью ММЭУ решение краевой задачи (2.34)–(2.35), используя в качестве модели (2.32)–(2.33). В соответствии с (2.29) запишем:

$$v_\varphi = Q(r, \theta) \cdot V_\varphi [R(r)]. \quad (2.50)$$

Выполняя преобразования, аналогичные проделанным выше, находим

$$\begin{cases} Y_{\theta\theta} + \operatorname{ctg} \theta \cdot Y_\theta + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) Y = 0, \\ \frac{X_{rr}}{X} + \frac{2}{r} \frac{X_r}{X} + \left(\frac{R_r}{R} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{r^2} = 0, \\ \frac{R_{rr}}{R_r} + \frac{2}{r} + 2 \frac{X_r}{X} - \frac{R_r}{R} = 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

Первое уравнение системы (2.51) полностью совпадает с первым уравнением системы (2.44a), решением которого является (2.45). Из третьего уравнения (2.51) следует

$$X(r) = \frac{C}{r} \sqrt{\frac{R}{R_r}}. \quad (2.52)$$

Подстановка (2.52) и (2.45) во второе уравнение (2.51) дает:

$$\{R, r\} - \frac{3}{2} \left(\frac{R_r}{R} \right)^2 + \frac{2\lambda^2}{r^2} = 0. \quad (2.53)$$

Осуществляя поиск решения (2.53) в виде $R = r^\alpha$, подставляя полученное выражение в (2.50), (П2.9) и (2.52), учитывая (2.45) и граничные условия, запишем

$$v_\varphi = \Omega \frac{a_1^3 a_2^3}{a_2^3 - a_1^3} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{a_2^3} \right) \cdot r \cdot \sin \theta. \quad (2.54)$$

Последнее выражение совпадает с соответствующим решением (П2.15) для ис-

следуемой системы.

Подводя итог, представим результат решения задач о движении жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами и концентрическими сферами, полученный на основе модифицированного метода эталонных уравнений, в виде диаграммы, изображенной на рис 7.

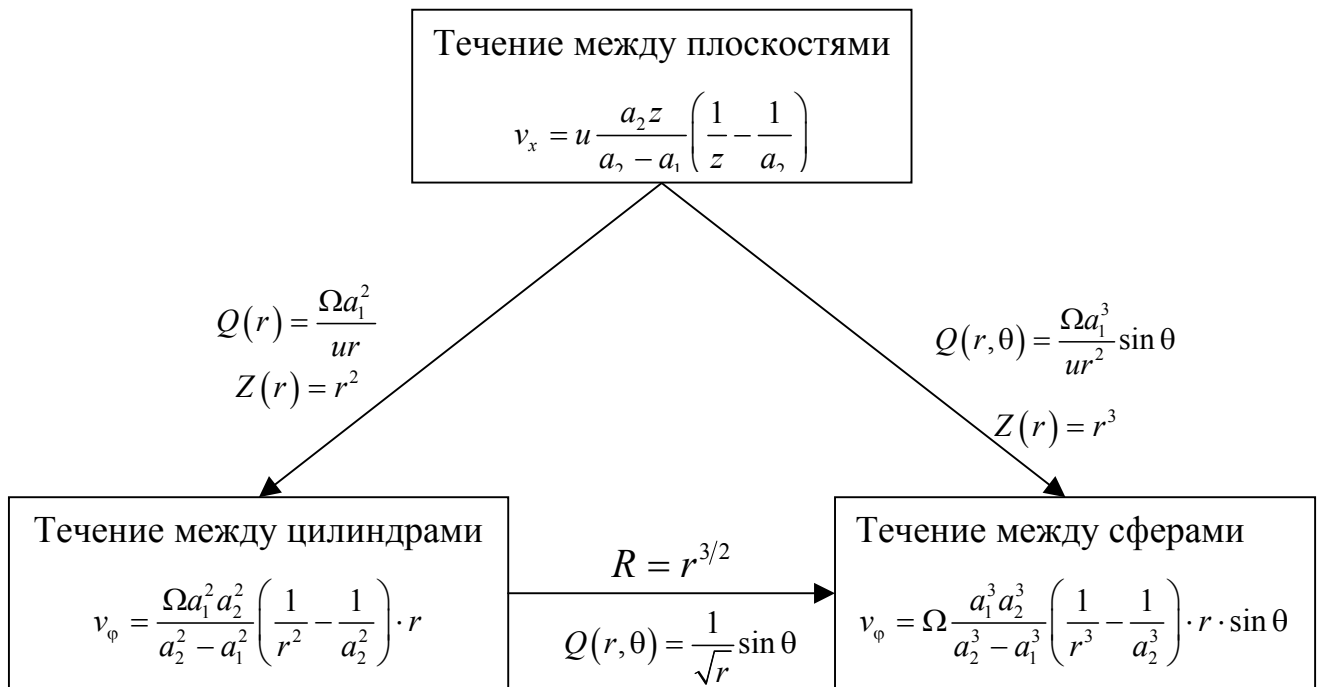


Рис. 7. Схематическое изображение моделирования задач движения жидкости между коаксиальными цилиндрами и концентрическими сферами на основе разработанного ММЭУ

Соответствие полученных на основе использования ММЭУ результатов известным классическим решениям (см. Приложение 2) свидетельствует о справедливости разработанного обобщения и возможности его использования при исследовании математических моделей гидродинамических систем.

В дальнейшем разработанный модифицированный метод эталонных уравнений использован для математического моделирования движения тонкого слоя жидкости при нанесении на его поверхность малого количества ПАВ, которое выполнено в главе III, и анизотропного течения жидкости, примером которого служит движение тонкого слоя магнитной жидкости во внешнем однородном горизонтальном магнитном поле \vec{H}_0 (глава IV).

Основные результаты настоящей главы опубликованы в [53, 56, 57, 59, 60, 63, 98, 99].

Глава III. Исследование движения тонкого слоя обычной жидкости

§ 3.1. Построение математической модели

Рассмотрим движение тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил. Пусть на твердой поверхности имеется бесконечный слой жидкости, называемый в дальнейшем *подложкой*. Толщина подложки предполагается существенно меньше ее линейных размеров, но значительно большей диаметра молекул. На поверхность подложки в момент времени $t = 0$ наносится небольшое количество (капля) поверхностно-активного вещества. Потребуем, чтобы в начальный момент времени скорость движения подложки равнялась нулю.

Наличие ПАВ на свободной поверхности подложки приводит к возникновению градиента поверхностного натяжения, что вызывает осесимметричное течение жидкости вдоль свободной поверхности (эффект Марангони). Как показано в [170], в тонком слое жидкости такое движение приводит к деформации подложки и образованию достаточно устойчивой «ямки» (рис. 1), размер которой с течением времени изменяется.

С более общих позиций область деформирующейся свободной поверхности можно рассматривать как некоторую локализованную структуру [88], а изменение ее размеров соответствует росту данной структуры. Такой подход позволяет обобщить результаты, полученные в настоящей главе, на развитие локализованных структур произвольной природы (распространение фронта пламени при горении, развитие биологических популяций [88], ряд процессов физики атмосферы [68] и т.д.).

Как и в локализованных структурах произвольного типа [88], в образующихся в результате движения тонкого слоя жидкости «ямках» можно выделить три различные области (рис. 1):

- область А, соответствующая локальному уменьшению толщины подложки;

- область Б, представляющая собой границу «ямки»;
- область В, соответствующая невозмущенной жидкости.

Данные области различаются формой свободной поверхности жидкой подложки и распределением поверхностно-активного вещества. Это позволяет рассматривать процессы в каждой из данных областей отдельно.

Исследуем движение жидкости, соответствующее развитию деформации свободной поверхности и росту образующейся в результате этого «ямки». Для этого определим поле скоростей \vec{v} движения подложки в данном случае в произвольный момент времени. Математическая модель, описывающая указанное движение основывается на системе уравнений Навье-Стокса и неразрывности:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -grad p + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}, \quad (3.1)$$

$$div \vec{v} = 0, \quad (3.2)$$

где \vec{v} – скорость жидкости, p – давление, η – динамическая вязкость, ρ – плотность жидкости.

Упростим (3.1) исходя из следующих соображений. Как показано в [8, 78], поверхностные эффекты имеют место лишь при малых Re . Это позволяет пренебречь конвективной производной $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$ [76] и записать указанное уравнение в виде

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -grad p + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}. \quad (3.1a)$$

Итак, движение жидкости подложки вследствие действия поверхностных сил описывается системой уравнений (3.1a) и (3.2). (С соответствующими начальными и граничными условиями, записанными ниже.)

Для описания движения поверхностно-активного вещества, вообще говоря, также следовало бы записать систему уравнений вида (3.1) – (3.2). Однако, в связи с тем, что количество ПАВ считается малым, его движение не оказывает *механического* влияния на движение подложки. Кроме того, поверхностно-активное вещество достаточно быстро адсорбируется в поверхностный слой, и его уже нельзя рассматривать как отдельную жидкость. Это позволяет описы-

вать распространение ПАВ только с помощью уравнения баланса в поверхностном слое [78]

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \vec{v}_\tau - D_s \operatorname{grad} \Gamma) + j_n = 0. \quad (3.3)$$

Здесь Γ – концентрация поверхностно-активного вещества в поверхностном слое, \vec{v}_τ – касательная составляющая скорости движения жидкости на свободной поверхности, D_s – коэффициент диффузии, j_n – поток ПАВ из объема жидкости в поверхностный слой и обратно. Выражения $D_s \operatorname{grad} \Gamma$ и $\Gamma \vec{v}_\tau$ соответственно характеризуют диффузионный и конвективный механизмы переноса поверхностно-активного вещества.

В рассматриваемой системе конвективный перенос ПАВ происходит значительно быстрее диффузионного, т.е. $\Gamma \vec{v}_\tau \gg D_s \operatorname{grad} \Gamma$. Тогда уравнение (3.3) принимает вид

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \vec{v}_\tau) + j_n = 0. \quad (3.3a)$$

Запишем краевые условия, накладываемые на систему уравнений (3.1) – (3.3). Граничные условия на свободной поверхности s имеют вид

$$p_{nn}|_s = 0, \quad p_{tt}|_s = \operatorname{grad} \alpha. \quad (3.4)$$

Здесь p_{nn} и p_{tt} – соответственно нормальная и тангенциальная к свободной поверхности жидкости компоненты тензора напряжений, α – коэффициент поверхностного натяжения. Градиент в (3.4) вычисляется вдоль поверхности. Лапласовское давление, связанное с искривлением свободной поверхности, учитывается при записи нормальной компоненты p_{nn} тензора напряжений в явном виде.

На твердой поверхности s' предполагается отсутствие проскальзывания жидкости подложки:

$$\vec{v}|_{s'} = 0 \quad (3.5)$$

Введенное выше требование отсутствия движения подложки в начальный момент времени характеризуется условием:

$$\vec{v}|_{t=0} = 0. \quad (3.6)$$

Кроме того, необходимо учесть конечность количества ПАВ, помещаемого на поверхность подложки:

$$\Gamma|_{t=0} = \Gamma_0. \quad (3.7)$$

Здесь Γ_0 – распределение ПАВ в начальный момент времени.

Для замыкания системы уравнений (3.1а), (3.2) и (3.3а) с условиями (3.5) – (3.7), необходимо ввести уравнение эволюции свободной поверхности s (динамическое граничное условие). Для произвольной точки m на свободной поверхности справедливо:

$$\frac{d\vec{r}|_m}{dt} = \vec{v}|_m, \quad \forall m \in s. \quad (3.8)$$

На уравнение (3.8) необходимо наложить условие, описывающее форму поверхности s в начальный момент времени.

Система уравнений (3.1а), (3.2), (3.3а), (3.8) с условиями (3.4) – (3.7) и начальным условием, наложенным на (3.8) полностью описывает движение тонкого бесконечного слоя жидкости под действием поверхностных сил.

Построенная начально-краевая задача может быть несколько упрощена. Для этого введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , сопоставляя твердую поверхность s' с плоскостью $z = 0$, а начало отсчета r – с областью нанесения поверхностно-активного вещества. В данных координатах выражение (3.5) принимает вид:

$$\vec{v}|_{z=0} = 0, \quad (3.5a)$$

а начальное условие, накладываемое на (3.8), записывается в виде

$$z|_{s, t=0} = \zeta_0(r, \varphi). \quad (3.9)$$

Ограничимся исследованием случая, при котором капля ПАВ, помещаемая на поверхность подложки, имеет правильную форму. В связи с этим можно считать, что движение подложки обладает цилиндрической симметрией, при которой угловая компонента v_φ скорости жидкости обращается нуль. Кроме

того, ни одна из величин, описывающих движение подложки, от φ не зависит. Это позволяет наложить следующие дополнительные условия:

$$v_\varphi \equiv 0, \quad \frac{\partial \aleph}{\partial \varphi} \equiv 0 \quad (\forall \aleph). \quad (3.10)$$

Здесь \aleph – произвольная физическая величина. Симметрия физической системы также позволяет упростить условие (3.9), которое принимает вид:

$$z|_{s,t=0} = \zeta_0(r). \quad (3.9a)$$

Начально-краевая задача (3.1a), (3.2), (3.3a), (3.4), (3.5a), (3.6)–(3.8), (3.9a), (3.10) относится к классу задач со свободной границей [8] и носит нелинейный характер. Физически нелинейность обусловлена взаимным влиянием деформации жидкой подложки и движения поверхностно-активного вещества вдоль ее свободной поверхности. При этом распространение ПАВ изменяет градиент поверхностного натяжения – причину движения подложки, а движение подложки, в свою очередь, приводит к изменению формы свободной поверхности, чем также оказывает существенное влияние на распространение поверхностно-активного вещества. Непосредственное аналитическое решение рассматриваемой задачи является крайне сложным и не допускает разделения переменных.

§ 3.2. Создание эталонной математической модели

Воспользуемся для исследования построенной в предыдущем параграфе начально-краевой задачи модифицированным выше методом эталонных уравнений. Введем эталонную систему посредством соотношений (2.31), которые в данном случае имеют вид:

$$R = r/\bar{R}_0(t), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = z. \quad (3.11)$$

С физической точки зрения моделирующая система описывает движение жидкости в некоторой области с деформирующейся поверхностью, а также процессы в ее окрестности. При этом моделирующая система подобрана таким образом, что размер области с деформирующейся поверхностью не изменяется,

а ее граница описывается уравнением $R = Const$. Для определенности положим $R = 1$.

Система эталонных уравнений, соответствующих (3.1a), (3.2) и (3.3a) имеет вид:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -grad P + \eta \Delta \vec{V} + \vec{f}, \quad (3.12)$$

$$div \vec{V} = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + div(\Gamma \vec{V}_\tau) + J_n = 0. \quad (3.14)$$

При записи (3.12) – (3.14) учтено, что значения плотности ρ , вязкости η и внешней силы \vec{f} в исследуемой и эталонной системах одинаковы.

Рассмотрим начальные и граничные условия, накладываемые на (3.12) – (3.14). Как и в исследуемой системе, в моделирующей системе отсутствует проскальзывание жидкости на твердой поверхности и движение жидкости в начальный момент времени $t = 0$:

$$\vec{V}_{z=0} = 0, \quad (3.15)$$

$$\vec{V}_{t=0} = 0. \quad (3.16)$$

Также сохраняется вид граничных условий на свободной поверхности

$$P_{nn}|_S = 0, \quad P_{tt}|_S = grad \alpha \quad (3.17)$$

и начального условия, накладываемого на концентрацию поверхностно-активного вещества Γ в поверхностном слое

$$\int_{S_0} \Gamma|_{t=0} dS = N_0. \quad (3.18)$$

Кроме того, на Γ накладывается дополнительное условие

$$\Gamma|_{R>1} = 0, \quad (3.19)$$

связанное с отсутствием поверхностно-активного вещества за пределами области с деформированной поверхностью. Также для учета уменьшения концентрации ПАВ в поверхностном слое вследствие роста «ямки», в математическую

модель эталонной системы введен фиктивный поток j'_n поверхностно-активного вещества из поверхностного слоя в объем подложки:

$$J_n = j_n + j'_n.$$

Уравнение локальной деформации свободной поверхности (динамическое граничное условие) принимает для эталонной системы вид:

$$\frac{dZ|_M}{dt} = V_z|_M, \quad \forall M \in S; \quad (3.20)$$

а начальное условие, накладываемое на (3.20), –

$$Z|_{S, t=0} = \zeta_0(R). \quad (3.21)$$

Кроме того, будем считать, что эталонная система, как и исследуемая, обладает цилиндрической симметрией

$$V_\Phi \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \Phi} \equiv 0 \quad (\forall \mathfrak{N}) \quad (3.22)$$

Дальнейшее исследование сводится к решению начально-краевой задачи (3.12) – (3.22) для моделирующей системы и определению скорости жидкости для исследуемой системы на основе построенного в предыдущей главе алгоритма реализации расчетной схемы модифицированного метода эталонных уравнений.

§ 3.3. Решение уравнений движения жидкости в эталонной системе

Перейдем к исследованию начально-краевой задачи (3.12) – (3.22) движения жидкости в моделирующей системе. Следуя традиционной схеме решения уравнения Навье-Стокса [76], подействуем на обе части уравнения (3.12) оператором ротора. Вводя обозначение $\vec{A} \equiv \text{rot} \vec{V}$, имеем

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{A} = 0. \quad (3.23)$$

Из условий симметрии (3.22) следует, что единственной компонентой вектора \vec{A} , отличной от нуля, является угловая компонента A_Φ . Тогда уравнение (3.23) принимает вид

$$\frac{\partial A_{\Phi}}{\partial t} - v \Delta A_{\Phi} = 0 \quad (3.24)$$

Раскрывая лапласиан и решая (3.24) методом разделения переменных, имеем

$$A_{\Phi} = e^{-kt} (M \sin \lambda Z + N \cos \lambda Z) J_1(\beta R), \quad (3.25)$$

где

$$\beta = \sqrt{k/v - \lambda^2}. \quad (3.26)$$

Здесь $J_1(\beta R)$ – функция Бесселя первого рода; постоянные коэффициенты λ , k , M и N определяются ниже, исходя из начальных и граничных условий.

Дальнейшей задачей является определение скорости \vec{V} движения жидкости по известным выражениям ее ротора (3.25) и дивергенции (3.13). Традиционная схема восстановления вида векторного поля [69] приводит к достаточно громоздким интегральным выражениям. В связи с этим целесообразнее воспользоваться иным подходом, основанном на решении уравнения

$$\Delta \vec{V} = -\text{rot} \vec{A}. \quad (3.27)$$

Раскрывая оператор ротора и лапласиан, а также учитывая (3.25), имеем

$$\frac{\partial^2 V_R}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial R} - \frac{V_R}{R^2} + \frac{\partial^2 V_R}{\partial Z^2} = \lambda e^{-kt} (M \cos \lambda Z - N \sin \lambda Z) J_1(\beta R). \quad (3.28)$$

Как и при решении (3.24), воспользуемся методом разделения переменных. Поскольку левая часть этого уравнения не содержит производной по t , а в правой части имеется явная функция времени, представим выражение для скорости в виде:

$$V_R = e^{-kt} \cdot \rho(R) \zeta(Z).$$

Тогда, для уравнения (3.28) получим:

$$\left(\frac{d^2 \rho}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\rho}{dR} - \frac{\rho}{R^2} \right) \cdot \zeta + \rho \cdot \frac{d^2 \zeta}{dZ^2} = \lambda (M \cos \lambda Z - N \sin \lambda Z) J_1(\beta R). \quad (3.29)$$

Для решения (3.29) воспользуемся следующим искусственным приемом.

Вводя обозначения

$$\frac{d^2 \rho}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\rho}{dR} - \frac{\rho}{R^2} = a_0(R), \quad \rho = a_2(R), \quad \lambda J_1(\beta R) = b(R);$$

запишем:

$$a_2(R) \cdot \frac{d^2 \zeta}{dZ^2} + a_0(R) \cdot \zeta = b(R) \cdot (M \cos \lambda Z - N \sin \lambda Z). \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с «постоянными коэффициентами»¹. Его общее решение является суммой частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Частное решение (3.30) имеет вид:

$$\zeta_1 = M \cos \lambda Z - N \sin \lambda Z, \quad (3.31)$$

а общее решение ζ_2 соответствующего однородного уравнения –

$$\zeta_2 = C \exp(\kappa Z) + D \exp(-\kappa Z), \quad (3.32)$$

где

$$\kappa = \sqrt{-a_0(R)/a_2(R)}. \quad (3.33)$$

Таким образом, для общего решения (3.30) находим:

$$\zeta(Z) = C \exp(\kappa Z) + D \exp(-\kappa Z) + M \cos \lambda Z - N \sin \lambda Z. \quad (3.34)$$

Подставляя (3.31) в (3.30), получаем уравнение для коэффициентов $a_2(R)$, $a_0(R)$ и $b(R)$:

$$-\lambda^2 a_2(R) + a_0(R) = b(R),$$

выполняя таким образом разделение переменных Z и R в (3.29). Записывая последнее уравнение в явном виде, имеем:

$$\frac{d^2 \rho}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\rho}{dR} - \frac{\rho}{R^2} - \lambda^2 \rho = \lambda J_1(\beta R). \quad (3.35)$$

Еще одно уравнение для $\rho(R)$ записывается на основании независимости величины κ от R :

$$\rho'' + \frac{1}{R} \rho' - \frac{\rho}{R^2} + \kappa^2 \rho = 0. \quad (3.36)$$

¹ Поскольку (3.30) – уравнение относительно Z , а коэффициенты $a_2(R)$, $a_0(R)$ и $b(R)$ от Z не зависят, их можно считать «постоянными».

Таким образом, $\rho(R)$ является решением системы уравнений (3.35) и (3.36).

Уравнение (3.36) является уравнением Бесселя, а его решение имеет вид

$$\rho(R) = \vartheta J_1(\kappa R), \quad (3.37)$$

где ϑ – некоторая константа, имеющая размерность длины.

Подставляя (3.37) в (3.35) и выполняя преобразования, получим

$$-\vartheta(\kappa^2 + \lambda^2)J_1(\kappa R) = \lambda J_1(\beta R). \quad (3.38)$$

Поскольку функции Бесселя первого рода $J_m(nx)$ для целого m являются ортогональными при различных n , необходимым условием справедливости (3.38) является равенство $\kappa = \beta$. Дальнейшие преобразования в (3.38) приводят к явному выражению для ϑ :

$$\vartheta = -\frac{\lambda \nu}{\kappa} = -\frac{\lambda \eta}{\kappa \rho}.$$

Итак, общее решение уравнения для радиальной составляющей V_R скорости движения жидкости под действием поверхностных сил (в эталонной системе) имеет вид:

$$V_R = -\frac{\lambda \eta}{\kappa \rho} \exp(-kt) \cdot [C \exp(\beta Z) + D \exp(-\beta Z) + M \cos \lambda Z - N \sin \lambda Z] J_1(\beta R). \quad (3.39)$$

Вертикальная компонента V_Z скорости жидкости находится из уравнения неразрывности (3.13) и записывается следующим образом:

$$V_Z = \frac{\lambda \eta}{\kappa \rho} \exp(-kt) \cdot \left[C \exp(\beta Z) - D \exp(-\beta Z) + M \frac{\beta}{\lambda} \sin \lambda Z + N \frac{\beta}{\lambda} \cos \lambda Z \right] J_0(\beta R). \quad (3.40)$$

Далее найдем выражение для давления в жидкой подложке, которое также является неизвестной величиной. Подставляя выражения (3.39) и (3.40), в уравнение Навье-Стокса (3.12) и выполняя преобразования, имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial R} = -\rho \frac{\partial V_R}{\partial t} + \eta \frac{\partial A_\Phi}{\partial Z}, \\ \frac{\partial P}{\partial Z} = -\rho \frac{\partial V_Z}{\partial t} - \eta \frac{1}{R} \frac{\partial (R A_\Phi)}{\partial R} - g\rho. \end{cases} \quad (3.41)$$

При записи системы (3.41) учтены значения горизонтальной ($f_r = 0$) и вертикальной ($f_z = -g\rho$) компонент силы тяжести.

Решение (3.41) дает:

$$P = \frac{\eta\lambda}{\beta} \exp(-kt) \cdot [C \exp(\beta Z) + D \exp(-\beta Z)] J_0(\beta R) - g\rho Z + A. \quad (3.42)$$

Для последующего преобразования решения эталонной системы в соответствующее решение исследуемой системы, выразим из (3.39), (3.40) и (3.42) потенциал и вихревую составляющую скорости движения жидкости.

Согласно теореме Гельмгольца [90], представим векторное поле скорости движения жидкости в виде суммы потенциального и вихревого полей:

$$\vec{V} = \vec{U} + \text{grad}\Psi. \quad (3.43)$$

Подстановка последнего выражения в (3.12) и интегрирование полученного уравнения приводит к следующему выражению для потенциала скорости:

$$\Psi = \frac{\eta\lambda}{k\beta} \exp(-kt) \cdot [C \exp(\beta Z) + D \exp(-\beta Z)] J_0(\beta R). \quad (3.44)$$

Используя далее (3.43) и выражения для поля скоростей, находим:

$$U_R = -\frac{\lambda v}{k} \exp(-kt) \cdot [M \cos \lambda Z - N \sin \lambda Z] J_1(\beta R). \quad (3.45)$$

$$U_Z = \frac{v\beta}{k} \exp(-kt) \cdot [M \sin \lambda Z + N \cos \lambda Z] J_0(\beta R). \quad (3.46)$$

Дальнейшее исследование математической модели движения жидкости под действием поверхностных сил в эталонной системе связано с анализом начальных и краевых условий, накладываемых на выражения (3.39), (3.40) и (3.42).

§ 3.4. Анализ краевых условий в эталонной системе внутри и вне «ямки»

Перейдем к исследованию начальных и граничных условий, наложенных на решение системы уравнений (3.12)–(3.13).

Рассмотрим вначале условие (3.15) на твердой поверхности, из которого следует связь коэффициентов C , D , M и N :

$$C = -\frac{1}{2}\left(M + \frac{\beta}{\lambda}N\right), \quad D = -\frac{1}{2}\left(M - \frac{\beta}{\lambda}N\right). \quad (3.47)$$

Для анализа краевых условий на свободной поверхности обычно используют специальную систему координат, одной из координатных поверхностей которой является свободная поверхность жидкости $z = \zeta(r)$. В нашем случае примером такой координатной системы может служить система (a, φ, b) , координаты которой связаны с цилиндрическими при помощи соотношений:

$$a(r, \varphi, z) = \frac{\exp\left\{-\frac{H}{c(H - \zeta(r))} - \frac{z^2}{2}\right\}}{\sqrt{H - \zeta(r)}}, \quad \varphi = \varphi, \quad b(r, \varphi, z) = \frac{z}{\zeta(r)}.$$

Здесь c – постоянная величина, значение которой выбирается произвольно.

Однако формулы обратного перехода от системы координат (a, φ, b) к цилиндрическим (или декартовым) координатам и, соответственно, выражения коэффициентов Ляме имеют чрезвычайно громоздкий вид. Это существенно затрудняет практические расчеты и делает использование данной координатной системы нецелесообразным.

Иной подход связан с анализом условий на свободной поверхности жидкости для каждой из структурных областей (рис. 1) по отдельности и последующим «сшиванием» результата. Такое рассмотрение вызвано различным характером движения жидкости в областях А, Б и В, вызванным различием формы свободной поверхности и наличием на ней ПАВ.

В частности, в области А поверхность жидкости аппроксимируется плоскостью, перпендикулярной оси Z , а поверхностно-активное вещество распределено вдоль свободной поверхности практически однородно. В области Б (на границе локальной структуры) поверхность искривлена и существует наибольший градиент поверхностного натяжения, что ведет к наиболее интенсивному движению жидкости. Вне деформированной области (в области В) свободная поверхность также аппроксимируется плоскостью, а поверхностно-активное вещество на ней отсутствует.

Перейдем к непосредственному анализу движения жидкости в каждой из структурных областей. Как уже отмечалось, вне «ямки» (область В) свободная поверхность жидкости аппроксимируется плоскостью, перпендикулярной оси Z имеющей постоянную толщину H . Тогда условия (3.17) для компонент тензора напряжений принимают вид:

$$P_{ZZ}|_{Z=H} = 0, \quad P_{RZ}|_{Z=H} = 0. \quad (3.48)$$

Учитывая вид выражений для компонент тензора напряжений в цилиндрических координатах [101], получим систему уравнений, связывающих коэффициенты M и N :

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{k}{2\beta^2\nu} - 1 \right) \text{ch}(\beta H) + \cos(\lambda H) \right] \cdot M + \left[\frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{k}{2\beta^2\nu} - 1 \right) \text{sh}(\beta H) - \sin(\lambda H) \right] \cdot N = 0, \\ \left[2 \text{sh}(\beta H) - \left(\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\lambda}{\beta} \right) \sin(\lambda H) \right] \cdot M + \left[2 \frac{\beta}{\lambda} \text{ch}(\beta H) - \left(\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\lambda}{\beta} \right) \cos(\lambda H) \right] \cdot N = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Данная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Последнее требование позволяет записать уравнение, связывающее собственные значения λ и k (соответственно, λ и β). Из системы (3.49) следует:

$$N = \frac{2\beta^2\lambda\nu \cos(\lambda H) + \lambda(k - 2\beta^2\nu) \text{ch}(\beta H)}{2\beta^2\lambda\nu \sin(\lambda H) - \beta(k - 2\beta^2\nu) \text{sh}(\beta H)} \cdot M. \quad (3.50)$$

Далее рассмотрим условия, накладываемые на компоненты тензора напряжений в области А. В общем случае они имеют вид:

$$P_{ZZ}|_{Z=h} = 0, \quad P_{RZ}|_{Z=h} = -\frac{\partial\alpha}{\partial\Gamma} \text{grad}\Gamma. \quad (3.51)$$

Концентрация поверхностно-активного вещества в выражении для тангенциальной составляющей тензора напряжений, вообще говоря, определяется из уравнения (3.14). Однако, характер движения жидкости в данном случае таков, что поверхностно-активное вещество покрывает подложку в области А

практически равномерно¹. По этой причине условия (3.51) можно переписать в виде:

$$P_{ZZ}|_{Z=h} = 0, \quad P_{RZ}|_{Z=h} = 0. \quad (3.51a)$$

Таким образом, общий вид граничных условий на свободной поверхности внутри области с деформированной поверхностью совпадает с соответствующими условиями вне «ямки». Различие вызвано различным положением свободной поверхности внутри локальной структуры ($Z|_M = h(t) \leq H, \forall M \in S$) и вне ($Z|_M = H = const, \forall M \in S$).

Рассмотрим более подробно деформацию свободной поверхности в области А. Уравнение (3.20) принимает в данном случае более простой вид:

$$\frac{dh}{dt} = V_Z|_{Z=h}.$$

Считая, что вертикальная составляющая скорости жидкости V_Z внутри «ямки» от R не зависит (иначе свободная поверхность в указанной области не является плоской, что противоречило бы введенному выше предположению), положим для определенности

$$\frac{dh}{dt} = V_Z|_{R=0, Z=h}. \quad (3.52)$$

Решая (3.52) с учетом начального условия $h|_{t=0} = H$, имеем:

$$h = \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \sqrt{\frac{D}{C}} \operatorname{th} \left[\frac{\lambda \eta \beta \sqrt{CD}}{k^2 \rho} (\exp(-kt) - 1) + \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{C}{D}} \exp(\beta H) \right) \right] \right\}. \quad (3.53)$$

При выводе (3.53) также учтен тот факт, что деформация свободной поверхности связана с потенциальной составляющей скорости движения жидкости.

¹ Максимальный градиент ПАВ имеется на границе локальной структуры (в области Б).

§ 3.5. Анализ краевых условий на границе «ямки»

Перейдем к анализу движения жидкости в области Б (см. рис. 1). Очевидно, в этой области градиент поверхностного натяжения является наибольшим, что приводит к наиболее интенсивному движению жидкости. По этой причине в качестве дополнительного условия потребуем наличия на границе структуры (при $R=1$) максимума горизонтальной составляющей скорости движения жидкости:

$$\left. \frac{\partial V_R}{\partial R} \right|_{R=1} = f(Z, t) \left. \frac{dJ_1(\beta R)}{dR} \right|_{R=1} = 0, \quad (3.54)$$

Решением (3.54) являются собственные значения β_n начально-краевой задачи (3.12) – (3.22). Подстановка β_n в уравнение, связывающее β и λ , и решение указанного уравнения приводит к собственным значениям $\lambda_n^{(m)}$ этой же начально-краевой задачи.

Перейдем к анализу граничных условий (3.17) на свободной поверхности жидкости. Для определения формы поверхности S воспользуемся требованием минимума свободной энергии, являющейся суммой потенциальной энергии жидкости в поле тяготения и поверхностной энергии [76]:

$$F = \int_s \alpha(r) ds + \int_V g\rho z dV = \min. \quad (3.55)$$

В последнем выражении учтено изменение коэффициента поверхностного натяжения вдоль свободной поверхности.

Преобразовывая (3.55) и учитывая граничные условия, имеем:

$$\frac{d\zeta}{dR} = \sqrt{\frac{1}{R^2 \alpha^2(R)} \cdot \left[\alpha_0 R_2 + \frac{g\rho(R_2 H^2 - R\zeta^2)}{2} \right]^2} - 1. \quad (3.56)$$

Здесь R_1 и R_2 характеризуют расположение границы «ямки» и с высокой степенью точности можно положить $R_1 = 0.9$, $R_2 = 1.1$; α_0 – коэффициент поверхностного натяжения подложки.

Для успешного решения (3.56) необходимо определить распределение поверхностно-активного вещества вдоль свободной поверхности, т.е. решить (3.14). Это, в свою очередь, требует учета касательной к $\zeta(R)$ скорости движения жидкости

$$\vec{V}_\tau = \frac{V_R + V_Z \zeta'(R)}{1 + (\zeta'(R))^2} \vec{e}_R + \frac{V_R \zeta'(R) + V_Z (\zeta'(R))^2}{1 + (\zeta'(R))^2} \vec{e}_Z. \quad (3.57)$$

Кроме того, для решения данной задачи, необходимо исследовать диффузию поверхностно-активного вещества, его испарение и т.д. [1].

Изучение перечисленных вопросов, по всей видимости, может явиться предметом самостоятельного научного исследования. Однако указанная проблема выходит за пределы сформулированных задач настоящего диссертационного исследования и далее в работе не рассматривается.

§ 3.6. Анализ распределения ПАВ в поверхностном слое

Рассмотрим более подробно уравнение (3.14) баланса поверхностно-активного вещества в поверхностном слое. Для упрощения дальнейшего анализа представим Γ в виде суммы

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Delta\Gamma, \quad (3.58)$$

где $\Gamma_0(R)$ – начальное значение концентрации поверхностно-активного вещества в некоторой точке свободной поверхности, а $\Delta\Gamma(R)$ – характеризует изменение концентрации ПАВ в той же точке с течением времени.

Начальное условие (3.18), характеризующее общее количество ПАВ, наносимое на свободную поверхность, может быть записано непосредственно для концентрации и принимает в этом случае вид

$$\Gamma|_{t=0} = \Gamma_0 \quad \text{или} \quad \Delta\Gamma|_{t=0} = 0. \quad (3.59a)$$

Очевидно, в процессе роста области с деформированной поверхностью, концентрация ПАВ в поверхностном слое уменьшается ($\Delta\Gamma < 0$). Тогда, ввиду малости количества поверхностно-активного вещества наносимого на свободную

поверхность жидкости, справедливым является предположение о стремлении его концентрации к нулю через достаточно большой промежуток времени:

$$\Gamma|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad \text{или} \quad \Delta\Gamma|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \Gamma_0. \quad (3.59б)$$

Подставляя (3.58) в (3.14), приходим к уравнению

$$\frac{\partial\Gamma_0}{\partial t} + \frac{\partial\Delta\Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma_0 \cdot \vec{V}_\tau) + \operatorname{div}(\Delta\Gamma \cdot \vec{V}_\tau) + J_n = 0. \quad (3.60)$$

Упростим (3.60), исходя из анализа физического смысла выражений, входящих в данное уравнение. В связи с тем, что Γ_0 является постоянной величиной, не зависящей от времени, $\partial\Gamma_0/\partial t \equiv 0$. Величина $\partial\Delta\Gamma/\partial t$ характеризует скорость убыли концентрации поверхностно-активного вещества со временем, а $\operatorname{div}[(\Gamma_0 + \Delta\Gamma) \cdot \vec{v}_\tau]$ характеризует поток поверхностно-активного вещества из некоторого бесконечно малого объема жидкости.

Таким образом, уравнение (3.60) принимает вид:

$$\frac{\partial\Delta\Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma_0 \cdot \vec{V}_\tau) + \operatorname{div}(\Delta\Gamma \cdot \vec{V}_\tau) + J_n = 0. \quad (3.61)$$

Ограничиваясь анализом баланса поверхностно-активного вещества внутри «ямки» (в области А), перепишем (3.61) в виде

$$\frac{\partial\Delta\Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma_0 \cdot V_R|_{Z=h} \cdot \vec{e}_R) + \operatorname{div}(\Delta\Gamma \cdot V_R|_{R=h} \cdot \vec{e}_R) + J_n = 0. \quad (3.62)$$

Рассмотрим случай

$$\operatorname{div}(\Gamma_0 \cdot V_R|_{Z=h} \cdot \vec{e}_R) + J_n = 0. \quad (3.63)$$

С физической точки зрения он соответствует ситуации, когда все поверхностно-активное вещество, находящееся в поверхностном слое в начальный момент времени, «переходит» в объем жидкости (растворяется). Напомним, что построенная модель предполагает постоянство размеров области с деформированной поверхностью. Поток J_n представляет собой сумму истинного потока ПАВ из поверхностного слоя в объем жидкости j_n и фиктивного потока j'_n , компенсирующего изменение концентрации с ростом «ямки» в исследуемой

системе. Таким образом, процесс, описываемый соотношением (3.63), действительно имеет место.

Из (3.63) следует, что характер зависимости J_n от времени совпадает с характером зависимости от времени скорости движения подложки, то есть

$$J_n = \text{Const} \cdot \exp(-kt).$$

Физически это означает, что с течением времени поток поверхностно-активного вещества в поверхностный слой будет сокращаться. Это связано с ограниченным количеством ПАВ, наносимым на поверхность жидкости. При уменьшении его концентрации (более строго, градиента концентрации на границе «ямки») движение жидкости будет замедляться. Легко видеть, что характер зависимости от времени скорости движения жидкости и потока ПАВ совпадает. Это свидетельствует о том, что движение подложки определяется наличием ПАВ на ее поверхности, что является косвенным подтверждением справедливости построенной модели и ее решения.

Характер зависимости $\Gamma(t)$ при фиксированном значении R изображен на рис. 8. Из рисунка видно, что изменение концентрации ПАВ в поверхностном слое с течением времени можно условно разбить на три этапа. Вначале концентрация поверхностно-активного вещества практически не изменяется, затем наступает этап быстрого изменения Γ , который сменяется стремлением концентрации ПАВ к нулю. Это позволяет разделить процесс деформации свободной

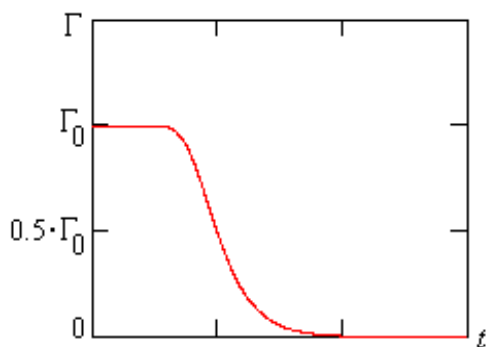


Рис. 8.

Зависимость концентрации ПАВ в поверхностном слое от времени

поверхности вследствие поверхностных сил и роста этих структур на следующие стадии:

- Стадия формирования структуры. На этом этапе происходит растекание приповерхностных слоев.
- Стадия быстрого роста, при которой область А («ямка») расширяется;
- Стадия прекращения роста. На этой стадии

градиент поверхностного натяжения компенсируется действием силы тяже-

сти, а движение жидкости прекращается также за счет влияния сил вязкого трения.

Частное решение (3.62), соответствующее (3.63), с учетом (3.59б) имеет вид

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{\xi}{k} \exp(-kt) - \int \frac{I_1(R) + \xi}{I_2(R)} dr \right) \right\}. \quad (3.64)$$

Здесь ξ – некоторая постоянная, связанная со скоростью адсорбции ПАВ; а через $I_1(R)$ и $I_2(R)$ обозначены величины

$$I_1(R) = -\frac{\eta\lambda}{k\rho} (Ce^{\beta h} + De^{-\beta h} + M \cos \lambda h - N \sin \lambda h) \cdot J_0(\beta R),$$

$$I_2(R) = -\frac{\eta\lambda}{k\rho} (Ce^{\beta h} + De^{-\beta h} + M \cos \lambda h - N \sin \lambda h) \cdot J_1(\beta R).$$

Численные оценки слагаемых в (3.64) позволяют сделать вывод, что условие (3.59а) выполняется с достаточной точностью при $\xi \gg k$. Это неравенство свидетельствует о том, что проникновение ПАВ в поверхностный слой прекращается значительно быстрее, чем затухает движение жидкости.

Дальнейшая задача связана с преобразованием полученного решения эталонной системы в решение исследуемой системы, проведением численного анализа и сравнением с результатами натурального эксперимента.

§ 3.7. Определение соотношений для исследуемой системы

Перейдем к анализу процессов, протекающих в исследуемой системе, используя выражения (3.44)–(3.46) для потенциала и вихревых компонент скорости движения жидкости под действием поверхностных сил в эталонной системе.

Выразим в соответствии с (2.20) и (2.21) потенциал и вихревые составляющие скорости движения жидкости в исследуемой системе, учитывая преобразование (3.11). В данном случае преобразование компонент скорости имеет вид: $U_R \rightarrow u_r$, $U_Z \rightarrow u_z$. Кроме того, (3.11) сохраняет характер зависимости от

вертикальной координаты z , что позволяет предположить независимость от z фазовой функции Q_i .

Тогда имеем:

$$u_r = -\frac{\lambda v}{k} Q_1(r, t) \cdot \exp(-kt) \cdot [M \cos \lambda z - N \sin \lambda z] J_1(\beta r / \bar{R}_0(t)), \quad (3.65)$$

$$u_z = \frac{v\beta}{k} Q_2(r, t) \cdot \exp(-kt) \cdot [M \sin \lambda z + N \cos \lambda z] J_0(\beta r / \bar{R}_0(t)), \quad (3.66)$$

$$\psi = \frac{\eta\lambda}{k\beta} Q_3(r, t) \cdot \exp(-kt) \cdot [C \exp(\beta z) + D \exp(-\beta z)] J_0(\beta r / \bar{R}_0(t)). \quad (3.67)$$

Подставляя (3.65)–(3.67) в уравнения для исследуемой системы (2.25), и учитывая соответствующие эталонные уравнения (2.26), приходим к системе уравнений для фазовой функции $\bar{R}_0(t)$ и фазовых множителей $Q_i(r, t)$. Для замыкания данной системы, связанного с согласованием масштаба вдоль координатных осей z и r , следует использовать уравнение неразрывности. Указанные уравнения имеют достаточно громоздкий вид и поэтому опускаются.

Дальнейший анализ связан с решением полученной системы уравнений и определением вида фазового множителя $\bar{R}_0(t)$ и фазовых функций $Q_i(r, t)$, подстановка указанных соотношений в (3.65)–(3.67) и получение окончательного выражения для скорости движения жидкости под действием поверхностных сил на основе (2.27).

Найдем зависимость $\bar{R}_0(t)$ на основе физических соображений. Как уже отмечалось, при движении жидкости под действием поверхностных сил имеет место ее переток из области под «ямкой» (рис. 1) во внешнее пространство. По этой причине на основе закона сохранения вещества имеется возможность оценить скорость движения жидкости относительно границы «ямки» и, соответственно, скорость ее роста со временем.

Обозначая через $V^{(str)}$ скорость движения границы «ямки», запишем соотношение для скорости движения жидкости относительно этой границы:

$$V_R \Big|_{R=1} - V^{(str)}. \quad (3.68)$$

Эту величину можно рассматривать как скорость жидкости, перетекающей в область А из области Б. Очевидно, из закона сохранения вещества, поток вектора этой скорости через границу области с деформированной поверхностью равен скорости изменения объема жидкости в области А:

$$\int_s (V_R|_{R=1} - V^{(str)}) ds = \frac{d \text{Vol}}{dt},$$

где через Vol обозначен объем жидкости внутри области с деформированной свободной поверхностью.

Выполняя преобразования в последнем выражении и полагая толщину H вне «ямки» постоянной, а границу «ямки» достаточно узкой (что соответствует построенной теоретической модели), получим выражение для скорости $V^{(str)}$ движения ее границы

$$V^{(str)} = \frac{1}{2H} \int_0^H V_R|_{R=1} dZ. \quad (3.69)$$

Величина $V^{(str)}$ характеризует движение *границы* структуры, а не самой жидкости в этой области, и поэтому она не зависит ни от R , ни от Z . А поскольку радиальная компонента V_R скорости жидкости берется при фиксированном значении R , то для определения $V^{(str)}$ не имеет значения: записана ли V_R в относительных координатах или вместо нее записана компонента скорости v_r в обычных координатах.

Подставляя в (3.69) выражение (3.39) для радиальной компоненты V_R скорости движения жидкости и выполняя интегрирование, запишем

$$V^{(str)} = -\frac{\eta\lambda}{2Hk\rho} \left(\frac{C}{\beta} \exp(\beta H) - \frac{D}{\beta} \exp(-\beta H) + \frac{M}{\lambda} \sin \lambda H + \frac{N}{\lambda} \cos \lambda H \right) \exp(-kt) J_1(\beta \cdot 1). \quad (3.70)$$

Выражение (3.70) определяет скорость движения границы «ямки». Интегрируя его по времени, можно получить выражение для радиуса этой структуры как функции времени:

$$R_0 = \int_0^t v^{(A)} dt = \frac{\eta\lambda}{2h\rho} \left(\frac{D}{\beta} \exp(-\beta H) - \frac{C}{\beta} \exp(\beta H) - \frac{M}{\lambda} \sin \lambda H - \frac{N}{\lambda} \cos \lambda H \right) J_1(\beta \cdot 1) \cdot (1 - \exp(-kt)). \quad (3.71)$$

Анализ полученного выражения при $t = 0$ и при $t \rightarrow \infty$ показывает, что в момент времени $t = 0$ радиус структуры равен нулю $R_0 = 0$, а при $t \rightarrow \infty$ стремится к некоторой величине

$$R_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R_0 = \frac{\eta\lambda}{2h\rho} \left(\frac{C}{\beta} \exp(\beta H) - \frac{D}{\beta} \exp(-\beta H) + \frac{M}{\lambda} \sin \lambda H + \frac{N}{\lambda} \cos \lambda H \right) J_1(\beta \cdot 1). \quad (3.72)$$

Численный расчет, выполненный для подложки толщиной $H = 1$ мм, показывает, что предельный радиус образующегося результате движения жидкости сухого пятна в этом случае равен $R_\infty = 8,3$ см, что соответствует оценочным экспериментам.

Безразмерная фазовая функция $\bar{R}_0(t)$ получается путем деления радиуса «ямки» на размерную константу (например, 1 мм или 1 см в зависимости от выбора системы координат), что позволяет записать уравнения для фазовых множителей. Ввиду громоздкости полученных выражений, в настоящей работе они не приводятся.

Дальнейшая подстановка фазовых функций и фазовых множителей в (3.65)–(3.67) и использование (2.27) приводит к соотношениям для скорости движения жидкости под действием поверхностных сил.

§ 3.8. Численный анализ полученных результатов

В соответствии с идеями о комплексном исследовании математических моделей [105], дальнейший анализ предполагает использование численного моделирования. В его основу положим полученные в § 3.3 и § 3.7 выражения собственных функций скорости движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил (соответственно в эталонной и исследуемой системах).

Численное моделирование будем проводить на основе известного вариационного метода Ритца [69, 71]. Основная идея указанного метода заключается в поиске разложения искомого решения по некоторой полной системе функций. Коэффициенты данного разложения определяются на основе минимизации некоторого функционала от искомого решения.

Согласно [9] истинное движение вязкой несжимаемой жидкости удовлетворяет требованию минимума функционала

$$I(v) = \int_V Dis \cdot dV - \int_V F_i v^i dV - \int_S P_i v^i ds, \quad (3.73)$$

где F_i и P_i – соответственно объемные и поверхностные силы, Dis – диссипативный потенциал. Рассмотрим выражения, входящие в (3.73), более подробно. Для этого введем цилиндрическую систему координат.

Второе слагаемое в (3.73) содержит объемные силы. Единственной объемной силой, действующей на жидкость в рассматриваемом случае, является сила тяжести ρg :

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -\rho g. \quad (3.74)$$

Поверхностные силы P_i , действующие на тонкий слой жидкости, обусловлены распределением на ПАВ на свободной поверхности:

$$\vec{P} = grad\alpha = -\frac{d\alpha}{d\Gamma} grad\Gamma. \quad (3.75)$$

Здесь вектор \vec{P} , а также, градиент, направлены вдоль свободной поверхности. Если свободная поверхность s задана уравнением $z = \zeta(r)$, а распределение ПАВ – $\Gamma(r)$, имеет место равенство:

$$P_i \cdot v_\tau^i = -\frac{d\alpha}{d\Gamma} grad\Gamma \cdot \vec{v}_\tau = -\frac{d\alpha}{d\Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{dr} \cdot (v_r + v_z \zeta'). \quad (3.76)$$

Диссипативная функция, входящая в первое слагаемое (3.73), определяется из выражения [101]:

$$Dis = \eta \left(e^{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (e^i_i)^2 \right). \quad (3.77)$$

Здесь e^i и $e^j e_j$ – соответственно первый и второй (линейный и квадратичный) инварианты тензора скоростей деформации. Подстановка известных значений [101] компонент данного тензора в цилиндрических координатах приводит к следующему соотношению:

$$Dis = \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \eta \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2. \quad (3.78)$$

Подставляя (3.74), (3.76) и (3.78) в (3.73), получим

$$I(v) = \frac{d\alpha}{d\Gamma} \cdot \int_0^{r_0} r \frac{d\Gamma}{dr} \cdot [v_r(r, \zeta(r)) + v_z(r, \zeta(r)) \cdot \zeta'] \sqrt{1 + (\zeta')^2} dr + \int_0^{r_0} r dr \int_0^{\zeta(r)} \left[\eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \eta \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \rho g v_z \right] \cdot dz. \quad (3.79)$$

Дальнейшая задача связана с подстановкой в (3.79) выражений компонент скорости движения жидкости и поиск минимума указанного функционала. Требование минимума (3.79) может использоваться как при анализе процессов в эталонной системе, так и при изучении поведения исследуемой системы.

В результате подстановки в (3.79) собственных функций (3.39) и (3.40) движения жидкости в эталонной системе и минимизации указанного функционала, найдена зависимость радиальной и вертикальной составляющих скорости от радиальной координаты. Ее вид изображен на рис. 9 и 10.

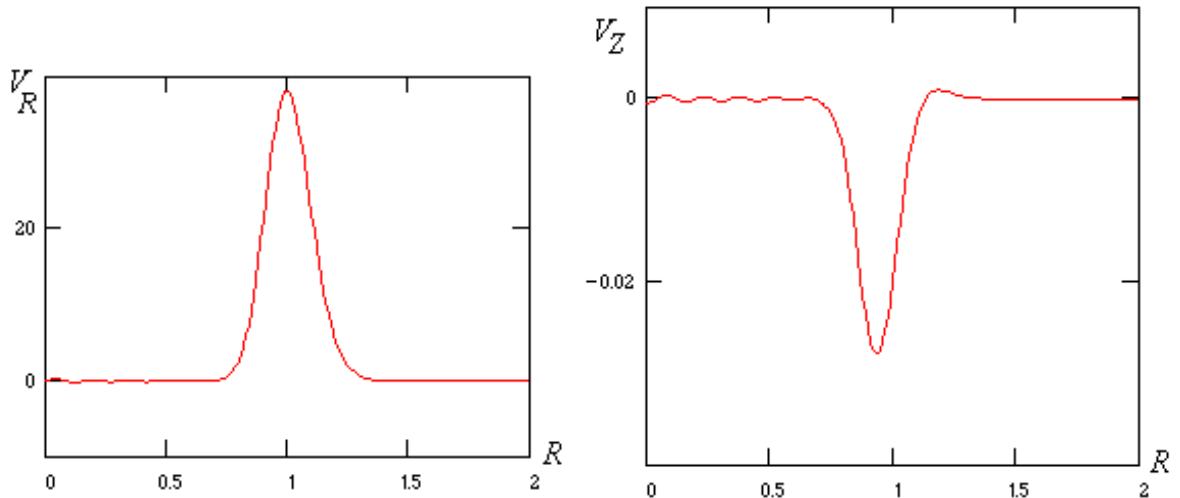


Рис. 9. Зависимость компоненты V_R (мм/с) скорости движения жидкости от R .

Рис. 10. Зависимость компоненты V_Z (мм/с) скорости движения жидкости от R .

Анализ приведенных зависимостей позволяет сделать следующие выводы о характере движения жидкости:

1. Наиболее интенсивное движение жидкой подложки имеет место вблизи границы «ямки». Причем характер этого движения таков, что жидкость как бы «отступает» от области А (см. рис. 1).
2. Возникает переток жидкости из области А через область Б в область В, о чем свидетельствует сравнительный анализ рис 9 и 10.
3. В области А движение жидкости в приповерхностных слоях носит вихревой характер, что соответствует существующим представлениям о процессах на границе двух разнородных жидкостей [79, 158] и подтверждает справедливость рассмотренной модели.

Перейдем к анализу процессов в исследуемой системе. Для этого подставим в функционал (3.79) собственные функции скорости движения жидкости в исследуемой системе и минимизируем (3.79). Это позволило создать динамическую компьютерную модель движения тонкого слоя жидкости при точечном нанесении на ее поверхность небольшого количества ПАВ. В качестве примера ее использования на рис. 11 и 12 приведено состояние свободной поверхности

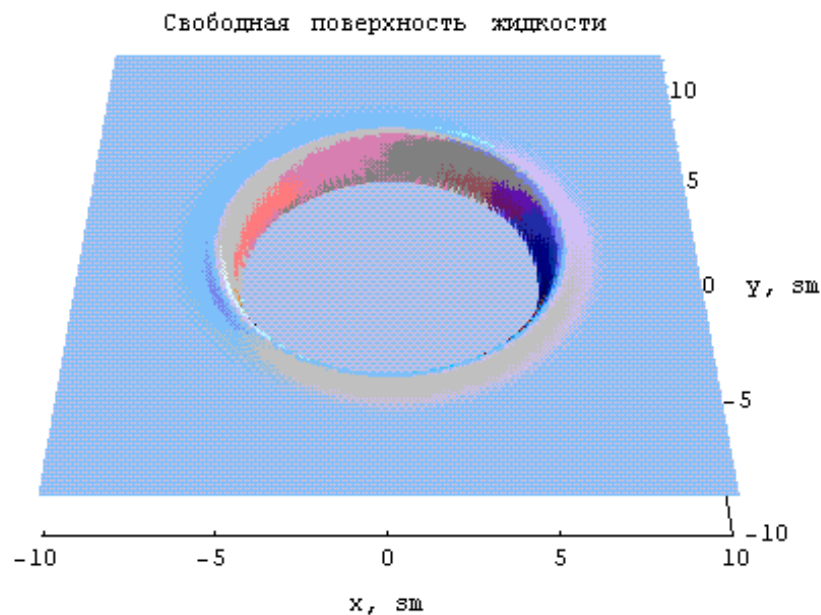


Рис. 11. Моделирование деформации свободной поверхности с течением времени

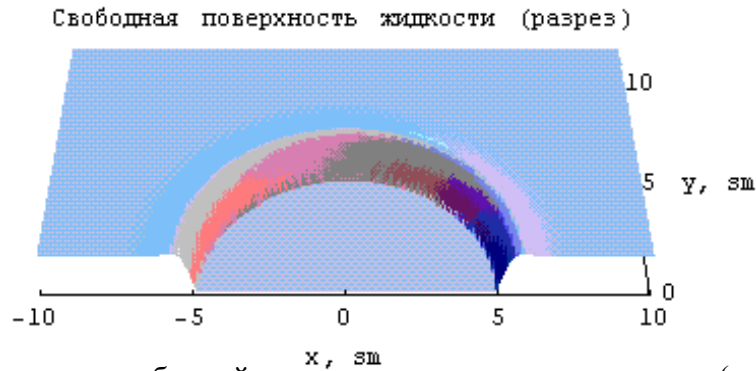


Рис. 12. Деформация свободной поверхности с течением времени (разрез)

жидкости бесконечной площади в момент времени $t = 4,0$ s. Толщина слоя равна $H = 1$ mm.

Из рисунков отчетливо видно существенное уменьшение толщины подложки (практически до нуля) в области нанесения ПАВ. На образующейся структуре четко выделяются собственно локальная область (имеющая толщину, близкую к нулю), невозмущенная область вокруг локальной структуры и пограничная область. Наличие сравнительно небольшого переднего фронта подтверждает сформулированную выше гипотезу о перетоке жидкости из локальной области (области А на рис. 1) через границу (область Б на рис. 1) во внешнее пространство (область В на рис. 1).

Исследование разработанной компьютерной модели движения тонкого слоя жидкости при точечном нанесении на ее поверхность ПАВ позволило сформулировать к следующие результаты.

1. Осесимметричное течение тонкого слоя жидкости приводит к деформации свободной поверхности и образованию здесь сухого участка.
2. Деформация поверхности и, соответственно, размер образующейся локальной структуры увеличиваются с уменьшением толщины подложки.
3. Линейные размеры образующихся вследствие движения жидкости «сухих пятен» увеличиваются с ростом разности коэффициентов поверхностного натяжения жидкости-подложки и ПАВ.
4. Также на размер образующихся областей с деформированной поверхностью оказывает существенное влияние количество поверхностно-активного веще-

ства. Эта зависимость имеет монотонный возрастающий характер, выходящий на насыщение.

Приведенные выводы подтверждаются данными известного эксперимента [170].

Итак, в настоящей главе выполнено математическое моделирование движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил. Получено поле скоростей движения жидкости и теоретически исследована динамика течения. Показано, что при движении тонкого слоя жидкости вследствие нанесения ПАВ возникает деформация свободной поверхности вплоть до образования сухого участка. Деформация поверхности и, соответственно, размер образующейся «ямки» увеличиваются с уменьшением толщины подложки, ростом разности коэффициентов поверхностного натяжения жидкой подложки и ПАВ и зависит от количества поверхностно-активного вещества.

Основные результаты настоящей главы опубликованы в [54, 58, 59, 139]. В работе [54] рассмотрен частный случай движения жидкости при образовании структур, радиус которых велик.

Глава IV. Математическое моделирование анизотропных течений на примере движения магнитной жидкости

§ 4.1. Общий анализ влияния магнитного поля на расходящиеся течения магнитной жидкости

Рассмотрим течение тонкого слоя магнитной жидкости под действием поверхностных сил, которую будем считать однородной однокомпонентной средой, помещенной во внешнее однородное горизонтальное магнитное поле H_0 .

Ограничимся исследованием случая, при котором поверхность магнитной жидкости имеет бесконечную площадь, а ее вязкость и поверхностное натяжение являются изотропными величинами и существенно не зависят от напряженности магнитного поля. Как показывает анализ (Приложение 3), рассматриваемое приближение справедливо для коллоидов с умеренной концентрацией твердой фазы в магнитных полях напряженностью до 1 кА/м.

По всей видимости, нанесение ПАВ на поверхность магнитной жидкости также приводит к растекающемуся течению, деформирующему свободную поверхность вплоть до образования здесь сухого участка (рис. 1).

Однако магнитное поле изменяет граничные условия на свободной поверхности жидкости, а также приводит к возникновению объемной пондеромоторной силы

$$\vec{f}_{magn} = \mu_0 (\vec{M} \nabla) \vec{H}. \quad (4.1)$$

Эта сила возникает вследствие неоднородности магнитного поля в магнитной жидкости вследствие наличия в ней немагнитной полости (сухого пятна).

Пусть образовавшееся сухое пятно имеет круглую форму. Аппроксимируем полость с помощью цилиндра. Такое приближение возможно, поскольку ширина границы сухого участка (области Б на рис. 1) значительно меньше его

размеров. Ограничимся грубым приближением, пренебрегая влиянием краевых эффектов искажения магнитного поля на верхнем и нижнем основаниях «цилиндра».

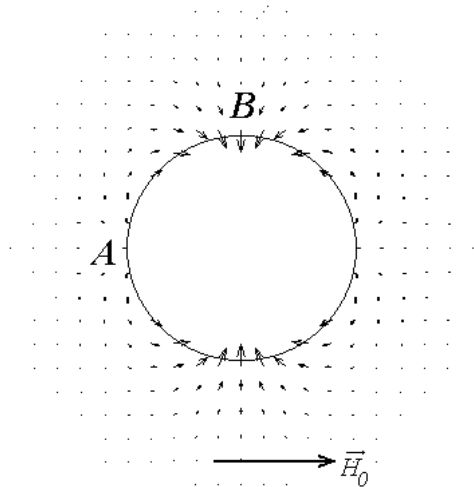


Рис. 13. Векторная диаграмма ponderomotive силы, действующей на магнитную жидкость, в окрестности сухого участка

В этом случае ponderomotive сила как изображено на рис. 13, приводит к вытягиванию сухого пятна вдоль внешнего поля, которое, по всей видимости, принимает эллиптическую форму.

Аналогичные результаты следуют из вычисления скачка давления в магнитной жидкости на границе сухого пятна по известным соотношениям, полученным В.В. Чекановым [109, 110], которые в системе СИ имеют вид

$$\Delta p = \frac{1}{2} \mu_0 M^2. \quad (4.2)$$

Намагниченность феррожидкости в точке В выше, чем в А. Это приводит к увеличению давления в этой точке и, соответственно, к течениям, «сжимающим» сухой участок, который принимает эллиптическую форму.

Найдем количественную зависимость параметров эллиптической «ямки» от напряженности H_0 внешнего однородного магнитного поля. Для этого рассмотрим статическую задачу о форме свободной поверхности жидкости в момент времени $t \rightarrow \infty$ (предполагается, что сухой пятно уже сформировалось и приобрело эллиптическую форму). Равновесная форма поверхности в этом случае определяется балансом нормального напряжения и капиллярных сил, то есть динамическими граничными условиями [6]:

$$p^{(i)} - p^{(e)} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{2} \mu_0 \left[\left(\vec{M}^{(i)} \vec{n} \right)^2 - \left(\vec{M}^{(e)} \vec{n} \right)^2 \right]. \quad (4.3)$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная; $p^{(i)}$, $p^{(e)}$ и $\vec{M}^{(i)}$, $\vec{M}^{(e)}$ – соответственно давле-

ние и намагниченности внутри и вне сухого участка, R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны, \vec{n} – нормаль к свободной поверхности.

В этом случае $p^{(i)} = p^{(e)}$ (атмосферное давление внутри и вне структуры одинаковы, а в силу малости толщины подложки гидростатическим давлением $g\rho h$ можно пренебречь); $\vec{M}^{(i)} = 0$ (намагниченность воздушной полости равна нулю); $R_1 = R$, $R_2 = 0$. Тогда уравнение (4.3) принимает вид:

$$\frac{\alpha}{R} = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\vec{M}^{(e)} \vec{n} \right)^2. \quad (4.4)$$

В случае малых полей \vec{H}_0 намагниченность в (4.4) выражается через напряженность магнитного поля вне эллиптической немагнитной полости линейно. Значение напряженности определяется стандартными методами электродинамики [77, 103].

В целях упрощения анализа перепишем уравнение (4.4) для расстояния $2a$ между фокусами эллипса, аппроксимирующего «сухое пятно». Учитывая выражения для напряженности магнитного поля вне «ямки» как функции внешнего поля H_0 , имеем следующее уравнение для a

$$\frac{R_0 \sqrt{a^4 + 4R_0^4}}{\left(a^2 + \sqrt{a^4 + 4R_0^4} \right)^{5/4}} \cdot \left[\left(\frac{2R_0^2/a^2}{2R_0^2/a^2 + 1} \right)^2 C + 1 \right] = \sqrt[4]{2} \frac{\sqrt{\alpha}}{H_0 \sqrt{\mu_0 \chi}}. \quad (4.5)$$

Здесь R_0 – радиус круглой «ямки», имеющей ту же площадь, что и эллиптическая¹, χ и μ – соответственно магнитная восприимчивость и проницаемость жидкости, $C = \frac{1-\mu}{1+\mu}$. Результат численного решения уравнения (4.5) схематически изображен на рис. 14.

Из рисунка видно, что с ростом H_0 степень вытянутости сухого участка

¹ Последнее замечание имеет глубокий физический смысл, связанный с тем, что магнитное поле не совершает работы. Из этого следует неизменность площади круговой и эллиптической полости, форма которых определяется только отсутствием или наличием внешнего горизонтального магнитного поля.

вдоль внешнего магнитного поля увеличивается. Причем, характер зависимости a от поля при различных радиусах R_0 соответствующей круглой структуры различен: при малых R_0 для существенного ее вытягивания необходимо весьма мощное внешнее магнитное поле; в то время как при больших значениях R_0 «ямка» может вытягиваться и при сравнительно слабых полях. Это объясняется тем, что с ростом напряженности внешнего магнитного поля H_0 , также как и с ростом R_0 возрастает величина неоднородности магнитного поля, что приводит

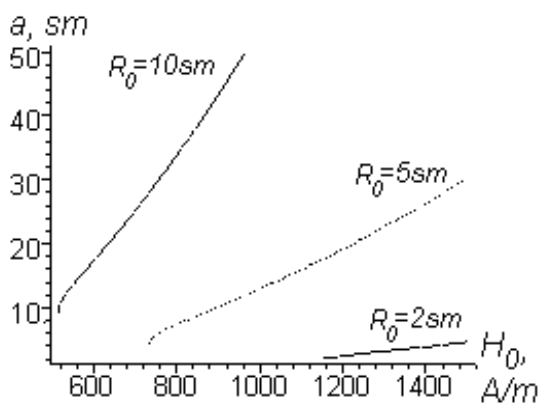


Рис. 14. Схематическое изображение зависимости половины a расстояния между фокусами эллипса, аппроксимирующего «сухое пятно», от напряженности внешнего магнитного поля H_0

к появлению бо́льшей ponderomotorной силы, вытягивающей «ямку» вдоль внешнего поля.

Последний результат, как указано в Приложении 3, справедлив при относительно слабых магнитных полях. В сильных полях влияние ponderomotorной силы уменьшается, а ведущую роль при деформации сухих областей, образующихся при движении жидкости вследствие эффекта Марангони, играет

анизотропия поверхностного натяжения.

Таким образом, магнитное поле вытягивает «ямку», образующуюся вследствие движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил. В связи с этим при движении магнитной жидкости появляется выделенное направление вдоль напряженности внешнего горизонтального магнитного поля, то есть течение приобретает анизотропный характер.

В дальнейшем рассмотрим в качестве примера анизотропное течение тонкого слоя магнитной жидкости.

§ 4.2. Математическая модель движения тонкого слоя магнитной жидкости

Математическая модель движения тонкого слоя магнитной жидкости под

действием поверхностных сил отличается от модели (3.1)–(3.10) аналогичного процесса в обычной жидкости наличием дополнительных слагаемых в уравнении Навье-Стокса и изменением вида некоторых граничных условий.

По аналогии с [2, 5], запишем систему уравнений движения магнитной жидкости

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -grad \left(p + \frac{\mu_0}{2} H^2 \right) + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} + \mu_0 (\vec{M} \nabla) \vec{H}, \quad (4.6)$$

$$div \vec{v} = 0, \quad (4.7)$$

дополненную уравнением баланса поверхностно-активного вещества в поверхностном слое

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + div(\Gamma \vec{v}_\tau) + j_n = 0. \quad (4.8)$$

Здесь \vec{v} – скорость жидкости, p – давление, η – динамическая вязкость, ρ – плотность жидкости, \vec{H} – локальная напряженность магнитного поля в магнитной жидкости, Γ – концентрация ПАВ в поверхностном слое, \vec{v}_τ – касательная составляющая скорости движения жидкости на свободной поверхности, D_s – коэффициент диффузии, j_n – поток ПАВ из объема жидкости в поверхностный слой и обратно.

Начальные условия и условия на твердой границе совпадают с соответствующими условиями для обычной жидкости:

$$\vec{v}|_{t=0} = 0 \quad (4.9)$$

$$\Gamma|_{t=0} = \Gamma_0. \quad (4.10)$$

$$\vec{v}|_{s'} = 0, \quad (4.11)$$

Условия для тензора напряжений на свободной поверхности имеют вид:

$$p_{ij} n_j|_s = -\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i, \quad p_{ij} \tau_j|_s = grad \alpha \cdot \tau_j = -\frac{\partial \alpha}{\partial \Gamma} grad \Gamma \cdot \tau_j, \quad (4.12)$$

где \vec{n} и $\vec{\tau}$ – соответственно нормаль и касательный вектор к свободной поверхности, $p_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \mu_0 \left(H_i H_j - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ij} \right)$ – тензор напряжений.

Для замыкания системы (4.6) – (4.12) необходимо, как и для обычной жидкости, ввести уравнение эволюции свободной поверхности s (динамическое граничное условие):

$$\frac{d\vec{r}|_m}{dt} = \vec{v}|_m, \quad \forall m \in s, \quad (4.13)$$

с начальным условием, описывающем форму свободной поверхности в момент времени $t = 0$.

Система уравнений (4.6) – (4.8), (4.13) с условиями (4.9)–(4.13) и начальным условием, накладываемым на (4.13), полностью описывает движение тонкого слоя магнитной жидкости во внешнем магнитном поле под действием поверхностных сил.

Несколько упростим рассматриваемую математическую модель, введя систему координат эллиптического цилиндра (σ, τ, z) . Сопоставим твердую поверхность s' с плоскостью $z = 0$, а начало отсчета $\sigma \geq 1$ – с областью нанесения поверхностно-активного вещества. Выбор данной координатной системы связан с анизотропным характером течения, вследствие действия магнитного поля.

Тогда выражение (4.11) принимает вид

$$\vec{v}|_{z=0} = 0, \quad (4.11a)$$

а начальное условие, накладываемое на (4.13) записывается следующим образом:

$$z|_{s,t=0} = \zeta_0(\sigma, \tau). \quad (4.14)$$

Начально-краевая задача (4.6) – (4.14) также как и аналогичная задача (3.1) – (3.10) относится к классу задач *со свободной границей* [8]. Решение задач этого класса в общей постановке весьма затруднительно. Поэтому ограничимся анализом ряда частных случаев, соответствующих различным значениям параметра Str , являющегося отношением пондеромоторной силы f_{magn} и силы поверхностного натяжения f_{surf} (более подробно см. Приложение 4):

$$Str = \frac{f_{magn}}{f_{surf}} = \mu_0 \frac{\Delta M \cdot \Delta H \cdot b}{\Delta \alpha}. \quad (4.15)$$

Здесь $\Delta\alpha$ – разность коэффициентов поверхностного натяжения магнитной жидкости и поверхностно-активного вещества, b – линейный размер «ямки» в направлении, перпендикулярном внешнему магнитному полю; ΔM и ΔH соответственно характеризуют изменение намагниченности и напряженности магнитного поля на расстоянии порядка b .

Безразмерный параметр Str является вспомогательным и позволяет в предельных случаях рассматривать эволюцию области с деформированной поверхностью, только как увеличение ее площади ($Str \ll 1$) или как ее вытягивание вдоль внешнего магнитного поля ($Str \gg 1$). Процессы, имеющие место при $Str \sim 1$, которые, по всей видимости, являются сильно неравновесными и могут носить характер бифуркаций, заслуживают отдельного внимания. Несмотря на то, что значение Str с течением времени изменяется, процессы при $Str \ll 1$ и при $Str \gg 1$ происходят последовательно, заметно разделены во времени, что делает возможным самостоятельное исследование каждого из них.

В зависимости от соотношения между силой поверхностного натяжения и пондеромоторной силой в начальный момент времени характер движения жидкости и эволюции образующейся «ямки» различен. Рассмотрим два предельных случая:

I. $Str \ll 1$: сила поверхностного натяжения значительно превосходит пондеромоторную силу. Тогда вначале происходит быстрый рост практически круглой «ямки», что приводит, с одной стороны, к уменьшению сил поверхностного натяжения за счет уменьшения концентрации ПАВ на свободной поверхности, а с другой, – к росту пондеромоторной силы. Эти процессы характеризуются, в соответствии с (4.15), возрастанием Str и приводят к последующему вытягиванию области деформации вдоль линий напряженности внешнего магнитного поля.

II. $Str \gg 1$: пондеромоторная сила значительно превосходит силу поверхностного натяжения. В этом случае, напротив, вначале происходит быстрое вытягивание образовавшейся структуры вдоль силовых линий внешнего магнитного

поля, что приводит к уменьшению пондеромоторной силы, характеризующееся уменьшением Str . В дальнейшем продолжается рост вытянутой «ямки» со слабо меняющимся эксцентриситетом.

Таким образом, при $Str \ll 1$ в начальный момент времени, решение задачи (4.6) – (4.14) может быть заменено поэтапным исследованием движения магнитной жидкости под действием «только» сил поверхностного натяжения, рассмотренного в предыдущей главе, и последующего вытягивания образовавшейся структуры вдоль внешнего магнитного поля под действием «только» пондеромоторных сил.

Во втором предельном случае, при $Str \gg 1$ в начальный момент времени, движение жидкости носит более сложный характер. Тем не менее, основываясь на качественном анализе характера движения жидкости и эволюции образующихся в результате этого структур, справедлив вывод о том, что магнитное поле, вытягивающее образовавшуюся «ямку», заменяет круговую симметрию системы эллиптической. То есть влияние магнитного поля связано с возникновением выделенного направления, за счет чего течение магнитной жидкости приобретает анизотропный характер.

Тогда, с учетом предположения об изменении симметрии течения, краевую задачу (4.6) – (4.14) принимает вид

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -grad p + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (4.16)$$

$$div \vec{v} = 0, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + div(\Gamma \vec{v}_\tau) + j_n = 0, \quad (4.18)$$

$$\vec{v}|_{t=0} = 0, \quad (4.19)$$

$$\Gamma|_{t=0} = \Gamma_0, \quad (4.20)$$

$$\vec{v}|_{z=0} = 0, \quad (4.21)$$

$$p_{ij} n_j|_s = -\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} \right) n_i, \quad p_{ij} \tau_j|_s = grad \alpha \cdot \tau_j = -\frac{\partial \alpha}{\partial \Gamma} grad \Gamma \cdot \tau_j; \quad (4.22)$$

$$\frac{d\vec{r}|_m}{dt} = \vec{v}|_m, \quad \forall m \in s; \quad (4.23)$$

$$z|_{s,t=0} = \zeta_0(\sigma). \quad (4.24)$$

Здесь тензор напряжений имеет вид

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.25)$$

На (4.16)–(4.25) накладывается дополнительное условие, учитывающее эллиптическую симметрию системы. Оно связано с равенством нулю эллиптической компоненты v_τ скорости движения подложки и независимостью произвольной физической величины \aleph от эллиптической координаты τ системы координат эллиптического цилиндра (σ, τ, z) :

$$v_\tau \equiv 0, \quad \partial \aleph / \partial \tau \equiv 0. \quad (4.26)$$

Задача (4.16) – (4.25) с учетом (4.26) и предположений об объемной силе, действующей на жидкость, отличается с формальной точки зрения от аналогичной задачи для немагнитной подложки только иной симметрией физической системы. Это позволяет найти ее решение, используя результат предыдущей главы для немагнитной подложки и *метода эталонных уравнений*.

§ 4.3. Предварительное преобразование соотношений для исследуемой и моделирующей систем

Поскольку и исследуемая, и эталонная система обладают определенной геометрической симметрией, потребуем ее сохранения в процессе преобразования решения. Это возможно в случае:

$$R \rightarrow \sigma, \quad \Phi \rightarrow \tau, \quad Z \rightarrow z. \quad (4.27)$$

Соответственно преобразования потенциала и вихревых составляющих скорости движения жидкости скорости имеют вид

$$U_R \rightarrow u_\sigma, \quad U_Z \rightarrow u_z, \quad \Psi \rightarrow \psi. \quad (4.28)$$

Для упрощения процесса преобразования решения модели в решение исследуемой системы воспользуемся относительными координатами по аналогии

с введенными в предыдущей главе:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{c \cdot \sigma_0(t)}. \quad (4.29)$$

Здесь величина $\sigma_0(t)$ характеризует размер «ямки» в обычных координатах. В отличие от относительных цилиндрических координат, используемых выше, система относительных координат эллиптического цилиндра является безразмерной.

Коэффициент c ($c < 1$) в (4.29) вводится из следующих соображений. Гиперболическая координата σ в системе эллиптического цилиндра изменяется в пределах от единицы до бесконечности. При отсутствии коэффициента c относительная координата, равная единице, всегда совпадала бы с границей деформированной поверхности, что не позволило бы рассматривать движение жидкости внутри нее. Поскольку выбор конкретного значения c не ограничивает общности решаемой задачи, положим для определенности $c = 1/2$. В этом случае граница «ямки» образующейся в результате движения магнитной жидкости во внешнем магнитном поле под действием поверхностных сил соответствует значению $\tilde{\sigma} = 2$.

Кроме параметра σ_0 для описания эллиптической «ямки» введем параметр a , равный половине расстояния между ее фокусами. Он также записывается в относительных координатах. Как показано в § 4.1, зависимость a от внешнего магнитного поля \vec{H}_0 носит монотонный возрастающий характер.

Выражения вихревых составляющих и потенциала скорости движения жидкости в эталонной системе соответственно имеют вид

$$U_R = -\frac{\lambda v}{k} \exp(-kt) \cdot [M \cos \lambda Z - N \sin \lambda Z] \cdot J_1(\beta R),$$

$$U_Z = \frac{v\beta}{k} \exp(-kt) \cdot [M \sin \lambda Z + N \cos \lambda Z] \cdot J_0(\beta R),$$

$$\Psi = \frac{\eta\lambda}{k\beta} \exp(-kt) \cdot [C \exp(\beta Z) + D \exp(-\beta Z)] \cdot J_0(\beta R).$$

В дальнейшем удобнее использовать обозначения

$$U_R = -\frac{\lambda v}{k} \exp(-kt) \cdot [M \cos \lambda Z - N \sin \lambda Z] \cdot \tilde{U}_R(R), \quad (4.30)$$

$$U_Z = \frac{v\beta}{k} \exp(-kt) \cdot [M \sin \lambda Z + N \cos \lambda Z] \cdot \tilde{U}_Z(R), \quad (4.31)$$

$$\Psi = \frac{\eta\lambda}{k\beta} \exp(-kt) \cdot [C \exp(\beta Z) + D \exp(-\beta Z)] \cdot \tilde{\Psi}(R). \quad (4.32)$$

Учитывая, что при переходе от эталонной системы к исследуемой изменяется только симметрия в горизонтальной плоскости, будем предполагать, что характер зависимости потенциала и вихревых компонент скорости жидкости от вертикальной координаты z (или Z), а также от времени t при преобразовании не изменяется.

Тогда запишем:

$$u_\sigma = -\frac{\lambda v}{k} \exp(-kt) \cdot [M \cos \lambda z - N \sin \lambda z] \cdot \tilde{u}_\sigma(\tilde{\sigma}), \quad (4.33)$$

$$u_z = \frac{v\beta}{k} \exp(-kt) \cdot [M \sin \lambda z + N \cos \lambda z] \cdot \tilde{u}_z(\tilde{\sigma}), \quad (4.34)$$

$$\psi = \frac{\eta\lambda}{k\beta} \exp(-kt) \cdot [C \exp(\beta z) + D \exp(-\beta z)] \cdot \tilde{\psi}(\tilde{\sigma}). \quad (4.35)$$

Подставляя (4.33)–(4.35) в уравнения (2.25) для исследуемой системы, записанные в системе координат эллиптического цилиндра, и выполняя преобразования, получим:

$$\frac{\tilde{\sigma}^2 - 1}{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2} \frac{d^2 \tilde{u}_\sigma}{d\tilde{\sigma}^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2} \frac{d\tilde{u}_\sigma}{d\tilde{\sigma}} - \frac{\tilde{\sigma}^2 (\tilde{\sigma}^2 - 1) + \tau^2 (1 - \tau^2)}{(\tilde{\sigma}^2 - \tau^2)^3} \tilde{u}_\sigma + \beta^2 a^2 \tilde{u}_\sigma = 0, \quad (4.36)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}^2 - 1}{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2} \frac{d^2 \tilde{u}_z}{d\tilde{\sigma}^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2} \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{\sigma}} + \beta^2 a^2 \tilde{u}_z = 0, \quad (4.37)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}^2 - 1}{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2} \frac{d^2 \tilde{\psi}}{d\tilde{\sigma}^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2} \frac{d\tilde{\psi}}{d\tilde{\sigma}} + \beta^2 a^2 \tilde{\psi} = 0. \quad (4.38)$$

Аналогичная подстановка (4.30)–(4.32) в уравнения (2.26) для модели приводят к уравнениям:

$$\frac{d^2\tilde{U}_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\tilde{U}_R}{dR} - \frac{\tilde{U}_R}{R^2} + \beta^2\tilde{U}_R = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{d^2\tilde{U}_Z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\tilde{U}_Z}{dR} + \beta^2\tilde{U}_Z = 0, \quad (4.40)$$

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\tilde{\Psi}}{dR} + \beta^2\tilde{\Psi} = 0. \quad (4.41)$$

Дальнейший анализ связан с непосредственным решением системы (4.36)–(4.38) на основе расчетной схемы ММЭУ, используя уравнения (4.39)–(4.41) в качестве эталонных.

§ 4.4. Определение общего вида выражения для скорости жидкости

Перейдем к непосредственному решению уравнений (4.36)–(4.38). Выражая в соответствии с (2.20) и (2.29) решение исследуемой системы \tilde{u}_σ , \tilde{u}_z и $\tilde{\psi}$ через решение модели \tilde{U}_R , \tilde{U}_Z и $\tilde{\Psi}$, запишем

$$\tilde{u}_\sigma(\tilde{\sigma}) = Q_1(\tilde{\sigma}, \tau) \cdot \tilde{U}_R(R_1(\tilde{\sigma}, \tau)), \quad (4.42)$$

$$\tilde{u}_z(\tilde{\sigma}) = Q_2(\tilde{\sigma}, \tau) \cdot \tilde{U}_Z(R_2(\tilde{\sigma}, \tau)). \quad (4.43)$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{\sigma}) = Q_3(\tilde{\sigma}, \tau) \cdot \tilde{\Psi}(R_3(\tilde{\sigma}, \tau)). \quad (4.44)$$

Подставим (4.42)–(4.44) соответственно в (4.36)–(4.38) и учтем соответствующие эталонные уравнения (4.39)–(4.41). Дальнейшее использование алгоритма реализации расчетной схемы метода эталонных уравнений (см. §2.5) позволяет найти выражения для фазовых множителей и уравнения для фазовых функций. Фазовые множители $Q_i(\tilde{\sigma}, \tau)$ имеют вид

$$Q_i = \sqrt{\frac{R_i}{R'_i \sqrt{\tilde{\sigma}^2 - 1}}}. \quad (4.45)$$

Здесь через штрих обозначена производная по $\tilde{\sigma}$. Соотношение (4.45) позволяет представить формулы преобразования решения модели в решение исследуемой системы (4.42)–(4.44) следующим образом:

$$\tilde{u}_\sigma(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\frac{R_1(\tilde{\sigma}, \tau)}{R'_1(\tilde{\sigma}, \tau) \cdot \sqrt{\tilde{\sigma}^2 - 1}}} \cdot \tilde{U}_R(R_1(\tilde{\sigma}, \tau)), \quad (4.46)$$

$$\tilde{u}_z(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\frac{R_2(\tilde{\sigma}, \tau)}{R_2'(\tilde{\sigma}, \tau) \cdot \sqrt{\tilde{\sigma}^2 - 1}}} \cdot \tilde{U}_z(R_2(\tilde{\sigma}, \tau)), \quad (4.47)$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\frac{R_3(\tilde{\sigma}, \tau)}{R_3'(\tilde{\sigma}, \tau) \cdot \sqrt{\tilde{\sigma}^2 - 1}}} \cdot \tilde{\Psi}(R_3(\tilde{\sigma}, \tau)). \quad (4.48)$$

Уравнения для фазовых функций $R_i(\tilde{\sigma}, \tau)$ имеют вид

$$\{R_1, \tilde{\sigma}\} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{R_1'}{R_1}\right)^2 + 2\beta^2 (R_1')^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tilde{\sigma}^2 + 2}{(\tilde{\sigma}^2 - 1)^2} + 2 \frac{\tilde{\sigma}^2 + \tau^2 - 1}{(\tilde{\sigma}^2 - \tau^2)(\tilde{\sigma}^2 - 1)} - 2\beta^2 a^2 \frac{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2}{\tilde{\sigma}^2 - 1} = 0, \quad (4.49)$$

$$\{R_2, \tilde{\sigma}\} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_2'}{R_2}\right)^2 + 2\beta^2 (R_2')^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tilde{\sigma}^2 + 2}{(\tilde{\sigma}^2 - 1)^2} - 2\beta^2 a^2 \frac{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2}{\tilde{\sigma}^2 - 1} = 0, \quad (4.50)$$

$$\{R_3, \tilde{\sigma}\} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_3'}{R_3}\right)^2 + 2\beta^2 (R_3')^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tilde{\sigma}^2 + 2}{(\tilde{\sigma}^2 - 1)^2} - 2\beta^2 a^2 \frac{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2}{\tilde{\sigma}^2 - 1} = 0. \quad (4.51)$$

На решения уравнений (4.49)–(4.51) необходимо наложить дополнительные условия, следующие из (2.24):

1. $R_i|_{\sigma=2} = 1$ – граница деформирующейся поверхности круглой формы в эталонной системе должна отображаться в границу эллиптической «ямки» в исследуемой системе.
2. $R_i \geq 0$ – радиальная координата цилиндрической системы есть величина неотрицательная.

Уравнения (4.49)–(4.51) можно упростить. Поскольку вблизи границы «ямки» и вне нее выполняется неравенство $\beta^2 \gg 1/R_1^2$, третье слагаемое в указанных уравнениях может быть опущено:

$$\{R_1, \tilde{\sigma}\} + 2\beta^2 (R_1')^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tilde{\sigma}^2 + 2}{(\tilde{\sigma}^2 - 1)^2} + 2 \frac{\tilde{\sigma}^2 + \tau^2 - 1}{(\tilde{\sigma}^2 - \tau^2)(\tilde{\sigma}^2 - 1)} - 2\beta^2 a^2 \frac{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2}{\tilde{\sigma}^2 - 1} = 0, \quad (4.52)$$

$$\{R_2, \tilde{\sigma}\} + 2\beta^2 (R_2')^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tilde{\sigma}^2 + 2}{(\tilde{\sigma}^2 - 1)^2} - 2\beta^2 a^2 \frac{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2}{\tilde{\sigma}^2 - 1} = 0, \quad (4.53)$$

$$\{R_3, \tilde{\sigma}\} + 2\beta^2 (R_3')^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tilde{\sigma}^2 + 2}{(\tilde{\sigma}^2 - 1)^2} - 2\beta^2 a^2 \frac{\tilde{\sigma}^2 - \tau^2}{\tilde{\sigma}^2 - 1} = 0. \quad (4.54)$$

Решая уравнения (4.52)–(4.54), получим выражения для производной фазовой функции по $\tilde{\sigma}$. Усредняя последние по тригонометрическим функциям (среднее за период), имеем

$$R_1' = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{c_2 g_1(\tilde{\sigma})}{\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2) g_1(\tilde{\sigma}) - \tilde{\sigma}}, \quad R_2' = R_3' = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{c_2 g_2(\tilde{\sigma})}{\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2) g_2(\tilde{\sigma}) - \tilde{\sigma}}, \quad (4.55)$$

Здесь $g_1(\tilde{\sigma})$ и $g_2(\tilde{\sigma})$ – известные функции $\tilde{\sigma}$.

Интегрирование (4.55), подстановка результата в (4.45) и последующее использование (4.46)–(4.48) позволяет найти общий вид собственных функций вихревых составляющих и потенциала скорости анизотропного течения жидкости под действием поверхностных сил (в относительных координатах). Ввиду весьма громоздкого вида указанные выражения не приводятся.

§ 4.5. Анализ полученных результатов

Последовательно проанализируем характер зависимости от $\tilde{\sigma}$ фазовых функций $R_i(\tilde{\sigma})$, характеризующих преобразование эталонной системы в исследуемую; а также компонент гиперболической и вертикальной составляющих скорости анизотропного движения жидкости.

Для определения вида фазовой функции $R_i(\tilde{\sigma})$ аппроксимируем $g_1(\tilde{\sigma})$ и $g_2(\tilde{\sigma})$ вблизи точки $\tilde{\sigma} = 2$ дробными функциями (аппроксимация Паде¹ [7]) и проинтегрируем. Окончательный результат является весьма громоздким, поэтому аналитическое выражение не приводится, а характер зависимости фазовой функции от $\tilde{\sigma}$ при различных τ изображен графически. Схематическое изображение функции $R_1(\tilde{\sigma})$ для случая сильного вытягивания «ямки» ($a = 20$) представлено на рисунке 15.

¹ Относительная погрешность аппроксимации Паде в данном случае составляет менее 0.5 %.

Легко видеть, что эта зависимость весьма близка к линейной. Причем,

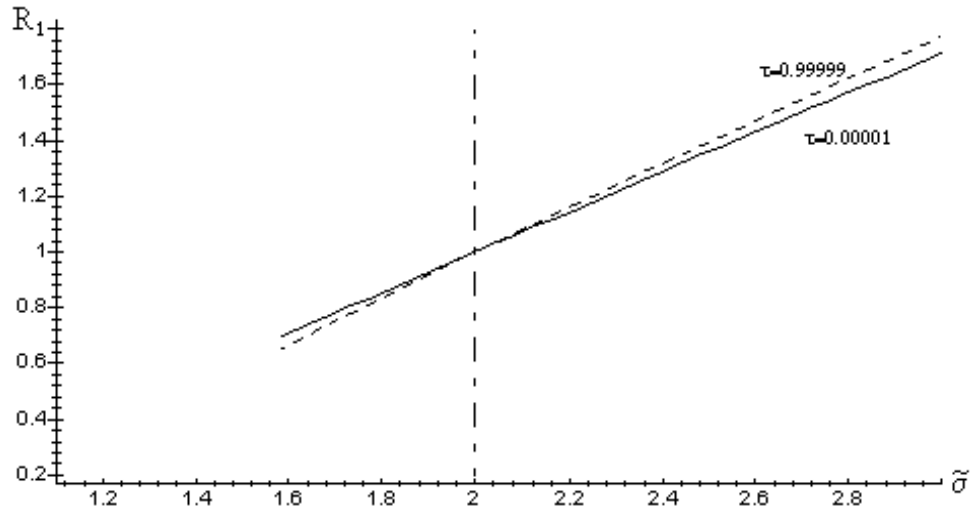


Рис. 15. Зависимость фазовой функции R_1 от $\tilde{\sigma}$ в случае сильных полей ($a = 20$)

вдоль внешнего магнитного поля ($\tau \rightarrow \pm 1$) фазовая функция возрастает быстрее, чем поперек ($\tau \rightarrow 0$). Поскольку фазовая функция $R_1(\tilde{\sigma})$ соответствует вытягиванию «ямки», различный характер возрастания $R_1(\tilde{\sigma})$ в направлениях вдоль и поперек поля свидетельствует о «растяжении» образующегося в результате движения жидкости сухого участка вдоль внешнего магнитного поля и его «сжатии» поперек поля. Этот вывод согласуется с положениями, изложенными выше.

Подставляя соотношения, определяющие зависимость фазовой функции R_i от $\tilde{\sigma}$, в (4.46) и (4.47), получим выражения для вихревых составляющих скорости движения жидкости u_σ и u_z . Потенциальная составляющая скорости представляет собой градиент ψ , определенного из (4.48). Используя (2.27), находим выражения для гиперболической v_σ и вертикальной v_z составляющих скорости анизотропного течения под действием поверхностных сил (в относительных координатах).

Зависимость v_σ и v_z от $\tilde{\sigma}$ при различных значениях τ в случае существенной анизотропии для больших полей ($a = 20$) схематически изображена на рис. 16 и 17. Как видно из этих графиков, скорость жидкости максимальна

вблизи границы области «ямки» (при $\tilde{\sigma} = 2$). При этом отрицательное значение вертикальной составляющей скорости жидкости свидетельствует о быстром уменьшении толщины подложки возле данной границы (на границе областей А и Б – см. рис. 1).

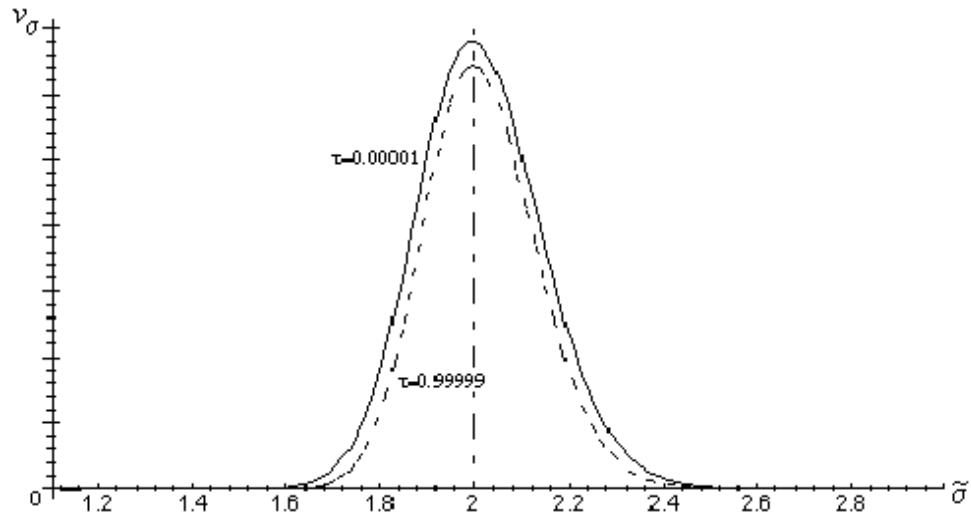


Рис. 16. Зависимость гиперболической составляющей v_σ скорости движения жидкости от $\tilde{\sigma}$

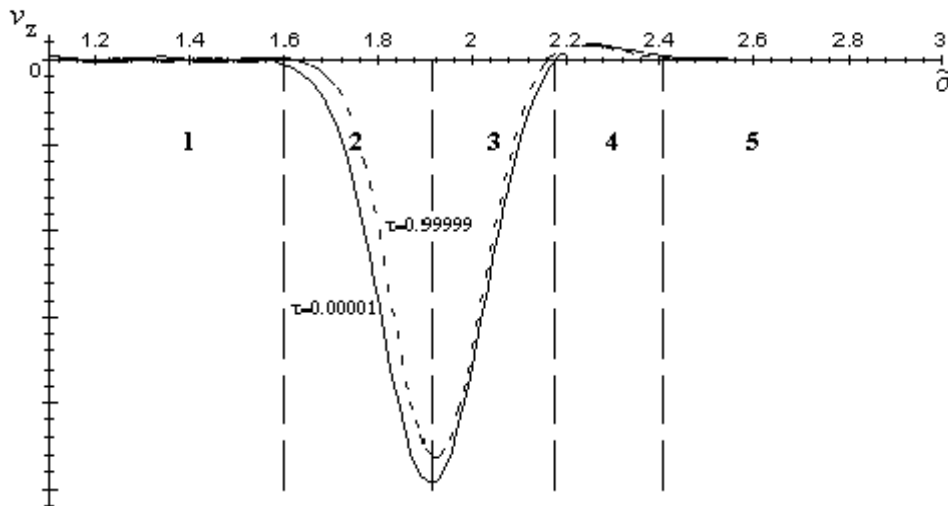


Рис. 17. Зависимость вертикальной составляющей v_z скорости движения жидкости от $\tilde{\sigma}$

Сравнивая рисунки 16 и 17, можно заметить, что минимум вертикальной составляющей v_z несколько смещен в сторону меньших значений $\tilde{\sigma}$ по сравнению с максимумом гиперболической составляющей v_σ . Это позволяет предположить наличие перетока жидкости из области А через область Б в область В.

Также о перетоке свидетельствует максимум v_z на границе областей Б и В (участок 4 на рис. 17).

Учитывая это, можно сделать следующее заключение о характере движения подложки под действием поверхностных сил. На границе областей А и Б вертикальная составляющая скорости жидкости очень велика (участок 4 на рис. 17), толщина подложки здесь резко уменьшается. Затем, в области Б отрицательная вертикальная составляющая скорости жидкости уменьшается (участок 3 на рис. 17), а горизонтальная увеличивается и достигает максимума. На границе областей Б и В появляется положительная вертикальная составляющая скорости жидкости (участок 4 на рис. 17), а горизонтальная составляющая уменьшается. При дальнейшем увеличении $\tilde{\sigma}$ (в области В) движение жидкости затухает и при $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$ скорость жидкости стремится к нулю.

Легко убедиться, что такой характер анизотропного течения магнитной жидкости вследствие эффекта Марангони совпадает с движением обычной (не магнитной) жидкости под действием поверхностных сил, рассмотренным в предыдущей главе.

Несколько необычным, на наш взгляд, результатом является то, что скорость движения жидкости на границе «ямки» оказывается немного большей в направлении поперек поля (при $\tau \rightarrow 0$), чем вдоль поля (при $\tau \rightarrow \pm 1$). Математически это следует из согласования амплитуд решений исследуемой системы и модели. С физической точки зрения этот факт, по-видимому, свидетельствует о стремлении поверхностных сил уменьшить эксцентриситет эллипса («вернуть его к окружности»). Последнее объясняется тем, что периметр (длина границы) круглой области будет минимальным при равенстве площадей круглой и эллиптической «ямок». Это является энергетически более выгодным и, по всей видимости, реализуется за счет некоторой неравномерности распределения поверхностно-активного вещества вдоль границы раздела подложки и ПАВ.

При этом внешнее магнитное поле, будет продолжать вытягивать «ямку» вдоль своих силовых линий. Таким образом, в некоторых случаях возможна

конкуренция между силами поверхностного натяжения и пондеромоторной силой.

Задачей специального исследования является переход от относительных координат к обычным. Указанное преобразование выполняется по аналогии с проведенным в § 3.7 для движения обычной жидкости. В этом случае в качестве системы эталонных уравнений выступает система (4.16)–(4.26) с заменой координаты σ на $\tilde{\sigma}$, определяемой при помощи (4.29), решение которой получено в предыдущем параграфе.

Основные результаты настоящей главы опубликованы в работах [55, 60–62, 64–66, 135–138, 157].

Заключение

В результате проведенного в диссертации моделирования движения тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил получены следующие основные научные и практические результаты.

1. Исследована математическая модель движения тонкого слоя жидкости конечной толщины при нанесении на его поверхность капли ПАВ, в которой одновременно учтены действие сил тяжести, многомерность течения и деформация свободной поверхности жидкости.
2. Известный метод эталонных уравнений модифицирован для решения уравнений гидродинамики.
3. Решена задача Штурма-Лиувилля для уравнений движения жидкости под действием поверхностных сил в эталонной и исследуемой системах. Найдены выражения собственных функций радиальной и вертикальной компонент скорости движения жидкости.
4. Показано, что при движении тонкого слоя жидкости вследствие нанесения ПАВ возникает деформация свободной поверхности вплоть до образования сухого участка. Деформация поверхности и, соответственно, размер образующейся «ямки» увеличиваются с уменьшением толщины подложки, ростом разности коэффициентов поверхностного натяжения жидкой подложки и ПАВ и зависит от количества поверхностно-активного вещества.
5. Показано, что наиболее интенсивное движение жидкой подложки происходит вблизи границы области с деформирующейся поверхностью. Внутри нее в приповерхностных слоях возникают вихревые течения. Основная масса жидкости при этом перетекает из внутренней области «ямки» через ее границу во внешнее пространство.
6. Исследовано анизотропное течение: движение тонкого слоя магнитной жидкости под действием поверхностных сил во внешнем однородном горизонтальном магнитном поле. Показано, что образующиеся сухие пятна прини-

мают форму эллипса, а общий характер движения магнитной жидкости в этом случае во многом совпадает с характером аналогичного изотропного течения.

Список литературы

1. Адамсон А. Физическая химия поверхностей. – М.: Мир, 1979. – 568 с.
2. Алешков Ю.З., Баринов В.А., Тактаров Н.Г. О распространении нелинейных магнитогидродинамических поверхностных волн. // Магнитная гидродинамика. – 1989. – т. 25, № 4. – С. 79–86.
3. Бабилов В.В. Метод фазовых функций в квантовой механике. – М.: Наука, 1976. – 287 с.
4. Бабилов В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. – М.: Наука, 1972. – 456 с.
5. Баринов В.А., Тактаров Н.Г. Нелинейные магнитогидродинамические поверхностные волны на слое движущейся жидкости. // Магнитная гидродинамика. – 1990. – т. 26, № 4. – С. 71–76.
6. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. – М.:ИВТАН, 1985. – 188 с.
7. Бейкер Г.А., Грэйвз-Моррис П. Аппроксимации Паде./ Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
8. Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
9. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
10. Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. – Рига: Зинатне, 1989. – 386 с.
11. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волны. – М.: Сов. радио, 1966.
12. Варламов Ю.Д. Вязкость и магнитная восприимчивость магнитных жидкостей умеренных концентраций. // Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук. – Новосибирск, 1987. – 18 с.
13. Василевский А.С., Жирнов Н.И. Новый метод построения кривых двухатом-

- ных молекул по спектроскопическим данным. II. Упрощенный вариант нулевого приближения. // Оптика и спектроскопия. – 1969. – Т. 26, вып. 5. – С. 704–710.
14. Василевский А.С., Жирнов Н.И. Применение обобщенного ВКБ-метода к исследованию колебательно-вращательных спектров двухатомных молекул. II. Колебательно-вращательный спектр осциллятора Ридберга-Клейна-Риса. // Оптика и спектроскопия. – 1967. – Т. 22, вып. 5. – С. 730–734.
15. Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. – М.: Изд-во МФТИ, 1997. – 240 с.
16. Гилев В.Г. Экспериментальное исследование реологических свойств магнитных жидкостей. // Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук. – Пермь, 1987. – 17 с.
17. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967.
18. Голубятников А.Н. Об особенностях действия поверхностного натяжения магнитных жидкостей. // 8-я Международная Плесская конференция по магнитным жидкостям. – Плес, 1998. – С.132–134.
19. Голубятников А.Н., Субханкулов Г.И. О поверхностном натяжении магнитной жидкости. // Магнитная гидродинамика. – 1986. – Т. 22, № 1. – С. 73–78.
20. Диффузии уравнение. // Математическая физика. Энциклопедия. / Гл. ред. Л.Д. Фаддеев. – М.: Большая российская энциклопедия, 1998. – С. 194.
21. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. // Успехи математических наук, вып. 6, 1952. – С. 3–96.
22. Дроздова В.И. Концентрационные структуры и межфазные явления в магнитных коллоидах. // Автореф. дис. ... докт. физ-мат. наук. – Ставрополь, 1998. – 35 с.
23. Друкарев Г.Ф. Об определении фазы волновой функции при рассеянии частиц. // ЖЭТФ. – 1949. – Т. 19, вып. 3. – С. 247–250.

24. Жакин А.И. О зависимости поверхностного натяжения растворов и суспензий от напряженности магнитного и электрического полей. // Магнитная гидродинамика. – 1989. – Т. 25, № 3. – С. 75–80.
25. Жирнов Н.И. Вероятность прохождения потенциального барьера в приближении ОКБ-метода. I. // Известия вузов СССР. Физика. – 1965, вып. 4. – С. 28–34.
26. Жирнов Н.И. Вероятность прохождения потенциального барьера в приближении обобщенного ВКБ-метода. II. Симметричные барьеры. // Известия вузов СССР. Физика. – 1966, вып. 6. – С. 101–107.
27. Жирнов Н.И. Вероятность прохождения потенциального барьера в приближении обобщенного ВКБ-метода. III. Асимметричные барьеры. // Известия вузов СССР. Физика. – 1966, вып. 6. – С. 108–113.
28. Жирнов Н.И. К вопросу о квазиклассических одноэлектронных функциях. // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 32, вып. 5. – С. 1252–1254.
29. Жирнов Н.И. К расчету энергии связи внутренних электронов в атомах в приближении обобщенного ВКБ-метода. // Оптика и спектроскопия. – 1967. – Т. 22, вып. 6. – С. 857–860.
30. Жирнов Н.И. Квазиклассическое решение радиальных уравнений Дирака. // ЖЭТФ. – 1959. – Т. 37, № 6. – С. 1619–1625.
31. Жирнов Н.И. Нормировка и критерий точности квазиклассических решений радиальных уравнений Дирака. // Известия вузов СССР. Физика. – 1964, вып. 5. – С. 125–130.
32. Жирнов Н.И. О квазиклассических одноэлектронных функциях. I. Связанные состояния. // Оптика и спектроскопия. – 1958. – Т. 4, вып. 2. – С. 125–137.
33. Жирнов Н.И. О квазиклассических одноэлектронных функциях. II. Состояния непрерывного спектра. // Оптика и спектроскопия. – 1958. – Т. 4, вып. 2. – С. 138–143.
34. Жирнов Н.И. Об энергетических уровнях μ -мезоатомов. // ЖЭТФ. – 1960. –

- Т. 38, № 3. – С. 959–962.
35. Жирнов Н.И. Обобщенный ВКБ-метод в нерелятивистской квантовой механике. // Дис. ... докт. физ-мат. наук. – М., 1973. – 313 с.
36. Жирнов Н.И. Обобщенный ВКБ-метод и его применение к задачам атомной и молекулярной спектроскопии. // Труды 1-й межвузовской конференции по спектроскопии и радиофизике. – М.: Изд-во МГПИ, 1965. – С. 7–9.
37. Жирнов Н.И. Расчет эффективных потенциалов многоэлектронных атомов по спектроскопическим данным. // Оптика и спектроскопия. – 1967. – Т. 23, вып. 1. – С. 10–14.
38. Жирнов Н.И., Василевский А.С. Новый метод построения кривых двухатомных молекул по спектроскопическим данным. I. Потенциальные кривые в нулевом приближении обобщенного ВКБ-метода. // Оптика и спектроскопия. – 1968. – Т. 25, вып. 1. – С. 28–35.
39. Жирнов Н.И., Василевский А.С. Новый метод построения кривых двухатомных молекул по спектроскопическим данным. III. Потенциальные кривые двухатомных молекул во втором приближении обобщенного ВКБ-метода. // Оптика и спектроскопия. – 1969. – Т. 26, вып. 6. – С. 908–914.
40. Жирнов Н.И., Василевский А.С. Новый метод построения кривых двухатомных молекул по спектроскопическим данным. IV. Потенциальная кривая основного электронного состояния молекулы H_2 . // Оптика и спектроскопия. – 1970. – Т. 29, вып. 4. – С. 658–665.
41. Жирнов Н.И., Василевский А.С. Новый метод построения кривых двухатомных молекул по спектроскопическим данным. V. Потенциальная кривая первого возбужденного состояния молекулы водорода. // Оптика и спектроскопия. – 1971. – Т. 30, вып. 1. – С. 39–42.
42. Жирнов Н.И., Василевский А.С. Применение обобщенного ВКБ-метода к исследованию колебательно-вращательных спектров двухатомных молекул. I. Колебательно-вращательный спектр осциллятора Морзе. // Оптика и спектроскопия. – 1966. – Т. 20, вып. 2. – С. 224–229.

43. Жирнов Н.И., Игропуло В.С. О поправках к квазиклассическим фазам рассеяния // Известия вузов СССР. Физика. – 1971, вып. 7. – С. 149–151.
44. Жирнов Н.И., Игропуло В.С. Применение обобщенного ВКБ-метода к оценке параметров низкоэнергетического рассеяния частиц. I // Уч. Записки Ставропольского пединститута. – Ставрополь: СГПИ, 1973. – С. 28–38.
45. Жирнов Н.И., Игропуло В.С. Применение обобщенного ВКБ-метода к оценке параметров низкоэнергетического рассеяния частиц. II // Уч. Записки Ставропольского пединститута. – Ставрополь: СГПИ, 1973. – С. 39–46.
46. Жирнов Н.И., Кронрод Л.А. Квазиклассические волновые функции осциллятора Морзе и их применение к расчету факторов Франка-Кондона. III. Приближенный расчет факторов Франка-Кондона на ЭВМ. // Оптика и спектроскопия. – 1965. – Т. 19, вып. 6. – С. 871–873.
47. Жирнов Н.И., Нурлыгаянов Ф.Б. Обобщенный ВКБ-метод в трехмерном случае I. // Известия ВУЗов СССР, Физика. – 1975. – Вып. 5. – С. 43–50.
48. Жирнов Н.И., Нурлыгаянов Ф.Б. Обобщенный ВКБ-метод в трехмерном случае II. // Известия ВУЗов СССР, Физика. – 1976. – Вып. 3, С. 123–128.
49. Жирнов Н.И., Нурлыгаянов Ф.Б. Обобщенный ВКБ-метод в трехмерном случае III. // Известия ВУЗов СССР, Физика. – 1976. – Вып. 3, С. 128–134.
50. Жирнов Н.И., Нурлыгаянов Ф.Б. Обобщенный ВКБ-метод в трехмерном случае IV. // Известия ВУЗов СССР, Физика. – 1976. – Вып. 11, С. 53–60.
51. Жирнов Н.И., Нурлыгаянов Ф.Б. Обобщенный ВКБ-метод в трехмерном случае V. // Известия ВУЗов СССР, Физика. – 1976. – Вып. 12, С. 36–40.
52. Игропуло В.С. Приближение как модель // Материалы Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование в научных исследованиях». – Ставрополь: СГУ, 2000. – С. 112–116.
53. Игропуло В.С., Самонов В.Е. Использование метода эталонных уравнений при решении уравнений гидродинамики. // Понтрягинские чтения – X. Тезисы докладов. – Воронеж, ВГУ, 1999. – С. 115.
54. Игропуло В.С., Самонов В.Е. Исследование эффекта Марангони в тонком

- слое жидкости. // Вестник СГУ. – 1997. – Вып. 11. – С. 65–75.
55. Игропуло В.С., Самонов В.Е. О «динамическом методе» исследования поверхностного натяжения магнитных жидкостей. // Проблемы физико-математических наук: Материалы XLV научно-методической конференции преподавателей и студентов «Университетская наука – региону». – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2000. – С. 15–16.
56. Игропуло В.С., Самонов В.Е. О методе аналитического моделирования микромасштабных динамических процессов на поверхности жидкости // Материалы конференции «Теоретические и прикладные проблемы современной физики» – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2002. – С. 337–344.
57. Игропуло В.С., Самонов В.Е. О некоторых физических аспектах моделирования нелинейных систем. // Материалы Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование в научных исследованиях». – Ставрополь, 2000. – С. 120–125.
58. Игропуло В.С., Самонов В.Е. О процессе роста колец Марангони в жидкостях. // Вестник СГУ. – 1999. – Вып. 20. – С. 118–130.
59. Игропуло В.С., Самонов В.Е. О системе «относительных» координат в теории колец Марангони. // Проблемы физико-математических наук: Материалы XLIV научно-методической конференции преподавателей и студентов «Университетская наука – региону». – Ставрополь: Изд-во СГУ, 1999. – С. 85 – 86.
60. Игропуло В.С., Самонов В.Е. Об использовании метода эталонных уравнений для исследования эффекта Марангони в магнитных жидкостях. // Проблемы физико-математических наук: Материалы XLIII научно-методической конференции преподавателей и студентов «Университетская наука – региону». – Ставрополь: Изд-во СГУ, 1998. – С. 49–50.
61. Игропуло В.С., Самонов В.Е. Об эффекте Марангони в магнитных жидкостях. // Физико-химические и прикладные проблемы магнитных жидкостей: Сб. научных трудов. Ставрополь: Изд-во СГУ, 1997. – С. 117–119.

- 62.Игропуло В.С., Самонов В.Е. Об эффекте Марангони в магнитных жидкостях. // Современные проблемы механики и прикладной математики: Тезисы докладов школы. – Воронеж, ВГУ, 1998. – С. 130.
- 63.Игропуло В.С., Самонов В.Е. Обобщение метода эталонных уравнений на векторные задачи. // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т. 9, вып. 1. – С.199.
- 64.Игропуло В.С., Самонов В.Е. Расчет пондеромоторной силы, действующей на эллиптическое кольцо Марангони со стороны магнитного поля. // Проблемы физико-математических наук: Материалы XLIV научно-методической конференции преподавателей и студентов «Университетская наука – региону». – Ставрополь: Изд-во СГУ, 1999. – С. 87–90.
- 65.Игропуло В.С., Самонов В.Е. Решение задачи роста колец Марангони в магнитных жидкостях на основе метода эталонных уравнений // Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках. Тезисы докладов – Воронеж, 2000. – С. 99.
- 66.Игропуло В.С., Самонов В.Е. Теоретическое исследование роста колец Марангони в магнитных жидкостях. // Вестник СГУ. – 2001. – вып. 28. – С. 28–36.
- 67.Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. – М.: Мир, 1972. – 292 с.
- 68.Каплан Л.Г. Локальные процессы в жидкой среде и атмосфере. – Ставрополь: АО «АСОК», 1993. – 242 с.
- 69.Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
- 70.Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. – М.: Физматгиз, 1963. – 727 с.
- 71.Коша А. Вариационное исчисление. – М.: Высшая школа, 1983. – 279 с.
- 72.Кренкель Р.А., Куркбарт С.М., Перейра Дж.Г., Манна М.А. Система уравнений типа Буссинеска в системе Бенарда-Марангони. // Теоретическая и ма-

- тематическая физика. – 1994. – Т. 99, № 3. – С. 419–427.
73. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.
74. Курьянов А.И., Ларичева В.В. Об асимптотическом решении линейной дифференциальной системы второго порядка. // Проблемы прикладной математики и механики / сб. статей под. ред. Н.Н. Боголюбова. – М.: Наука, 1971. – С. 86–97.
75. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 1974. – 752 с.
76. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. – М.: Наука, 1973. – 733 с.
77. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8.: Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 623 с.
78. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. – М.: Физматгиз, 1959. – 699 с.
79. Линде Х., Шварц П., Вильке Х. Диссипативные структуры и нелинейная кинетика неустойчивости Марангони. // Гидродинамика межфазных поверхностей. / Пер. с англ.- М.: Мир, 1984. – С. 79–116.
80. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1977. – 848 с.
81. Марков Г.Т., Васильев Е.Н. Математические методы прикладной электродинамики. – М.: Советское радио, 1970. – 120 с.
82. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 367 с.
83. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. – М.: Наука, 1988. – 308 с.
84. Маслов В.П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1987. – 408 с.
85. Маслов В.П. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
86. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Нау-

- ка, 1977. – 384 с.
87. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука, 1973. – 543 с.
88. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов теплопереноса. Эволюция диссипативных структур. – М., Наука, 1987. – 352 с.
89. Маслов В.П., Мосолов П.П. Уравнения одномерного баротропного газа. – М.: Наука, 1990. – 216 с.
90. Несис Е.И. Методы математической физики. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
91. Никитин Л.В., Тулинов А.А. Исследование магнитооптических и оптических свойств поверхностной области магнитной жидкости. // III Всесоюзное совещание по физике магнитных жидкостей. Сб. научных трудов. – Ставрополь, 1986. – С. 81–82.
92. Никитин Л.В., Тулинов А.А. Магнитооптические свойства приповерхностного слоя феррожидкости. // Статические и динамические свойства магнитных жидкостей. Сб. научных трудов. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. – С. 9–11.
93. Носов В.Р. Метод эталонных уравнений в теории некоторых классов динамических систем. // Автоматика и телемеханика. – 1999, № 2. – С. 19–32.
94. Петрашень М.И. О полуклассических методах решения волнового уравнения. // Уч. Записки ЛГУ. Серия физ. – 1949. – Вып. 7. – С. 59–78.
95. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 331 с.
96. Порубов А.В. Нелинейные волны на свободной поверхности тонкого слоя вязкой жидкости. // Препринт. – АН СССР. Физ-техн. ин-т, 1991. – № 1502. – 28 с.
97. Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: Высшая школа, 1999. – 368 с.
98. Самонов В.Е. Апробация обобщенного метода эталонных уравнений на решение гидродинамических задач // Проблемы физико-математических наук:

- Материалы XLVIII научно-методической конференции преподавателей и студентов «Университетская наука – региону». – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2003. – С. 23–26.
99. Самонов В.Е. Об одном приеме решения задач теоретической физики // Труды IV научной конференций молодых ученых и специалистов. – Дубна: Изд-во ОИЯИ, 2000. – С. 192–194.
100. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. – М.: Издательство МГУ, 1993. – 351 с.
101. Седов Л.И. Механика сплошной среды. т. 1. – М.: Наука, 1983. – 528 с.
102. Славянов С.Ю. Асимптотика решений одномерного уравнения Шредингера / под. ред. проф. В.С. Булдырева. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. – 256 с.
103. Смайт В. Электростатика и электродинамика. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1954. – 604 с.
104. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
105. Тихонов А.Н. Математическая модель // Математическая энциклопедия. / Под. Ред. И.М. Виноградова, т. 3. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – С. 574.
106. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
107. Фертман В.Е. Магнитные жидкости: Справочное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 184 с.
108. Фрёман Н., Фрёман П.У. ВКБ-приближение. – М.: Мир, 1967. – 168 с.
109. Чеканов В.В. Магнетизм малых частиц и их взаимодействие в коллоидных ферромагнетиках. // Дис. ... докт. физ-мат. наук. – Ставрополь, 1985. – 362 с.
110. Чеканов В.В. Об измерении давления в феррожидкости. // Магнитная гидродинамика. – 1977. – т. 13, № 4. – С. 16–20.
111. Эрдейи А. Асимптотические разложения. – М.: Физматгиз, 1962. – 127 с.
112. Agble D., Mendes-Tatsis M.A. The effect of surfactants on interfacial mass

- transfer in binary liquid-liquid systems // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2000. – Vol. 43, is. 6. – P. 1025–1034.
113. Ahmed S., Carey V.P. Effects of gravity on the boiling of binary fluid mixtures // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1998. – Vol. 41, is. 16. – P. 2469–2483.
114. Bau H.H. Control of Marangoni-Benard convection // Int. J. Heat Mass Trans. – 1999. – Vol. 42, is. 7. – P. 1327–1341.
115. Bertozzi A.L., Munch A., Shearer M. Undercompressive shocks in thin film flows. // Physica D. – 1999. – Vol. 134, is. 4. – P. 431–464.
116. Bestehorn M. Square patterns in Benard–Marangoni convection. // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76, is. 1. – P. 46–49.
117. Boos W., Thess A. Cascade of structures in long-wavelength Marangoni instability. // Physics of Fluids. – 1999. – Vol. 11, is. 6. – P. 1484–1494.
118. Burelbach J.P., Bankoff S.G., Davis S.H. Steady thermocapillary flows of thin liquid layers. II. Experiment. – Phys. Fluids. A. – 1990. – Vol. 2, is. 3. – P. 322–323.
119. Cebers A. Physical properties and models of magnetic fluids. 1. // Магнитная гидродинамика. – 1991. – Т. 27, № 4. – С. 25–39.
120. Cebers A. Physical properties and models of magnetic fluids. 2. // Магнитная гидродинамика. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 27–38.
121. Chang F.-P., Chiang K.-T. Oscillatory instability analysis of Benard–Marangoni convection in a rotating fluid under a uniform magnetic field. // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1998. – Vol. 41, is. 17. – P. 2667–2675.
122. Chen C.F., Su T.F. Effect of surface tension on the onset of convection in a double-diffusive layer // Physics of Fluids A. – 1992. – Vol. 4, is. 11. – P. 2360–2367.
123. Danov K.D., Paunov V.N., Stoyanov S.D., Alleborn N., Raszillier H., Durst D. Stability of evaporating two-layered liquid film in the presence of surfactant II.

- Linear analysis. // *Chem. Eng. Sci.* – 1998. – Vol. 53. – P. 2823–2837.
124. de Souza E.R., Gallez D. Pattern formation in thin liquid films with insoluble surfactants // *Physics of Fluids.* – 1998. – Vol. 10, is. 8. – P. 1804–1814.
125. Duffy B.R., Wilson S.K. A third-order differential arising in thin-film flows and relevant to Tanner's law // *Appl. Math. Lett.* – 1997. – Vol. 10, No. 3. – P. 63–68.
126. Durst F., Danov K.D., Paunov V.N., Alleborn N., Raszillier H. Stability of evaporating two-layered liquid film in the presence of surfactant I. The equations of lubrication approximation. // *Chem. Eng. Sci.* – 1998. – Vol. 53, is. 15. – P. 2809–2822.
127. Durst F., Danov K.D., Paunov V.N., Alleborn N., Raszillier H. Stability of evaporating two-layered liquid film in the presence of surfactant III. Non-linear stability analysis. // *Chem. Eng. Sci.* – 1998. – Vol. 53, is. 15. – P. 2839–2857.
128. Dussaud A. D., Troian S. M., Harris S.R. Fluorescence visualization of a convective instability which modulates the spreading of volatile surface films. // *Physics of Fluids.* – 1998. – Vol. 10, is. 7. – P. 1588–1596.
129. Floarea O., Guzun-Stoica A., Kurzeluk M. Experimental study of Marangoni effect in a liquid-liquid system // *Chemical Engineering Science.* – 2000. – Vol. 55, is. 18. – P. 3813–3816.
130. Garazo A.N., Velarde M.G. Dissipative Korteweg–de Vries description of Marangoni–Benard oscillatory convection. // *Physics of Fluids A.* – 1991. – Vol. 3, is. 10. – P. 2295–2300.
131. Gershuni G.Z., Nepomnyashchy A.A., Velarde M.G. On dynamic excitation of Marangoni instability. // *Physics of Fluids A.* – 1992. – Vol. 4, is. 11. – P. 2394–2398.
132. Hannaoui M., Lebon G. Weakly non-linear Marangoni instability in the presence of a magnetic field // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* – 1998. – Vol. 41, is. 10. – P. 1327–1337.
133. Hashim I., Wilson S.K. The onset of Benard–Marangoni convection in a hori-

- zontal layer of fluid // International Journal of Engineering Science. – 1999. – Vol. 37, is. 5. – P. 643–662.
134. Hooper A.P, Grimshaw R. Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids. // Phys. Fluids – 1985. – Vol. 28, is. 1. – P. 37–45.
135. Igropoulo V., Samonov V. Some features of the Marangoni rings growth in ferrofluids // Magnetohydrodynamics. – 2002. – Vol. 38, № 3. – P. 293–300.
136. Igropoulo V., Samonov V. The dynamical methods of measurement of ferrofluid's surface tension. // 9th International conference on Magnetic Fluids – Bremen, 23rd – 27th July, 2001.
137. Igropulo V.S., Samonov V.E. About «Marangoni rings» in a magnetic fluids. // Eighth international conference on Magnetic Fluids. June 29 – July 3, 1998, Timisoara, Romania: Abstracts. – P. 357–358.
138. Igropulo V.S., Samonov V.E. About movement of a liquid at formation of a Marangoni ring in magnetic suspension. // The 8-th international Plyos conference on magnetic fluids: Abstracts. – P. 72–73.
Игропуло В.С., Самонов В.Е. О движении жидкости при образовании кольца Марангони в магнитных суспензиях // 8-я Международная Плесская конференция по магнитным жидкостям: Сборник научных трудов. – Иваново, 1998. – С. 145–146.
139. Igropulo V.S., Samonov V.E. Theoretical research of dynamics of growth of Marangoni rings. // Зимняя школа по механике сплошных сред (двенадцатая). Тезисы докладов. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – С. 28.
140. Jensen O.E., Grotberg J.B. The spreading of heat or soluble surfactant along a thin liquid film. // Physics of Fluids A. –1993. – Vol. 5, is. 1. – P. 58–68.
141. Jie W., Yu S.-T., Jiang B.-N., Duh J.C. Three-dimensional simulations of Marangoni-Benard convection in small containers by the least-squares finite element method. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. –1998. – Vol. 160, is. 1–2. – P. 71–88.
142. Kalikmanov V.I. A statistical theory of surface tension of magnetic fluids. //

- Europhys. Lett. – 1990. – Vol. 13, № 8. – P. 745–750.
143. Kalikmanov V.I. Statistical thermodynamics of ferrofluids. // *Physica A*. – 1992. – Vol. 183, № 1–2. – P. 25–50.
144. Kraenkel R.A., Pereira J.G., Manna M.A. Nonlinear surface-wave excitations in the Benard-Marangoni system // *Phys. Rev. A*. – 1992. – Vol. 46, is. 8. – P. 4786–4790.
145. Lan C.W., Chian J.H. Three-dimensional simulation of Marangoni flow and interfaces in floating-zone silicon crystal growth. // *Journal of Crystal Growth*. – 2001. – Vol. 230. – P. 172–180.
146. Lappa M., Savino R., Monti R., Three-dimensional numerical simulation of Marangoni instabilities in non-cylindrical liquid bridges in microgravity // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2001. – Vol. 44, is. 10. – P.1983–2003.
147. Matar O.K., Craster R.V. Models for Marangoni drying. // *Physics of Fluids* – 2001. – Vol. 13, is. 7. – P. 1869–1883.
148. Miller S.C., Good R.H. A WKB-type approximation to the Schrodinger equation. // *Physical Review* – 1953. – Vol. 91, is. 1. – P. 174–179.
149. Nakamura S., Hibiya T., Kakimoto K., Imaishi N., Nishizawa S.-I., Hirata A., Mukai K., Yoda S.-i., Morita T.S. Temperature fluctuations of the Marangoni flow in a liquid bridge of molten silicon under microgravity on board the TR-IA-4 rocket // *Journal of Crystal Growth*. – 1998. – Vol. 186, is. 1–2. – P. 85–94.
150. Nakamura T., Takasu T., Itou H., Toguri J.M. Observation and calculation of Marangoni convection induced thermally in a molten salt // *Canadian Metallurgical Quarterly*. – 1998 – Vol. 37, is. 3–4. – P. 285–292.
151. Nield D.A. Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1964. – Vol. 19. – P. 341–352.
152. Ogawa K., Longtin J.P., Jikata K.H. Laser-induced surface-tension-driven flows in liquids // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 1999. – Vol. 42, is. 1. – P. 85–93.

153. Okhotsimskii A., Hozawa M. Schlieren visualization of natural convection in binary gas-liquid systems // *Chemical Engineering Science*. – 1998. – Vol. 53, is. 14. – P. 2547–2573.
154. Pearson J.R.A. On convection cells induced by surface Tension // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1958. – Vol. 21. – P. 489–500.
155. Perez-Garcia C., Carneiro G. Linear stability analysis of Benard–Marangoni convection in fluids with a deformable free surface. // *Physics of Fluids A*. – 1991. – Vol. 3, is. 2. – P. 292–298.
156. Saghir M.Z., Hennenberg M., Islam M.R. Double diffusive and Marangoni convection in a multi-cavity system // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 1998. – Vol. 41, is. 14. – P. 2157–2174.
157. Samonov V.E. About dynamics of process of formation and growth of Marangoni rings in magnetic fluid. // *The 8-th international Plyos conference on magnetic fluids: Abstracts*. – P. 70–71.
Самонов В.Е. О динамике процесса образования и роста колец Марангони в магнитных жидкостях // 8-я Международная Плесская конференция по магнитным жидкостям: Сборник научных трудов. – Иваново, 1998. – С. 142–144.
158. Sterling C.V., Scriven L.E. Interfacial turbulence: Hydrodynamic instability and the Marangoni effect. // *A.I.Ch.E.J.*. – 1959. – Vol.5. – P. 514–523.
159. Takashima M. Thermal instability of fluid layer bounded below by a solid layer of finite conductivity. // *Journal of the Physics Society of Japan*. – 1971. – Vol. 31. – P. 283–292.
160. Takashima M. Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface II. Overstability // *Journal of the Physics Society of Japan* – 1981. – vol. 50. – P. 2751–2756.
161. Tan M.J., Bankoff S.G., Davis S.H. Steady thermocapillary flows of thin liquid layers. I. Theory. // *Phys. Fluids. A*. – 1990. – Vol. 2, is. 3. – P. 313–321.
162. Thess A., Boos W. A model for Marangoni drying. // *Physics of Fluids*. –1999.

- Vol. 11, is. 12. – P. 3852–3855.
163. Thess A., Zikanov O., Wolke K., Boos W. A model for thermal Marangoni drying // *Journal of Engineering Mathematics*. – 2001. – Vol. 40, is. 3. – P. 249–267.
164. Tomita H., Abe K. Numerical simulation of pattern formation in the Benard-Marangoni convection // *Physics of Fluids*. – 2000. – Vol. 12, is. 6. P. 1389–1400.
165. Tsekov R., Radoev B. Surface forces and dynamic effects in thin liquid films on solid interfaces // *Int. J. Miner. Process.* – 1999. – Vol. 56, is. 1–4. – P. 61–74.
166. Vidal A., Acrivos A. Nature of the neutral state in surface tension driven convection. // *Physics of Fluids* – 1966. – Vol. 9. – P. 615–616.
167. Wang M., Ming N. *In situ* observation of surface-tension-induced oscillation of aqueous solution film in needlelike crystal growth. // *Physical Review A*. 1991. – Vol. 44, is. 12. – P. R7898–R7901.
168. Weidman P.D., Linde H., Velarde M.G. Evidence for solitary wave behavior in Marangoni–Benard convection. // *Physics of Fluids A*. – 1992 – Vol. 4, is. 5. – P. 921–926.
169. Zeitounyan R.Kh. The Benard-Marangoni thermocapillary-instability problem. // *Physics Uspekhi*. – 1998. – Vol. 41, is. 3. – P. 241–267.
170. Zuev A. L. Experimental studies of concentrational Marangoni effect in thin liquid layers. // *Зимняя школа по механике сплошных сред (двенадцатая). Тезисы докладов*. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – С. 59.

Приложение 1

О возможности разработки «динамических методов» определения коэффициента поверхностного натяжения магнитной жидкости

Поверхностное натяжение оказывает весьма существенное влияние на множество процессов, протекающих в магнитных жидкостях [22]. Однако, к настоящему времени не существует однозначного представления о зависимости этой величины от концентрации дисперсной фазы, напряженности внешнего магнитного поля и прочих параметров.

Традиционные методы, успешно использующиеся для измерения коэффициента поверхностного натяжения обычных жидкостей, такие как метод висючей капли, метод отрыва кольца и т.д. позволяют измерить поверхностное натяжение феррожидкости только при отсутствии внешнего магнитного поля, когда распределение твердой фазы в объеме жидкости и в поверхностном слое однородно и изотропно. При наложении магнитного поля погрешность статических, как отмечалось в [18], методов достигает 50 %!

По мнению ряда специалистов, весьма перспективным в этом отношении может стать использование, так называемых, *динамических методов* измерения поверхностного натяжения, в основе которых лежит теоретическое исследование процессов и явлений (а не состояний), характер протекания которых определяется поверхностным натяжением. Сопоставляя полученные на основе такого исследования результаты с экспериментом, можно сделать вывод о величине поверхностного натяжения в магнитной жидкости.

Вообще говоря, возможны две концепции разработки динамических методов. Первая из них основывается на теоретическом анализе особенностей протекания поверхностного явления в магнитной жидкости с учетом различных представлений о зависимости поверхностного натяжения от напряженности магнитного поля (и других факторов) и дальнейшем сравнении полученных

данных с экспериментом. Второй путь основывается на решении обратной задачи определения поверхностного натяжения магнитной жидкости после проведения эксперимента.

Оба указанных подхода имеют существенные недостатки. Первый подход, вообще говоря, не позволяет непосредственно определить значение коэффициента поверхностного натяжения, а только дает возможность проверить истинность существующих теоретических концепций. Во втором случае анализ затрудняется сложностью и неоднозначностью решения обратной задачи на основе полученных экспериментальных данных.

В связи с этим предлагается объединить эти подходы в единый метод, состоящий из двух этапов. На первом из них строится теория поверхностного эффекта и после экспериментальной проверки ее выводов формулируются общие представления о зависимости поверхностного натяжения магнитной жидкости от внешнего магнитного поля (имеет ли, например, поверхностное натяжение анизотропный характер или нет и т.д.). Это позволяет конкретизировать теоретическую модель и упростить решение обратной задачи на втором этапе.

Необходимым условием успешного использования предложенного метода является выбор поверхностного явления, исследование которого будет положено в основу динамического метода. Предлагаются следующие *критерии* выбора поверхностного явления:

1. Построение на первом этапе теории поверхностных явлений в магнитной жидкости не должно быть связано с анализом природы поверхностного натяжения. В противном случае одной из моделей заведомо будет отдаваться предпочтение, что может привести к неверным выводам.
2. Результат влияния этого эффекта на поведение магнитной жидкости должен достаточно просто измеряться экспериментально. Это условие вызвано необходимостью уменьшения погрешность прямых измерений, поскольку она неизбежно возрастет при вычислениях.
3. В результате такого процесса должны образовываться, по крайней мере,

двумерные структуры, что позволило бы исследовать возможность анизотропии поверхностного натяжения в магнитном поле.

4. Особенности поведения феррожидкости, вызванные влиянием данного эффекта должны определяться, в первую очередь, ее поверхностным натяжением, а влияние других процессов должно быть мало.

Результаты анализа ряда явлений на поверхности жидкости приведены в таблице. Здесь знак «+» соответствует утверждению, что явление полностью удовлетворяет указанному требованию, «±» – частично удовлетворяет, «-» – явление не удовлетворяет указанному условию.

Поверхностное явление	Требование			
	1	2	3	4
Поверхностные волны	+	+	+	+
Термокапиллярная конвекция	-	±	±	+
Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца	+	+	±	-
Неустойчивость Рэлея-Тейлора	+	+	±	-
Ячейки Хеле-Шоу	+	+	+	-
Эффект Марангони для двух полубесконечных жидкостей	+	±	+	±
Эффект Марангони в тонком слое жидкости	+	+	+	+

Как видно из таблицы, одним из наиболее перспективных с точки зрения использования в качестве основы для построения динамического метода исследования поверхностного натяжения магнитной жидкости наряду с поверхностными волнами является эффект Марангони в тонком слое жидкости (движение тонкого слоя жидкости под действием поверхностных сил). Это делает очень важным теоретическое исследование этого эффекта.

Приложение 2

Некоторые классические задачи движения жидкости

Рассмотрим более подробно ряд классических задач, используемых в главе II для апробации модифицированного метода эталонных уравнений.

Движение жидкости между двумя параллельными плоскостями.

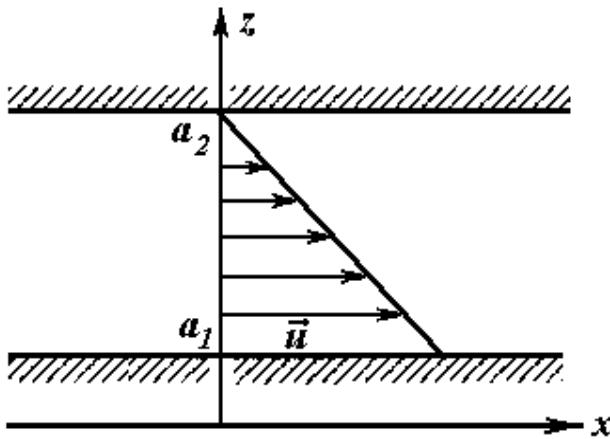


Рис. 18

Рассмотрим течение между двумя параллельными плоскостями $z = a_1$ и $z = a_2$ ($a_2 > a_1$) [70], при котором нижняя плоскость движется вдоль оси Ox со скоростью u , а внешние силы отсутствуют (рис. 18). Очевидно, движение жидкости в данном случае также происходит вдоль оси Ox .

Уравнения Навье-Стокса (1.1) и неразрывности (1.2) при сделанных допущениях принимают соответственно вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (\text{П2.1})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (\text{П2.2})$$

На систему (П2.1)–(П2.2) накладываются следующие граничные условия для скорости:

$$v_x|_{z=a_1} = u, \quad v_x|_{z=a_2} = 0. \quad (\text{П2.3})$$

Из (П2.2) следует, что v_x может зависеть только от y и z . Давление p , согласно (П2.1), зависит только от x . Таким образом, первое уравнение системы (П2.1) может быть представлено в виде системы:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \text{const}.$$

Поскольку движение жидкости вызывается только движением нижней плоскости вдоль Ox , в силу симметрии системы, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{П2.4})$$

Общее решение уравнения (П2.4) имеет вид

$$v_x = Az + B.$$

Подставляя граничные условия (П2.3), имеем

$$v_x = u \frac{a_2 - z}{a_2 - a_1}$$

или, после преобразования,

$$v_x = u \frac{a_2 z}{a_2 - a_1} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a_2} \right). \quad (\text{П2.5})$$

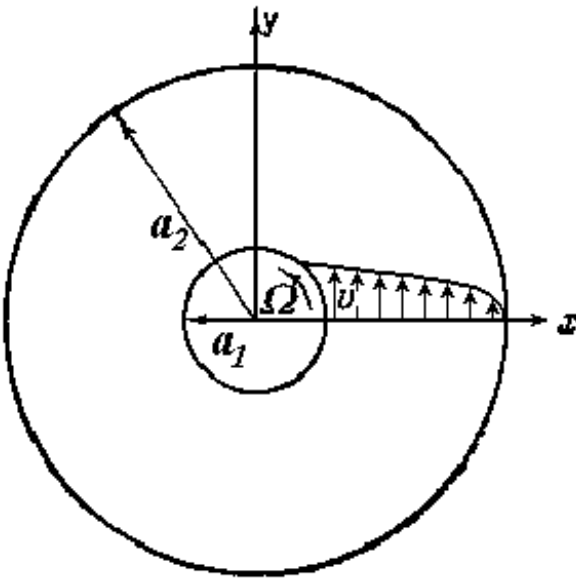


Рис. 19

Движение жидкости между коаксиальными цилиндрами (рис. 19).

Рассмотрим линейное течение между двумя коаксиальными цилиндрами [70, 76, 80] радиусами a_1 и a_2 ($a_2 > a_1$), при котором внутренний цилиндр вращается относительно внешнего со скоростью Ω (течение Куэтта).

В силу симметрии системы $\vec{v} = \{0, v_\varphi(r), 0\}$. Тогда уравнение Навье-

Стокса (1.1) принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\varphi^2}{r}, \quad \frac{1}{\eta r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (\text{П2.6})$$

а граничные условия –

$$v_\varphi|_{r=a_1} = \Omega a_1, \quad v_\varphi|_{r=a_2} = 0. \quad (\text{П2.7})$$

Учитывая соотношение $\partial p / \partial \varphi = 0$, также следующее из симметрии системы, запишем второе уравнение системы (П2.6) в виде:

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0. \quad (\text{П2.8})$$

Выражение (П2.8) представляет собой уравнение Эйлера, общее решение которого имеет вид

$$v_\varphi = Ar + \frac{B}{r}.$$

Подстановка условий (П2.8) дает

$$v_\varphi = \frac{\Omega a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) \cdot r. \quad (\text{П2.9})$$

Движение жидкости между концентрическими сферами.

Рассмотрим линейное движение жидкости между двумя концентрическими сферами радиусов a_1 и a_2 ($a_2 > a_1$). Внутренняя сфера вращается вокруг внешней со скоростью Ω , а ось вращения совпадает с осью z [70, 76]. Из симметрии системы следует, что скорость жидкости имеет вид: $\vec{v} = \{0, 0, v_\varphi(r, \theta)\}$, что позволяет записать (1.1) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{1}{\eta} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (\text{П2.10})$$

Поскольку, $\partial p / \partial \varphi = 0$, т.е. нет никакой силы, заставляющей жидкость вращаться между сферами помимо силы вязкого трения, (П2.10) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0, \quad (\text{П2.11})$$

на которое следует наложить условия:

$$v_\varphi \Big|_{r=a_1} = \Omega a_1 \sin \theta, \quad v_\varphi \Big|_{r=a_2} = 0. \quad (\text{П2.12})$$

Из (П2.12) следует предположение о поиске решения (П2.11) в форме

$$v_\varphi(r, \theta) = R(r) \sin \theta, \quad (\text{П2.13})$$

что приводит к обыкновенному уравнению Эйлера для $R(r)$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{2R}{r^2} = 0. \quad (\text{П2.14})$$

Общее решение (П2.14) имеет вид

$$R(r) = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

Подставляя последнее выражение в (П2.13) и учитывая граничные условия (П2.12), имеем

$$v_\phi = \Omega \frac{a_1^3 a_2^3}{a_2^3 - a_1^3} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{a_2^3} \right) \cdot r \cdot \sin \theta. \quad (\text{П2.15})$$

Приложение 3

Влияние магнитного поля на движение тонкого слоя магнитной жидкости

Выполним качественный анализ влияния внешнего однородного горизонтального магнитного поля \vec{H}_0 на движение тонкого слоя магнитной жидкости под действием поверхностных сил. Указанная проблема имеет самостоятельное научное значение, поскольку результаты ее исследования могут быть положены в основу разработки динамических методов определения поверхностного натяжения магнитной жидкости (более подробно см. Приложение 1).

В основе гидродинамики магнитных жидкостей лежит модель магнитной жидкости [10, 107, 119, 120] как однородной однокомпонентной среды. При этом предполагается, что возможное изменение внутренней структуры магнитной суспензии (объединение частиц в цепочечные и иные агрегаты, перераспределение частиц в объеме феррожидкости и т.п.) либо совсем не влияет на ее движение, либо оказывает ничтожно малое влияние. В дальнейшем будем придерживаться таких же модельных представлений о структуре магнитной жидкости.

Очевидно, в отсутствии внешнего магнитного поля движение магнитной жидкости имеет тот же характер, что и исследованное в главе III движение обычной жидкости под действием поверхностных сил. Ограничимся анализом случая, когда поверхностно-активное вещество не является магнитной жидкостью. Тогда магнитное поле, по всей видимости, оказывает непосредственное влияние только на движение подложки посредством следующих основных факторов:

- зависимости вязкости и реологических свойств магнитной жидкости [10, 12, 16, 107, 119, 120] от напряженности внешнего магнитного поля;
- зависимости поверхностного натяжения магнитной жидкости от магнитного

- поля [18, 19, 24, 91, 92, 142, 143];
- возможная анизотропия поверхностного натяжения магнитной жидкости [18, 19];
 - возникновение в магнитной жидкости объемных пондеромоторных сил [104, 109].

Рассмотрим, к каким особенностям движения магнитной жидкости приводит влияние указанных процессов при различных значениях напряженности внешнего магнитного поля и концентрации твердой фазы магнитной жидкости. Для этого оценим степень относительного изменения значений перечисленных факторов в зависимости от внешнего поля и влияние данного изменения на характер движения жидкости.

Выполним анализ зависимости от напряженности магнитного поля вязкости магнитной жидкости. Данная зависимость объясняется ориентацией магнитных моментов частиц твердой фазы вдоль поля, сопровождаемой поворотом частиц в процессе движения жидкости [107] (*вращательная вязкость*). Этот механизм приводит к увеличению эффективной вязкости магнитной жидкости. Достаточно сильное поле жестко ориентирует частицу, препятствуя ей вращаться вместе с потоком, что приводит к насыщению вращательной вязкости.

Для количественной оценки вклада вращательной вязкости в общую вязкость магнитной жидкости воспользуемся результатами, полученными Ю.Д. Варламовым [12] и В.Г. Гилевым [16].

Согласно [12], зависимость вязкости магнитной жидкости от напряженности магнитного поля и концентрации твердой фазы следующая:

$$\eta_H = \eta_0 \left[f_1(\varphi_p) + 1,5\varphi_h F(\xi) \sin^2 \vartheta \right]. \quad (\text{ПЗ.1})$$

Здесь η_0 – вязкость жидкости-носителя, ϑ – угол между $\vec{\Omega}$ и \vec{H} ($\vec{\Omega}$ – угловая скорость жидкости), φ_h – так называемая, гидродинамическая концентрация [107]. Известные функции $f_1(\varphi_p)$ и $F(\xi)$ зависят соответственно от концентрации твердой фазы φ_p и параметра $\xi = \frac{\mu_0 m H}{k T}$, характеризующего степень упоря-

дочения магнитных моментов частиц в магнитном поле. (μ_0 – магнитная постоянная, m – магнитный момент частицы, k – постоянная Больцмана, T – температура).

Первое слагаемое в (ПЗ.1) характеризует изменение вязкости магнитной жидкости с ростом концентрации частиц твердой фазы и не зависит от напряженности магнитного поля, а второе – вращательную вязкость.

Несколько иные результаты приведены в [16]. В.Г. Гилевым экспериментально показано, что зависимость вязкости магнитной жидкости от напряженности внешнего поля наилучшим образом описывается соотношением

$$\eta_H = \eta_0 \left(1 + 2,5\varphi_p + 1,5\varphi_p \cdot \frac{\xi \cdot L^2(\xi)}{\xi - L(\xi)} \cdot F(\sigma) \cdot \sin^2 \vartheta \right). \quad (\text{ПЗ.2})$$

Здесь $L(\xi) = \text{cth}\xi - 1/\xi$ – функция Ланжевена, $\sigma = K_a V / kT$; K_a – константа магнитной анизотропии феррочастицы, V – объем частиц ферромагнетика.

Численный расчет, выполненный на основе (ПЗ.1) и (ПЗ.2), показывает, что с ростом напряженности магнитного поля величина вязкости очень быстро выходит на насыщение, и далее остается неизменной. При малых концентрациях вклад вращательной вязкости в общую вязкость незначителен и составляет порядка 6 % (при $\varphi_p = 6,5$ %). С увеличением концентрации феррочастиц относительный вклад вращательной вязкости возрастает и достигает 18 % (при $\varphi_p = 20\%$).

Таким образом, при исследовании движения концентрированных магнитных жидкостей влияние вращательной вязкости может быть весьма существенным. В этом случае вязкость феррожидкости необходимо считать анизотропной величиной, зависящей от угла между ротором скорости движения жидкости и напряженностью магнитного поля. При концентрациях до 10 % величину вращательной вязкости можно считать незначительной по сравнению с обычной вязкостью магнитной жидкости и не учитывать.

Перейдем к рассмотрению зависимости поверхностного натяжения магнитной жидкости от напряженности магнитного поля и влияния этого процесса

на характер движения магнитной подложки. В большинстве теоретических работ [24, 91, 92, 142, 143] делается вывод, согласно которому магнитное поле либо совсем не изменяет коэффициент поверхностного натяжения, либо изменяет его незначительно.

В то же время, в ряде исследований [18, 19], предполагается наличие анизотропии поверхностного натяжения. В частности, согласно [19], имеет место следующая зависимость коэффициента поверхностного натяжения от напряженности магнитного поля

$$g = \alpha - \frac{1}{2}\beta B_{n\Sigma}^2 - \frac{1}{2}\gamma H_{\tau\Sigma}^2. \quad (\text{П3.3})$$

Здесь α – коэффициент поверхностного натяжения магнитной жидкости в отсутствие поля, β и γ – феноменологические параметры, определяемые экспериментально.

Исходя из предположения о справедливости выражения (П3.3), рассмотрим, при каких полях вклад анизотропных членов в поверхностное натяжение феррожидкости будет существенным. Значения параметров β и γ положим, в соответствии с [19], равными $\beta = -4 \cdot 10^{-4}$ см, $\gamma = 4 \cdot 10^{-4}$ см (система СГС). Кроме того, оценим величину параметров β и γ , при которых внешнее магнитное поле напряженностью $H = 0 \div 1000$ А/м будет оказывать существенное влияние на поверхностное натяжение магнитной жидкости и приводить к анизотропии.

Для этого воспользуемся следующим приемом. Будем предполагать, что образующееся в результате движения жидкости сухое пятно (рис. 1) имеет форму кругового цилиндра. Его можно рассматривать как воздушную цилиндрическую полость внутри магнитной жидкости, «искажающую» внешнее первоначально однородное магнитное поле. Напряженность результирующего поля вне данной полости, в цилиндрических координатах задается соотношениями [77]

$$H_r^{(e)} = \left(1 + \frac{A}{r^2}\right) H_0 \cos \varphi, \quad H_\varphi^{(e)} = -\left(1 - \frac{A}{r^2}\right) H_0 \sin \varphi, \quad H_z^{(e)} = 0. \quad (\text{П3.4})$$

Здесь $A = \frac{\mu^{(i)} - \mu^{(e)}}{\mu^{(i)} + \mu^{(e)}} R^2$; $\mu^{(i)}$ и $\mu^{(e)}$ – соответственно магнитная проницаемость среды внутри и вне полости, R – радиус круглого сухого участка. При записи (ПЗ.4) учтено, что поле \vec{H}_0 горизонтально, а начало отсчета φ совпадает с направлением \vec{H}_0 .

Зависимость относительного вклада анизотропных членов в поверхностное натяжение магнитной жидкости, рассчитанная на границе сухого участка при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ для параметров $\beta = -4 \cdot 10^{-4}$ см и $\gamma = 4 \cdot 10^{-4}$ см на основе соотношения (ПЗ.3), изображена на рис. 20.

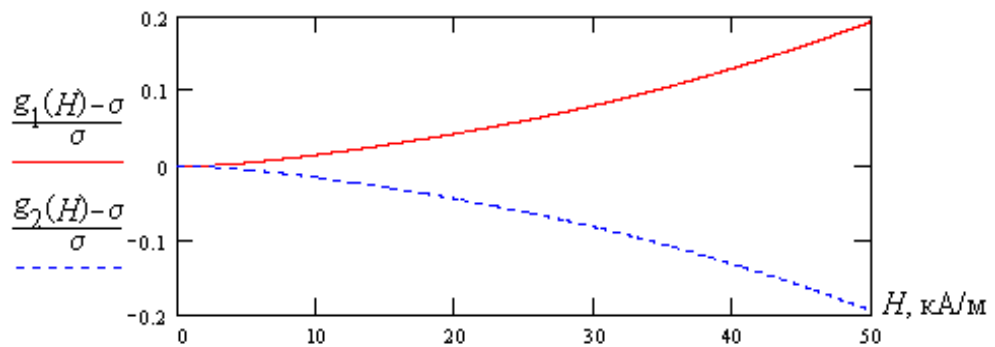


Рис. 20. Относительное изменение поверхностного натяжения магнитной жидкости вблизи сухого участка. Здесь $g_1(H_0)$ и $g_2(H_0)$ – значения коэффициента поверхностного натяжения, рассчитанного на границе «ямки» при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$

Из рисунка видно, что с увеличением напряженности магнитного поля коэффициент поверхностного натяжения вдоль поля увеличивается, а поперек – уменьшается. Такое изменение поверхностного натяжения приводит к нарушению круговой симметрии и вытягиванию образующихся в результате такого движения структур *вдоль внешнего поля*.

Таким образом, в сильных магнитных полях ($H \sim 30 \div 50$ кА/м) зависимость коэффициента поверхностного натяжения от напряженности магнитного поля является существенной и приводит к вытягиванию «ямки», образующейся в результате движения жидкости вдоль магнитного поля. В слабых полях (до 1 кА/м) вклад анизотропных членов в поверхностное натяжение может быть существенным только у магнитных жидкостей, для которых параметры β и γ оказываются равными $\beta = -4 \cdot 10^{-2}$ см, $\gamma = 4 \cdot 10^{-2}$ см (система СГС).

Как отмечалось выше, магнитное поле может влиять на движение магнитной жидкости не только за счет изменения ее вязкости и коэффициента поверхностного натяжения, но и непосредственно за счет возникновения пондеромоторной силы, действующей на жидкость. Согласно [104], сила, действующая на систему, характеризуемую намагниченностью \vec{M} , равна:

$$\vec{F} = \nabla(\vec{M}\vec{H}) = (\vec{M}\nabla)\vec{H} + [\vec{M}, \text{rot}\vec{H}]. \quad (\text{ПЗ.5})$$

Учитывая, что намагниченность имеет вид $\vec{M} = \chi\vec{H}$, а изменение магнитной восприимчивости χ с ростом магнитного поля, согласно [12], составляет менее 4,5 % (в полях напряженностью до 1000 А/м – менее 2 %), перепишем выражение (ПЗ.5) в более удобном для расчетов виде:

$$\vec{F} = \chi\nabla H^2. \quad (\text{ПЗ.6})$$

Векторная диаграмма для пондеромоторной силы, действующей на магнитную жидкость при наличии в последней цилиндрической полости, построенная на основе соотношений (ПЗ.6) и (ПЗ.4), изображена на рис. 13 на стр. 89. Из построенной диаграммы видно, что пондеромоторная сила вытягивает сухое пятно *вдоль внешнего магнитного поля*.

Качественно проанализируем изменение величины пондеромоторной силы, действующей на магнитную подложку, помещенной в сильное магнитное поле. Зависимость магнитной восприимчивости χ от H в этом случае будет существенной и, как показано в [12], с увеличением напряженности поля магнитная восприимчивость феррожидкости будет уменьшаться, что приведет к уменьшению пондеромоторной силы.

Таким образом, основным фактором, влияющим на движение магнитной жидкости умеренной концентрации в магнитных полях до 1 кА/м, является возникающая в пондеромоторная сила, которая вытягивает образующуюся «ямку» структуру вдоль внешнего поля. Остальные факторы в указанном интервале магнитных полей и концентраций существенного влияния на движение жидкости не оказывают, и их можно не учитывать. В случае сильных магнитных по-

лей (напряженностью более 10 кА/м) существенную роль играет возможная анизотропия поверхностного натяжения, также деформирующая образующуюся структуру вдоль внешнего поля. В концентрированных жидкостях ($\varphi_p \geq 20\%$) следует также учитывать анизотропию вязкости.

Приложение 4

Качественный анализ влияния поверхностных и магнитных сил на движение магнитной жидкости

На движение магнитной жидкости, рассмотренное в главе IV, существенное влияние оказывает сила поверхностного натяжения f_{surf} и пондеромоторная сила f_{magn} , действующая со стороны внешнего однородного горизонтального магнитного поля. Представляется удобным отдельно рассмотреть случаи, при которых доминирует одна из этих сил.

Для этого введем вспомогательный безразмерный параметр

$$Str = \frac{f_{magn}}{f_{surf}}, \quad (\text{П5.1})$$

являющийся отношением пондеромоторной силы к силе поверхностного натяжения.

Выполним оценку величин, входящих в (П5.1). Сила поверхностного натяжения действует вдоль свободной поверхности и численно равна

$$\vec{f}_{surf} = -gradp, \quad (\text{П5.2})$$

где $p = |\text{grad}\alpha|$. (В обоих случаях вектор градиента вычисляется вдоль свободной поверхности жидкости.)

Градиент поверхностного натяжения, вызванный нанесением ПАВ на свободную поверхность магнитной жидкости, можно приближенно представить в виде

$$\text{grad}\alpha \approx \frac{\Delta\alpha}{b}.$$

Здесь b – характерный размер системы (радиус «ямки»), $\Delta\alpha$ – разность коэффициентов поверхностного натяжения подложки и ПАВ. Подстановка полученного выражения в (П5.2) дает следующую оценку силы поверхностного натяжения

$$f_{surf} = gradp \approx \frac{\Delta\alpha}{b^2}. \quad (\text{П5.3})$$

Объемная сила, действующая на магнитную подложку, определяется выражением (П3.5). Оценка значений величин, входящих в (П3.5), дает

$$f_{magn} \approx \frac{\mu_0 \cdot \Delta M \cdot \Delta H}{b}. \quad (\text{П5.4})$$

Здесь ΔM и ΔH соответственно характеризуют изменение намагниченности и напряженности магнитного поля на расстоянии, сравнимом с размерами деформирующейся поверхности жидкости. В случае малых полей (до 1 кА/м) изменение магнитной восприимчивости с ростом напряженности внешнего поля составляет менее 2 % и может не учитываться. Тогда (П5.4) принимает вид

$$\bar{f}_{magn} \approx \frac{\mu_0 \chi (\Delta H)^2}{b}. \quad (\text{П5.4a})$$

Подстановка (П5.3) и (П5.4) в (П5.1) дает

$$Str = \frac{\mu_0 \cdot \Delta M \cdot \Delta H \cdot b}{\Delta\alpha} \quad (\text{П5.5})$$

или, в случае малых полей,

$$Str = \frac{\mu_0 \chi (\Delta H)^2 b}{\Delta\alpha}. \quad (\text{П5.5a})$$

Безразмерный параметр Str является вспомогательным и позволяет в предельных случаях рассматривать эволюцию образующейся в результате движения магнитной жидкости структуры только как увеличение ее площади ($Str \ll 1$) или как вытягивание ее вдоль внешнего магнитного поля ($Str \gg 1$). Процессы, имеющие место при $Str \sim 1$, по всей видимости, являются сильно неравновесными и могут носить характер бифуркаций. Несмотря на то, что значение Str с течением времени изменяется (см. ниже), процессы при $Str \ll 1$ и при $Str \gg 1$ происходят последовательно, заметно разделены во времени, что делает возможным самостоятельное исследование каждого из них.

Рассмотрим два предельных случая:

I. $Str \ll 1$: сила поверхностного натяжения значительно превосходит понде-

ромоторную силу. Тогда вначале происходит быстрый рост практически круглой «ямки», что приводит, с одной стороны, к уменьшению сил поверхностного натяжения за счет уменьшения концентрации ПАВ на свободной поверхности, а с другой, – к росту пондеромоторной силы. Эти процессы характеризуются, в соответствии с (П5.5), возрастанием Str и приводят к дальнейшему вытягиванию деформированной области вдоль линий напряженности внешнего магнитного поля.

II. $Str \gg 1$: пондеромоторная сила значительно превосходит силу поверхностного натяжения. В этом случае, напротив, вначале происходит быстрое вытягивание «ямки» вдоль внешнего магнитного поля, что приводит к уменьшению пондеромоторной силы, характеризующееся уменьшением Str . В дальнейшем продолжается рост вытянутой структуры со слабо меняющимся эксцентриситетом.

Решение уравнения для фазовой функции $R(\sigma, \tau)$

Поставим задачу решения уравнения

$$\frac{R_1'''}{R_1'} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{R_1''}{R_1'} \right)^2 + 2\beta^2 (R_1')^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2 + 2}{(\sigma^2 - 1)^2} + 2 \frac{\sigma^2 + \tau^2 - 1}{(\sigma^2 - \tau^2)(\sigma^2 - 1)} - 2\beta_1^2 a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1} = 0.$$

(П6.1)

Вводя обозначение

$$f_1(\sigma) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2 + 2}{(\sigma^2 - 1)^2} + 2 \frac{\sigma^2 + \tau^2 - 1}{(\sigma^2 - \tau^2)(\sigma^2 - 1)} - 2\beta_1^2 a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}$$

(П6.2)

и используя подстановку $R_1' = y(\sigma)$, имеем

$$\frac{y''}{y} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{y'}{y} \right)^2 + 2\beta^2 y^2 + f_1(\sigma) = 0.$$

(П6.3)

Выполним преобразования в уравнении (П6.3). Представляя первое слагаемое (П6.3) в виде $y''/y = (y'/y)' + (y'/y)^2$, запишем

$$\left(\frac{y'}{y} \right)' - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y'}{y} \right)^2 + 2\beta^2 y^2 + f_1(\sigma) = 0.$$

(П6.4)

Рассмотрим более подробно второе и третье слагаемые (П6.4). Преобразовывая их к виду

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y'}{y} \right)^2 - 2\beta^2 y^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{y'}{y} + 2\beta y \cdot i \right)^2 - 2\beta y' \cdot i$$

и подставляя полученное выражение в (П6.4), находим

$$\left(\frac{y'}{y} + 2\beta y \cdot i \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{y'}{y} + 2\beta y \cdot i \right)^2 + f_1(\sigma) = 0.$$

(П6.5)

Функции y и $f_1(\sigma)$ являются вещественными. Вводя обозначение $y'/y + 2\beta y \cdot i = \psi(\sigma)$, перепишем (П6.5) в виде

$$\psi'(\sigma) - \frac{1}{2}\psi^2(\sigma) + f_1(\sigma) = 0. \quad (\text{П6.6})$$

Уравнение (П6.6) является известным уравнением Рикатти.

Перед непосредственным решением (П6.6), рассмотрим ограничения, накладываемые на $\psi(\sigma)$. В связи с тем, что в (П6.6) действительные коэффициенты, мнимая часть выражения $\psi'(\sigma) - \psi^2(\sigma)/2$ должна обращаться в нуль:

$$\text{Im} \psi'(\sigma) - \frac{1}{2} \text{Im} \psi^2(\sigma) = 0. \quad (\text{П6.7})$$

Из (П6.7) следует

$$\text{Re} \psi(\sigma) = \frac{(\text{Im} \psi(\sigma))'}{\text{Im} \psi(\sigma)}. \quad (\text{П6.8})$$

Поскольку $\text{Im} \psi(\sigma) = 2\beta y$, а $\text{Re} \psi(\sigma) = y'/y$, требование (П6.8) выполняется автоматически.

Далее перейдем к непосредственному решению (П6.6). Выполняя подстановку $\psi(\sigma) = -2z'(\sigma)/z(\sigma)$, приходим к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$z'' - \frac{1}{2}f_1(\sigma)z = 0. \quad (\text{П6.9})$$

Для решения (П6.9) воспользуемся методом, описанным в [95]. Перейдем от (П6.9) к системе уравнений первого порядка

$$x_1' = x_2, \quad (\text{П6.10a})$$

$$x_2' = \frac{1}{2}f_1(\sigma)x_1. \quad (\text{П6.10б})$$

Здесь $x_1 = z$, $x_2 = z'$.

Систему (П6.10) можно переписать в матричном виде

$$X' = \Sigma(\sigma) \cdot X, \quad (\text{П6.11})$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2}f_1(\sigma) & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (П6.11) является матричным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Его решение имеет вид:

$$X = X_0 \cdot \exp \left[\int \Sigma(\sigma) d\sigma \right], \quad (\text{П6.12})$$

где X_0 – начальное значение.

Выполняя обратное преобразование, находим

$$y = \frac{1}{2\beta} \operatorname{Im} \psi(\sigma), \quad (\text{П6.13})$$

и, окончательно,

$$R'_1 = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{c_2 g_1(\sigma)}{(c_1^2 + c_2^2) g_1(\sigma) \cos^2 \left(\sqrt{h_1(\sigma)/2} \right) - c_1 \sin \left(\sqrt{2h_1(\sigma)} \right) \sqrt{2h_1(\sigma)} - 2\sigma \sin^2 \left(\sqrt{h_1(\sigma)/2} \right)}. \quad (\text{П6.14a})$$

Аналогично

$$R'_2 = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{c_2 g_2(\sigma)}{(c_1^2 + c_2^2) g_2(\sigma) \cos^2 \left(\sqrt{h_2(\sigma)/2} \right) - c_1 \sin \left(\sqrt{2h_2(\sigma)} \right) \sqrt{2h_2(\sigma)} - 2\sigma \sin^2 \left(\sqrt{h_2(\sigma)/2} \right)}. \quad (\text{П6.14б})$$

Здесь введены следующие обозначения: $h_i(\sigma) = -g_i(\sigma) \cdot \sigma$ (предполагается, что $h_i(\sigma) > 0$ на всей области определения);

$$g_1(\sigma) = \frac{3\sigma}{4(\sigma^2 - 1)^2} + \frac{1}{8} \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} + \frac{1 - 2\tau^2}{\tau(1 - \tau^2)} \ln \frac{\sigma - \tau}{\sigma + \tau} + \\ + \frac{\tau^2}{1 - \tau^2} \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} - 2\beta_1^2 a^2 \sigma - 2\beta_1^2 a^2 (1 - \tau^2) \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} + C,$$

$$g_2(\sigma) = \frac{3\sigma}{4(\sigma^2 - 1)^2} + \frac{1}{8} \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} - 2\beta_1^2 a^2 \sigma - 2\beta_1^2 a^2 (1 - \tau^2) \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} + C.$$