

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. ДЕМИДОВА П. Г.

на правах рукописи

Палей Дмитрий Эзрович

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДИСКРЕТНЫХ  
СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ФИЛЬТРОМ

Специальность - 05.12.01 -  
"Теоретические основы радиотехники"

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
кандидат технических наук  
доцент Л.Н. Казаков

Ярославль - 1998 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
ГЛАВА I. Математические модели дискретных СФС с двумя нелинейностями .....	17
1.1. Постановка задачи .....	17
1.2. Математическая модель цифровой СФС .....	18
1.3. Математическая модель импульсной СФС .....	24
1.4. Математическая модель импульсно-цифровой СФС .....	29
1.5. Выводы .....	34
ГЛАВА 2. Динамика ДСФС с пилообразной характеристикой детектора ....	36
2.1. Система с линейным фильтром в цепи управления .....	38
2.1.1. Общие свойства СФС с пилообразной характеристикой детектора .....	39
2.1.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления .....	44
2.1.3. Система с интегратором в цепи управления .....	52
2.2. Система с ограничивающим фильтром в цепи управления ....	59
2.2.1. Общие свойства ДСФС с ограничивающим фильтром .....	59
2.2.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления .....	61
2.2.3. Система с интегратором в цепи управления .....	71
2.3. Система с пилообразным фильтром в цепи управления .....	75
2.3.1. Общие свойства ДСФС с пилообразным фильтром .....	75
2.3.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления .....	79
2.3.3. Система с интегратором в цепи управления .....	86
2.4. Выводы .....	88

ГЛАВА 3. Динамика ДСФС с синусоидальной характеристикой детектора	91
3.1. Система с линейным фильтром в цепи управления .....	93
3.1.1. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления.....	93
3.1.2. Система с интегратором в цепи управления .....	102
3.2. Система с ограничивающим фильтром в цепи управления .....	105
3.2.1. Общие свойства ДСФС с синусоидальной характеристикой ФД и ограничивающим фильтром .....	105
3.2.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления.....	108
3.2.3. Система с интегратором в цепи управления .....	115
3.3. Система с пилообразным фильтром в цепи управления.....	120
3.3.1. Общие свойства ДСФС синусоидальной характеристикой ФД и пилообразным фильтром.....	120
3.3.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления.....	124
3.3.3. Система с интегратором в цепи управления .....	129
3.4. Статистическая динамика ДСФС с синусоидальным детектором и нелинейным фильтром .....	133
3.4.1. Постановка задачи .....	133
3.4.2. Стохастическая модель и описание движений в ДСФС с нелинейным фильтром .....	134
3.4.3. Исследование статистической области глобальной устойчивости .....	136
3.5. Выводы.....	142

ГЛАВА 4. Экспериментальные исследования ДСФС с нелинейным фильтром .....	145
4.1. Постановка задачи .....	145
4.2. Компьютерное моделирование импульсной СФС с интегратором в цепи управления .....	147
4.2.1. Блок-схема моделирующего алгоритма .....	147
4.2.2. Анализ результатов исследования компьютерной модели....	151
4.3. Экспериментальные исследования однокольцевого синтезатора частоты КВ-диапазона .....	155
4.4. Экспериментальные исследования цифровой СФС с квадратурным аналого-цифровым преобразователем на входе .....	157
4.4.1. Описание программно-аппаратного комплекса «Цифровые системы» .....	157
4.4.2. Блок-схема алгоритма экспериментальных исследований....	161
4.4.3. Анализ результатов эксперимента .....	162
4.5. Выводы .....	165
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	167
ЛИТЕРАТУРА .....	172
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	180
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .....	183

## ВВЕДЕНИЕ

Системы фазовой синхронизации (СФС) нашли в настоящее время широкое применение во многих областях радиотехники, таких как радиопередающие и радиоприемные системы, радиолокация и радионавигация, радиоизмерительная техника и т. д. [1-6]. Примером могут служить современные цифровые радиоприемные системы, в которых с помощью СФС решается целый ряд задач. Среди них синхронизация несущих колебаний, синхронизация и демодуляция поднесущих и модулирующих колебаний, синхронизация и демодуляция двоичных символов цифровой информации, синхронизация и свертка псевдослучайной последовательности в системах связи с использованием широкополосных сигналов [7-11].

Как правило, основу вышеперечисленных систем составляют дискретные системы фазовой синхронизации (ДСФС). Путем оптимизации структуры колец, типов входящих в них узлов, и, в первую очередь, фильтров цепи управления можно создавать варианты систем, обладающие требуемыми характеристиками по точности работы, быстродействию, помехоустойчивости для различных типов входных сигналов и законов модуляции [10,11]. За счет усложнения алгоритмов обработки и реализующих их устройств появляется возможность создавать гибкие алгоритмы обработки информации, оптимизации различных параметров и характеристик.

Отдельно следует сказать о системах частотного синтеза, которые строятся на основе дискретных колец фазовой синхронизации [12-19]. В диапазонах метровых, дециметровых и сантиметровых волн подобные системы пользуются большой популярностью. Здесь также за счет усложнения цепей управления, и соответственно алгоритмов управления можно значительно повысить эффективность, расширить функциональные возможности. Например, наряду с традиционным применением использование колец, обладающих высокими астатическими свойствами, позволяет совместить в синтезаторе функцию синтеза высокостабильной по частоте несущей с ее угловой модуляцией [22,23]. Использование различных режимов управления фильтрами, как правило нелинейными, позволяет достичь высоких характеристик синтезируемых сигналов.

Приведенные примеры говорят о том, что существует устойчивая тенденция расширения области применения систем фазовой синхронизации. Развитие дискретных и цифровых технологий только усиливает ее. С другой стороны, необходимо понимать, что увеличение области применения, связанное в том числе и с расширением функциональных возможностей СФС, предполагает усложнение алгоритмов управления, а это напрямую связано с использованием сугубо нелинейных режимов функционирования.

В пользу этого говорит хотя бы следующий очевидный факт. Для эффективного использования СФС необходимо, чтобы состояние синхронизма обеспечивалось как можно в более широкой области значений параметров и начальных расстроек по частоте. Это, в свою очередь, невозможно без функционирования системы на границе предельных нелинейных режимов. При этом нелинейные свойства будут определяться не только фазовым детектором, но и другими звеньями, например фильтром цепи управления. Так наличие в кольце СФС фильтра нижних частот астатического типа (аналогового для импульсных систем и цифрового для цифровых систем) при наличии больших расстроек по частоте зачастую приводит к подобным режимам. Вид нелинейности фильтра зависит от конкретной реализации и может быть различным.

Другим примером может служить искусственное введение нелинейности в цепь управления с целью придания системе требуемых свойств и характеристик. Примером может служить двусторонний ограничитель для уменьшения диапазона расстроек по частоте. Подобная нелинейность позволяет избежать возникновения кратных захватов по частоте и других паразитных движений. Т.е., удачный выбор нелинейного фильтра позволяет не только оптимизировать динамические свойства системы, такие как область устойчивости в большом или в целом, характер движения, переходные процессы, но и придавать системе совершенно новые качества, получение которых невозможно в системе с линейным фильтром.

Таким образом, можно утверждать, что задача повышения эффективности существующих и вновь созданных типов устройств на основе дискретных СФС достаточно актуальна. С другой стороны решение этой проблемы неразрывно

связано с анализом нелинейных режимов систем, при котором учитываются не только нелинейные свойства фазового детектора, но и других узлов - в первую очередь фильтра нижних частот цепи управления. Т.е. речь идет об исследовании моделей дискретных СФС, имеющих несколько нелинейностей. При этом одна из них периодическая, обусловленная фазовым детектором (синусоидальная, пилообразная, треугольная и т.д.), вторая, обусловленная нелинейными свойствами фильтра, может быть периодической, либо непериодической - ограничивающей. Периодическая (чаще пилообразная) нелинейность характерна для цифровых интегрирующих фильтров со сбросом по переполнению [7,14]. Нелинейность ограничивающего типа характерна для аналоговых фильтров (например при реализации их на операционном усилителе) и цифровых с переполнением без сброса [3,7,14].

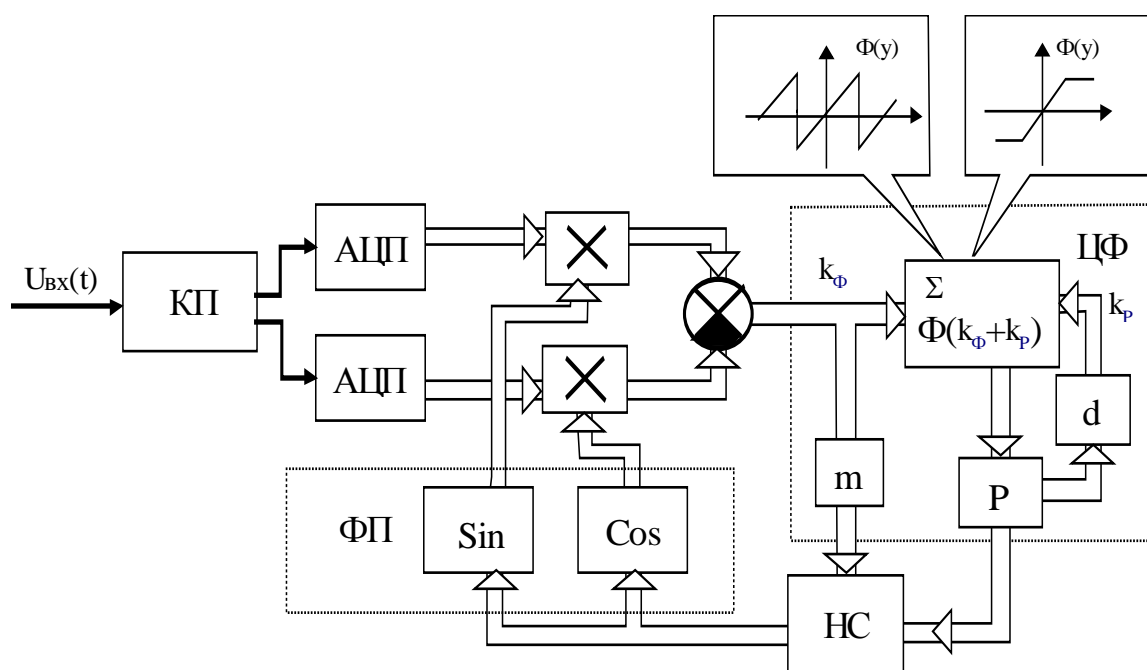


Рис. В.1. Структурная схема синхронно-фазового демодулятора на основе цифровой СФС с нелинейным цифровым фильтром.

На рис. В.1, В.2 приведены типичные структурные схемы цифровой и импульсной систем фазовой синхронизации с нелинейными фильтрами в цепи управления. На рис. В.1 показана схема синхронно-фазового демодулятора с квадратурным аналого-цифровым преобразователем на входе. В качестве сглаживающего фильтра применяется интегрирующий фильтр с конечной

разрядной сеткой на основе накопительной схемы с параллельным форсирующим каналом. В зависимости от алгоритма переполнения сумматора типичными являются два варианта нелинейной функции, описывающей фильтр. Это линейная с насыщением и пилообразная функции. Далее нелинейные фильтры с такими характеристиками будем называть соответственно ограничивающим и пилообразным. При значении коэффициента передачи усилителя кода  $d$  равном единице цифровой фильтр будет представлять из себя нелинейный интегратор с форсированием, при значении  $d$  меньше единицы - пропорционально-интегрирующий фильтр.

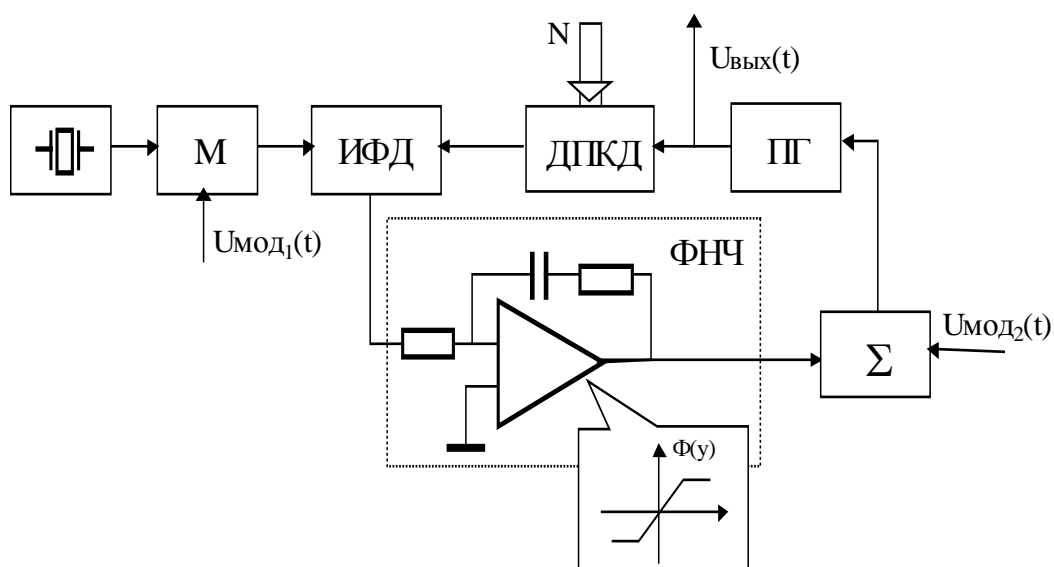


Рис. В.2. Структурная схема возбуждателя ЧМ-колебаний на основе импульсной СФС.

На рис. В.2 показана схема возбуждателя ЧМ-колебаний на основе однокольцевого синтезатора с возможной одноточечной (в низкочастотном или высокочастотном каналах) или двухточечной (одновременно в двух каналах) модуляцией [22,23]. Фильтр нижних частот канала управления является астатическим звеном и представляет собой интегратор с форсированием. Его свойства описываются нелинейной с насыщением функцией, соответственно фильтр является ограничивающим. Постановка астатического звена вызвана требованием малых фазовых ошибок в канале модуляции. С другой стороны применение интегратора с большой вероятностью приводит к срабатыванию



нелинейности фильтра, что в свою очередь обуславливает необходимость учета нелинейных свойств фильтров при разработке подобных устройств.

Приведенные схемы ДСФС с нелинейным фильтром являются определяющими при построении обобщенной модели, представляющей собой предмет исследования диссертации.

Необходимо отметить, что модель дискретной СФС с двумя и более нелинейностями представляет собой достаточно сложный объект исследования, практически неизученный до недавнего времени. Основные причины кроются в отсутствии достаточно развитой теории подобных систем. До недавнего времени, несмотря на большое число публикаций, не было полной картины поведения дискретных СФС второго и выше порядков даже с линейным фильтром, не говоря о двух нелинейностях. Можно утверждать, что для произвольных параметров до сих пор не решена основная задача нелинейной динамики дискретных СФС - задача о глобальной устойчивости или устойчивости в целом состояния синхронизма.

В лучшем случае для систем второго и выше даже для наиболее простых типов нелинейностей существует лишь оценки областей устойчивости в целом (полосы захвата). В подтверждение этого можно указать ряд работ Пестрякова А. В. [24-27], в которых для анализа динамики дискретных систем синхронизации применяются асимптотические методы, в частности метод усреднения. С его помощью получены оценки на время переходных процессов и области устойчивости в целом для разного типа дискретных систем синхронизации. Однако эта методика применима лишь в тех случаях, когда движения в системе можно разделить на медленные и быстрые. Методы оценки полосы захвата систем, базирующиеся на применении частотных критериев развиты в работах Леонова Г. А., Корякина Ю.А. [28,29]. Предложенная методика позволяет анализировать системы произвольного порядка с практически произвольной формой характеристики фазового детектора. Вместе с тем оценки, получаемые в результате зачастую сильно занижены, что не может удовлетворить практические потребности разработчиков. С использованием метода точечных отображений анализируются динамические свойства систем в работах Белых В.Н., Максакова В.П., Лебедевой Л.В. Так в

работах [30-32] рассмотрены свойства цифровой СФС с характеристикой фазового детектора типа Sign. На основе качественного анализа фазовых траекторий получены оценки на область глобальной устойчивости этой системы. В работах [33,34] исследована динамика моделей дискретных СФС первого и второго порядков с синусоидальной характеристикой ФД. Однако при исследовании систем второго порядка авторы ограничились случаем нулевых начальных расстроек, что ограничивает практическую применимость полученных результатов. В работах Шахтарина Б.И. [35-38] для исследования непрерывных и дискретных СФС применяются квазигармонический и численный методы. Исследования проведены для произвольной характеристики фазового детектора. Вместе с тем, при аналитическом и качественном анализе рассмотрены движения только простейших типов. Это также ограничивает применимость полученных результатов.

В отличие от использованных в перечисленных работах методов, автором диссертации была предложена методика исследования дискретных СФС с линейным фильтром, позволяющая в ряде случаев получить точный или близкий к нему результат. В первую очередь это касается анализа области глобальной устойчивости. Методика ориентирована на исследование нелинейной динамики дискретных и цифровых систем с разрывными и гладкими нелинейностями и опирается на качественно-аналитические методы, основу которых составляет анализ структуры фазового пространства системы. Методика позволяет описать условия перехода вектора состояния системы из одной области фазового пространства в другую, характерные для данной структуры фазового пространства движения, и наконец позволяет получить условия существования различных движений, включая сложные. В ряде случаев применение методики позволило получить аналитические условия существования периодических и квазипериодических движений, что в конечном итоге позволило найти в пространстве параметров точные границы области глобальной устойчивости системы. Так в работах [39,40] предложен и развит простой алгоритм точного определения полосы захвата ДСФС второго порядка с пилообразной характеристикой детектора и линейным фильтром.

Относительно систем фазовой синхронизации с несколькими нелинейностями можно назвать ограниченное число работ. В основном все они касаются исследования дискретных СФС с торроидальным фазовым пространством либо исследования многокольцевых систем синхронизации. В работах Федосовой Т. С., Паушкиной Т. К. рассматриваются модели СФС с двумя периодическими нелинейностями [41-43]. Однако полученные в работах результаты следует считать достаточно ограниченными поскольку для описания дискретных систем использовались их непрерывные аналоги. В работах [44,45] Казакова Л.Н., Широкова Ю.В. рассмотрен ряд задач по исследованию синтезаторов на основе дискретных связанных колец фазовой синхронизации. Получены результаты, имеющие научное и практическое значение. Связанные системы описываются дискретными моделями с двумя нелинейностями и, следовательно, могут быть отнесены к классу дискретных систем с несколькими периодическими нелинейностями. Их принципиальной особенностью является наличие двух равноправных периодических координат (координаты являются аргументами периодических функций - это разность фаз на выходах фазовых детекторов каждого из колец). Это придает особенности и методам исследования подобных систем, основанных на качественно-аналитическом подходе. Можно говорить например о полной симметрии фазового пространства. В целом эти модели можно рассматривать как частный случай системы с периодическими нелинейностями.

Автор диссертации предложил и развил методику исследования дискретных систем с двумя нелинейностями для достаточно общего случая кусочно-линейных типов характеристик фильтра. В работе [46] методика, использовавшаяся при анализе систем с линейным фильтром и пилообразной характеристикой детектора была развита для случая СФС с двумя нелинейностями. В частности она позволила получить точные значения области глобальной устойчивости системы для случая ограничивающего пропорционально-интегрирующего фильтра.

В работах [47-49] рассмотрены свойства системы с синусоидальной характеристикой детектора и двумя различными типами нелинейности фильтра - ограничивающей и линейной со сбросом.

Диссертационная работа является обобщением полученных ранее результатов а также развитием методики исследований и применением ее к изучению дискретных систем синхронизации с двумя нелинейностями.

**Целью диссертационной работы** является исследование динамики дискретных систем фазовой синхронизации второго порядка с нелинейными фильтрами в цепи управления, включая изучение общих свойств систем с фильтрами различного типа, вопросы анализа периодических и квазипериодических движений, устойчивости в большом и целом состояния синхронизма.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решаются следующие задачи:

1) разработка обобщенной модели импульсных и цифровых систем фазовой синхронизации с различными типами фазовых детекторов и нелинейных фильтров в цепи управления;

2) разработка методики исследования периодических и квазипериодических движений в ДСФС с пилообразной характеристикой детектора с пилообразным и ограничивающим фильтром в цепи управления, включая вопросы устойчивости в большом и целом состояния синхронизма;

3) разработка методики исследования и анализ периодических и квазипериодических движений в ДСФС с синусоидальной характеристикой детектора с пилообразным и ограничивающим фильтром в цепи управления, включая вопросы устойчивости в большом и целом состояния синхронизма;

4) разработка методики исследования и анализ динамических свойств ДСФС с пилообразным и ограничивающим фильтром в цепи управления при наличии шумового входного воздействия, включая вопросы статистических характеристик периодических движений, состояния синхронизма, области устойчивости в целом;

5) компьютерное моделирование импульсных и цифровых систем фазовой синхронизации, исследование их динамических характеристик с учетом реального поведения отдельных узлов;

6) проведение экспериментальных исследований импульсной системы фазовой синхронизации с нелинейным астатическим фильтром и цифрового

синхронно-фазового демодулятора с квадратурным преобразователем на входе, проверка основных результатов теоретических исследований.

**Научная новизна и практическая значимость** диссертационной работы заключаются в разработке общей методики анализа дискретных систем фазовой синхронизации с различными типами нелинейных фильтров, в результатах исследования нелинейной динамики дискретных систем с ограничивающим и пилообразным фильтром в цепи управления для пилообразной и синусоидальной характеристик фазового детектора, включая результаты устойчивости в большом и целом состоянии синхронизма с учетом и без учета шумового воздействия на систему. Также они заключаются в методике и результатах компьютерного моделирования импульсной СФС с астатическим фильтром и цифрового синхронно-фазового модулятора с квадратурным аналого-цифровым преобразователем на входе. Полученные результаты имеют практическое значение для разработки и проектирования различных радиотехнических устройств на основе импульсных и цифровых систем фазовой синхронизации, в частности возбуждителей ЧМ-колебаний и разного рода синхронно-фазовых демодуляторов. Многочисленные графики и рисунки позволяют проводить оптимизацию и сравнительный анализ поведения систем с различными типами нелинейных фильтров для широкого диапазона изменения параметров.

**К числу основных результатов** диссертационной работы следует отнести:

- 1) обобщенные модели дискретных систем фазовой синхронизации с нелинейным фильтром в цепи управления;
- 2) методику нелинейного анализа и результаты исследования СФС с пилообразной характеристикой ФД и двумя типами нелинейности фильтра в цепи управления: ограничивающим и пилообразным;
- 3) методику нелинейного анализа и результаты исследования СФС с синусоидальной характеристикой ФД и двумя типами нелинейности фильтра в цепи управления: ограничивающим и пилообразным;
- 4) методику и результаты исследования статистических характеристик периодических движений, состояния синхронизма, области устойчивости в

целом ДСФС с синусоидальной характеристикой ФД и двумя типами нелинейности фильтра в цепи управления: ограничивающим и пилообразным;

5) области устойчивости в целом и полосу захвата ДСФС с различными типами детекторов и фильтров в цепи управления, полученные с помощью компьютерного моделирования;

6) результаты, полученные при компьютерном моделировании импульсных и цифровых систем фазовой синхронизации с нелинейными фильтрами;

7) динамические характеристики экспериментальных макетов возбудителя ЧМ-колебаний и цифрового синхронно-фазового демодулятора.

**Методы исследования.** Для решения перечисленных задач в диссертационной работе используются общие и прикладные методы качественной теории динамических систем и теории бифуркаций, методы анализа нелинейных разностных уравнений, теория точечных отображений, моделирование на ЭВМ.

**Структура диссертационной работы** состоит из четырех глав, введения и заключения.

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована актуальность, сформулированы цель, основные задачи и методы исследования, дана общая характеристика рассматриваемых систем, кратко изложено содержание работы.

В первой главе получены и проанализированы модели импульсных и цифровых СФС второго порядка с нелинейными фильтрами в цепи управления различного типа. В качестве нелинейных фильтров рассмотрены пропорционально-интегрирующий фильтр с ограничивающей и пилообразной нелинейностью и интегратор с форсированием также с ограничивающей и пилообразной нелинейностью. Показано, что при соответствующих допущениях, все рассмотренные модели имеют общий вид. Это позволяет в дальнейшем исследовать свести исследование к изучению обобщенной СФС с двумя нелинейностями.

Во второй главе предложена методика и выполнены исследования дискретной СФС с пилообразной характеристикой фазового детектора и различными типами фильтра в цепи управления. Исследование проведено в два

этапа. На первом, на основе предложенной методики, исследуется нелинейная динамика системы с линейным пропорционально-интегрирующим фильтром и интегратором с форсированием. На основе анализа структуры фазового пространства возможные в системе периодические движения, рассмотрены их основные бифуркации, получены точные значения областей устойчивости в целом состояния синхронизма и графики полосы захвата.

На втором этапе, на основе свойств системы с линейным фильтром, исследовано поведение систем с нелинейным фильтром: пилообразным и ограничивающим. Найдены области параметров системы, где нелинейные свойства фильтра не оказывают влияния на работу системы. Для каждого типа нелинейности фильтра изучено ее влияние на области существования и бифуркации предельных циклов. На основе полученных результатов построены области глобальной устойчивости СФС. Проведен сравнительный анализ характеристик систем с различными типами нелинейности фильтра.

В третьей главе предложена методика и выполнены исследования дискретной СФС с синусоидальной характеристикой фазового детектора и различными типами фильтра в цепи управления. Исследование также проведено в два этапа. На первом этапе проанализировано поведение систем с линейным пропорционально-интегрирующим фильтром и интегратором с форсированием. Исследованы возможные в системе типы периодических движений и притягивающих инвариантных множеств, изучена структура фазового пространства, соответствующая их возникновению. В пространстве параметров получены области существования основных предельных циклов, изучены их основные бифуркации. На основе проведенного анализа получены точные значения границ областей глобальной устойчивости и графики полосы захвата.

На втором этапе, на основе результатов исследования систем с линейным фильтром, рассмотрены свойства ДСФС с нелинейным фильтром: пилообразным и ограничивающим. Изучено влияние нелинейных свойств фильтра на динамические характеристики системы, включая структуру фазового пространства, основные бифуркации периодических движений и их области существования. Получены аналитические оценки на области

существования движений определенного типа. На основе полученных результатов проанализировано влияние параметров второй нелинейности на области глобальной устойчивости и полосы захвата. Проведен сравнительный анализ характеристик систем с различными типами нелинейности фильтра.

В четвертой главе на основе компьютерного моделирования проведены исследования динамических характеристик, области устойчивости в целом и полосы захвата импульсной СФС с астатическим ограничивающим фильтром в цепи управления и цифрового синхронно-фазового демодулятора с квадратурным аналого-цифровым преобразователем на входе и с нелинейным (ограничивающим и пилообразным) фильтром в цепи управления. Использование для этих целей моделирующего алгоритма позволило уточнить построенные ранее модели и получить результаты, учитывающие целый ряд дополнительных факторов. Для импульсных систем это прежде всего переменный интервал дискретизации, отличие реального фазового детектора выборка-запоминание от экстраполятора нулевого порядка. Для цифровых систем - это конечность разрядной сетки узлов системы. На базе двух экспериментальных макетов: импульсной СФС с интегратором в цепи управления и цифрового синхронно-фазового демодулятора проверены основные результаты, полученные при анализе математических и компьютерных моделей. Проведено исследование динамических характеристик, областей устойчивости в целом, полосы захвата. Сравнительный анализ подтвердил совпадение основных результатов теоретических и экспериментальных исследований.

В заключении приведены основные результаты и выводы по диссертационной работе.



# 1. Математические модели дискретных СФС с двумя нелинейностями

## 1.1. Постановка задачи

Основной целью главы является построение единой обобщенной модели разных по классу дискретных (импульсных и цифровых) систем фазовой синхронизации второго порядка с нелинейным фильтром в цепи управления. Задача связана с описанием систем не по технологическому признаку а по типу функций, описывающих нелинейные узлы. Вид характеристик нелинейных фильтров, рассматриваемых в диссертации приведен на рис. 1.1.

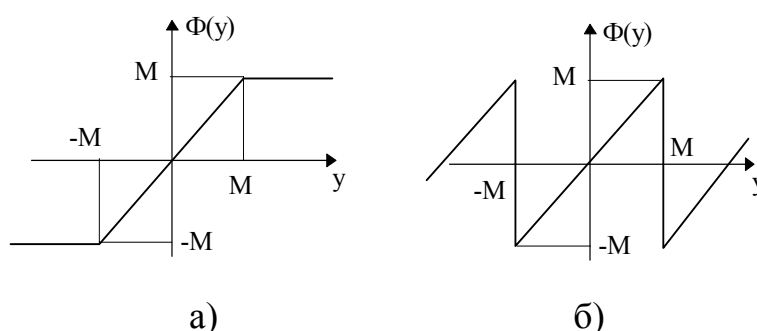


Рис. 1.1.

Рассматриваются следующие классы широко используемых на практике систем фазовой синхронизации:

1) цифровые системы фазовой синхронизации с многоуровневым аналого-цифровым преобразователем фазы или многоуровневым аналого-цифровым квадратурным преобразователем входного сигнала;

2) импульсные системы фазовой синхронизации с детектором «выборка-запоминание» и нелинейным аналоговым фильтром в цепи управления;

3) импульсно-цифровые системы фазовой синхронизации с нелинейным цифровым каналом в цепи управления.

В главе будет показано, что обобщенная математическая модель имеет вид отображения второго порядка

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha F(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = g - \Phi(M, d(g - x_n) + \beta F(\varphi_n)) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

где  $\varphi_n$  - разность фаз сигналов на входах фазового детектора в момент времени  $n$ ;  $x_n$  - нормированная разность частот входного сигнала и ПГ в момент времени  $n$ ;  $F(\varphi)$  - характеристика фазового детектора;  $\Phi(y)$  - характеристика нелинейности фильтра;  $M$  - максимальное значение  $\Phi(y)$ ;  $\alpha, \beta, d$  - параметры системы;  $g$  - нормированная начальная расстройка.

Наличие единой модели позволит в дальнейшем разрабатывать и соответственно применять общие для различных по классу систем методики и алгоритмы исследования, основанные на единых качественно-аналитических подходах.

Получим эту модель и определим основные условия, ограничивающие применение обобщенной модели для описания конкретных систем.

## 1.2. Математическая модель цифровой СФС

Получим математические модели ЦСФС с нелинейным фильтром в цепи управления. Для этого рассмотрим ряд важных с практической точки зрения систем с аналого-цифровым преобразователем до петли:

- ЦСФС с квантованием фазы входного сигнала;
- ЦСФС с квантованием квадратурных составляющих входного сигнала;
- ЦСФС с квантованием мгновенных значений входной смеси.

При моделировании не будем учитывать конечность разрядной сетки цифровых узлов. Эффекты, связанные с конечной разрядностью и ее влиянием на работу системы, будут рассмотрены в четвертой главе, посвященной компьютерному моделированию и экспериментальным исследованиям. Сведем все вышеперечисленные типы ЦСФС к некоторой эквивалентной функциональной схеме, для которой и проведем моделирование.

1. На рис. 1.2 приведена структурная схема ЦСФС с квантованием фазы входного сигнала, состоящая из следующих узлов: ДЦФ - дискретный цифровой фазометр, в задачу которого входит формирование кода фазы входного сигнала; ФП - функциональный преобразователь, обеспечивающий

необходимое качество демодуляции сигнала; ЦФ - цифровой сглаживающий фильтр; НС - накапливающий сумматор, формирующий код выходной фазы системы. При измерении фазы входного сигнала в цифровом фазометре возникает известная ошибка, связанная с измерением разности фаз двух импульсных последовательностей. Далее будем считать, что цифровой фазометр идеален.

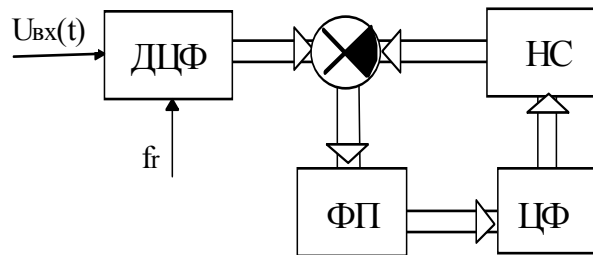


Рис. 1.2. Структурная схема ЦСФС с квантованием фазы входного сигнала.

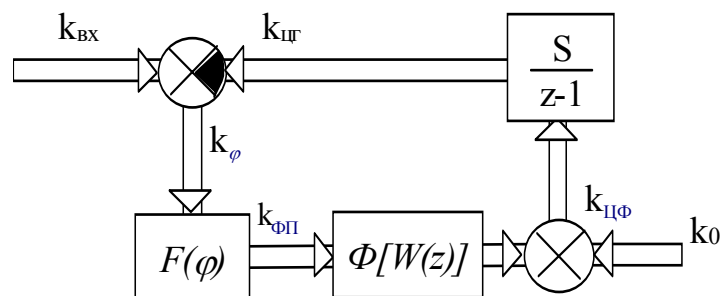


Рис. 1.3. Эквивалентная функциональная схема цифровой части ЦСФС с АЦП до петли системы.

Эквивалентная функциональная схема цифровой части данной системы представлена на рис. 1.3. Код фазы входного сигнала  $k_{вх}$  и код фазы цифрового генератора  $k_{цг}$  поступают на вычитатель, где формируется код ошибки  $k_{ф}$ . Периодическая функция  $F(\varphi)$  моделирует характеристику функционального преобразователя. Нелинейные свойства фильтра описываются функцией  $\Phi[W(z)]$ , где  $W(z)$  коэффициент передачи линейного аналога фильтра. Неполный накапливающий сумматор представлен звеном с коэффициентом

передачи  $\left(\frac{1}{z-1}\right)$  и выполняет роль цифрового генератора.

Дополнительный код  $k_0$  моделирует значение частоты цифрового генератора при разомкнутом кольце (учитывает тактовую частоту системы  $f_r$ ).

2. Структурная схема ЦСФС с квантованием квадратурных составляющих представлена на рис. 1.4.

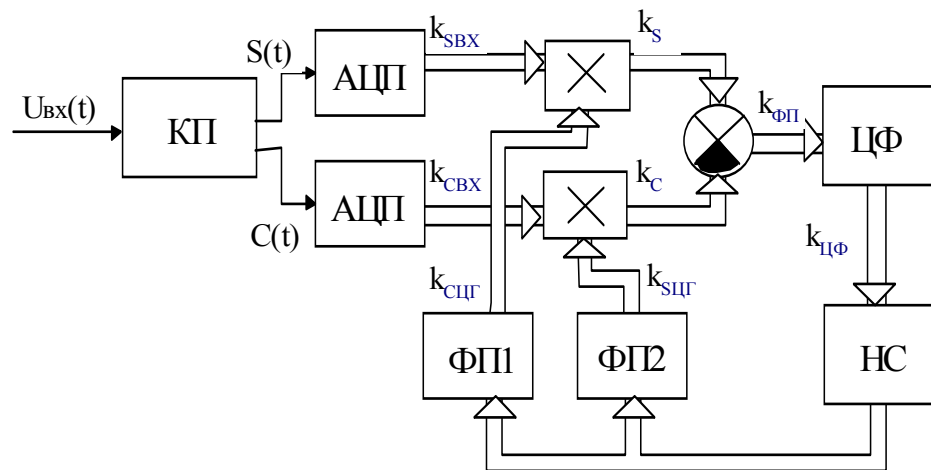


Рис. 1.4. Структурная схема ЦСФС с квантованием квадратурных составляющих.

Приняты следующие обозначения: КП - квадратурный преобразователь; АЦП - аналого-цифровой преобразователь; ФП1, ФП2 - функциональные преобразователи синфазного и квадратурного каналов. Будем считать, что квадратурный преобразователь идеален, т.е. синфазный и квадратурный каналы идентичны. Покажем, что и в этом случае эквивалентная функциональная схема цифровой части данной системы совпадает с системой показанной на рис. 1.3. Коды в каналах на входах и выходах перемножителей в момент времени  $n$  соответственно запишутся как:

$$k_{CBX}[n] = U_{BX} \cos(\varphi_{BX}[n]),$$

$$k_{SBX}[n] = U_{BX} \sin(\varphi_{BX}[n]),$$

$$k_{ЦГ}[n] = U_{ЦГ} \cos(2\pi k_{\varphi_{HC}}[n] / k_{HC2\pi}) = U_{ЦГ} \cos(\varphi_{ЦГ}[n]),$$

$$k_{сЦГ}[n] = U_{ЦГ} \sin(2\pi k_{\varphi_{HC}}[n] / k_{HC2\pi}) = U_{ЦГ} \sin(\varphi_{ЦГ}[n]),$$

$$k_C[n] = U_{BX} U_{ЦГ} \cos(\varphi_{BX}[n]) \sin(\varphi_{ЦГ}[n]),$$

$$k_S[n] = U_{BX} U_{ЦГ} \sin(\varphi_{BX}[n]) \cos(\varphi_{ЦГ}[n]),$$

где  $U_{BX}$  - нормированная амплитуда входного сигнала,  $U_{ЦГ}$  - амплитуда сигнала цифрового генератора,  $\varphi_{BX}[n]$ ,  $\varphi_{ЦГ}[n]$  - фазы входного сигнала и сигнала ЦГ,  $k_{HC2\pi}$  - код с выхода НС, соответствующий фазе  $2\pi$ .

Соответственно код фазовой ошибки можно представить в виде

$$k_{\varphi П}[n] = k_S[n] - k_C[n] = U_{BX} U_{ЦГ} \sin(\varphi_{BX}[n] - \varphi_{ЦГ}[n]). \quad (1.2.1)$$

Исключив из рассмотрения АЦП и квадратурный преобразователь, учитывая идентичность каналов и (1.2.1), приходим к эквивалентной функциональной схеме цифровой части системы, приведенной на рис. 1.3. Код  $k_{\varphi П}[n]$  будет соответствовать коду на выходе ФП, соответственно  $F(\varphi) = \sin(\varphi)$ .

3. В системах с квантованием мгновенных значений входной смеси (рис. 1.5) в кольце присутствует суммарная составляющая на частоте  $\omega_{ex} + \omega_{n2}$ . Таким образом, схема на рис. 1.3 также может служить моделью рассматриваемой системы, но при условии, что цифровой фильтр достаточно эффективно подавляет суммарную составляющую.

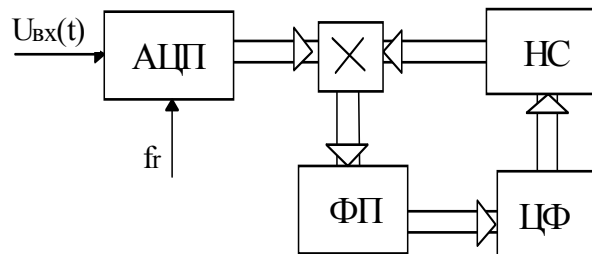


Рис. 1.5. Структурная схема ЦФС с квантованием мгновенных значений входной смеси.

Характерным для цифровых фильтров является применение в них звеньев, содержащих накапливающие сумматоры (НС). Данные звенья являются сугубо нелинейными. Типичными функциями, описывающими нелинейные свойства НС являются либо пилообразная, либо линейная с насыщением функция. Получим математическую модель цифровой СФС с нелинейным НС в цепи управления. Будем считать, что цифровой фильтр состоит из линейного пропорционального канала и нелинейного интегрирующего канала, как это показано на рис. 1.6. Функция  $\Phi\left(\frac{I}{z-d}\right)$  описывает работу нелинейного канала, где  $\frac{I}{z-d}$  коэффициент передачи его линейного аналога. При  $d$  равном единице это будет нелинейный интегратор, при  $d < 1$  - нелинейный пропорционально-интегрирующий фильтр.

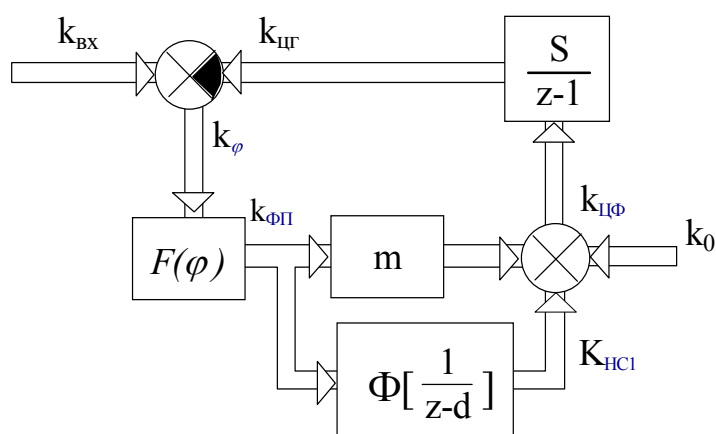


Рис. 1.6. Функциональная схема цифровой части ЦСФС второго порядка с нелинейным интегратором в цепи управления.

Код разности фаз на выходе вычитателя в момент времени  $n+1$  равен

$$k_{\varphi}[n+1] = k_{\varphi}[n] + \Delta k_{BX}[n] - \Delta k_{ЦГ}[n], \quad (1.2.2)$$

где  $k_{\varphi}[n] = k_{BX}[n] - k_{ЦГ}[n]$ ,  $k_{BX}[n]$ ,  $k_{ЦГ}[n]$  - коды фазы соответственно на входе системы и на выходе ЦГ в момент времени  $n$ ;  $\Delta k_{BX}[n]$ ,  $\Delta k_{ЦГ}[n]$  -

приращения кодов за системный такт. Код приращения выходной фазы можно представить в виде

$$\Delta k_{ЦГ}[n] = S k_{ЦФ}[n], \quad (1.2.3)$$

где:  $S$  - нормировочный коэффициент ЦГ.

В свою очередь  $k_{ЦФ}[n]$  можно выразить через разность фаз  $\varphi[n]$  входного сигнала и сигнала ЦГ в момент времени  $n$

$$k_{ЦФ}[n] = m S_{ФП} F(\varphi[n]) + k_{НК}[n] + k_0, \quad (1.2.4)$$

где

$$\varphi[n] = 2\pi k_\varphi[n] / k_{2\pi}, \quad (1.2.5)$$

$k_0$  - константа, моделирующая частоту цифрового генератора при разомкнутом кольце;  $k_{2\pi}$  - код соответствующей приращению фазы  $2\pi$ ,  $F(\varphi)$  - нормированная функция преобразования ФП,  $S_{ФП}$  - максимальный код на выходе ФП;  $m$  - коэффициент передачи пропорционального канала.  $k_{НК}[n]$  - код на выходе нелинейного канала.

Учитывая нелинейные цифрового фильтра, можно записать:

$$k_{НК}[n] = \Phi(M_f, dk_{НК}[n-1] + S_{ФП} F(\varphi[n-1])), \quad (1.2.6)$$

где  $M_f$  - максимальный код на выходе нелинейного канала.

Объединяя (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4), (1.2.6), получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} k_\varphi[n+1] = k_\varphi[n] + \Delta k_{BX}[n] - \\ \quad - S(m S_{ФП} F(\varphi[n]) + k_{НК}[n] + k_0) \\ k_{НК}[n+1] = \Phi(M_f, dk_{НК}[n] + S_{ФП} F(\varphi[n])) \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Можно показать, что для рассматриваемых типов нелинейностей фильтра справедливы выражения для умножения  $\Phi(y)$  на константу  $a$ :

$$a\Phi(M, x) = a\Phi(M, y/a) = \Phi(aM, y); \quad ax = y.$$

Используя (1.2.5), перейдем в (1.2.7) от  $k_\varphi[n]$  к фазовой переменной  $\varphi[n]$ , для этого умножим (1.2.7) на величину  $2\pi/k_{2\pi}$ . В итоге получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi[n+1] = \varphi[n] + \\ + \frac{2\pi}{k_{2\pi}} (\Delta k_{BX}[n] - S(mS_{\Phi\Pi}F(\varphi[n]) + k_{HK}[n] + k_0)) \\ \frac{2\pi k_{HK}[n+1]}{k_{2\pi}} = \Phi\left(\frac{2\pi M_f}{k_{2\pi}}, \frac{2\pi dk_{HK}[n]}{k_{2\pi}} + \frac{2\pi S_{\Phi\Pi}F(\varphi[n])}{k_{2\pi}}\right), \end{array} \right. \quad (1.2.8)$$

где  $\Phi(y)$  пронормирована на  $2\pi/k_{2\pi}$ .

Сделаем замену

$$x[n] = \frac{2\pi}{k_{2\pi}} (\Delta k_{BX}[n] - S(k_{HK}[n] + k_0)) . \quad (1.2.9)$$

и сведем систему (1.2.8) к виду (1.1.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi[n+1] = \varphi[n] - \alpha F(\varphi[n]) + x[n] \\ x[n+1] = g - \Phi(M, d(g - x[n]) + \beta F(\varphi[n])), \end{array} \right.$$

где  $\alpha = 2\pi m S S_{\Phi\Pi} / k_{2\pi}$  ,  $\beta = 2\pi S S_{\Phi\Pi} / k_{2\pi}$  ,  $g = 2\pi (\Delta k_{BX}[n] - S k_0) / k_{2\pi}$  ,  $M$  - максимальное значение  $\Phi(y)$ ,  $M = 2\pi S M_f / k_{2\pi}$

Таким образом, получена математическая модель цифровой части достаточно большого класса ЦСФС второго порядка с нелинейным интегратором в цепи управления и АЦП до петли системы. Показано, что без учета конечности разрядной сетки узлов, эта модель совпадает с системой (1.1.1).

### 1.3. Математическая модель импульсной СФС

Рассмотрим структурную схему импульсной СФС (ИСФС) представленную на рис. 1.7. Будем считать, что фильтр нижних частот является нелинейным узлом. Для построения математической модели, сделаем следующие допущения о свойствах узлов системы:

1. фазовый детектор выполнен по схеме «выборка-запоминание» и представляет собой последовательно включенные дискретизатор, нелинейный



преобразователь с характеристикой  $F(\varphi)$ , экстраполятор нулевого порядка, коэффициент передачи которого в  $p$ -плоскости имеет вид

$$K_{\varepsilon 0}(p) = \frac{1 - \exp(-p T_p)}{p},$$

где  $T_p$  - период дискретизации;

2. характеристика управления перестраиваемого генератора ПГ  $\omega_{ПГ}(u)$  линейна на рабочем участке и имеет крутизну  $S_y$ ;

3. период дискретизации в системе постоянен ( $T_p = \text{const}$ );

4. ФНЧ представляет собой параллельное соединение линейного звена с коэффициентом передачи  $K(p)$  и нелинейного звена, характеристика которого описывается функцией  $\Phi(y)$ .

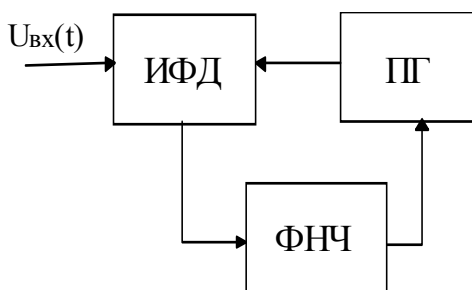


Рис. 1.7. Структурная схема ИФС.

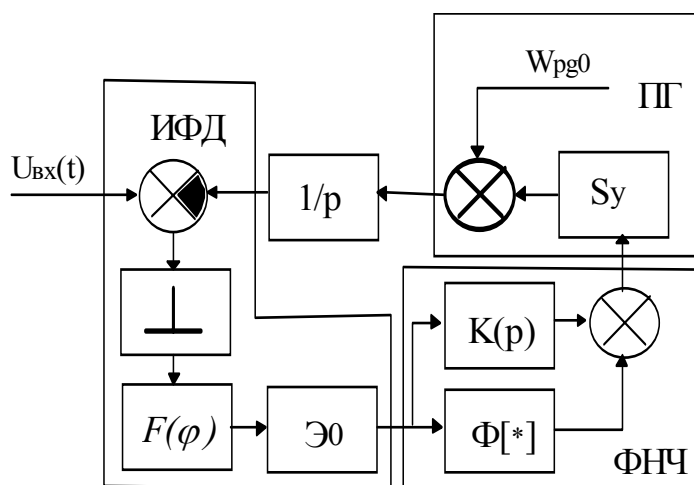


Рис. 1.8. Функциональная схема ИФС с нелинейным фильтром в цепи управления.

Функциональная схема рассматриваемой системы представлена на рис. 1.8. Математическая модель данной системы может быть представлена в виде [14]

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega_y T_p \sum_{j=0}^n W[n-j] F(\varphi_n) + \gamma_H + S_y \int_{nT_p}^{(n+1)T_p} y(\tau) d\tau \\ y_{n+1} = \Phi(F(\varphi_n), F(\varphi_{n-1}), \dots, y_n, y_{n-1}, \dots) \end{cases},$$

где  $W[n]$  - дискретный аналог импульсной характеристики линейного канала,  $y(t)$  - напряжение на выходе нелинейного канала, определяемое видом функции  $\Phi(y)$ .

Возьмем в качестве нелинейного канала ФНЧ нелинейное астатическое звено (интегратор с насыщением) [50,51]. Коэффициент передачи его линейного аналога  $K(p)=1/(T_f p)$ . Вид функции  $\Phi(M,y)$ , описывающей нелинейные свойства фильтра, приведен на рис. 1.1а. Данная нелинейность является типичной для активных фильтров, реализованных на операционных усилителях. В качестве линейного звена будем рассматривать звено нулевого порядка (пропорциональный канал) с коэффициентом усиления  $m$ . Такой выбор обусловлен тем, что системы с фильтрами этого типа получили широкое распространение на практике.

При построении математической модели вначале будем полагать, что нелинейность  $\Phi(y)$  может срабатывать в произвольные моменты времени, не кратные системному такту  $T_p$ .

Запишем разность фаз на входах фазового детектора для момента времени  $t=nT_p$

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \omega_{ex} T_p - \omega_{n20} T_p - \Delta\varphi_n, \quad (1.3.1)$$

где  $\Delta\varphi_n$  - приращение фазы ПГ за время  $T_p$ . Его можно вычислить из выражения

$$\Delta\varphi_n = \int_{(n-1)T_p}^{nT_p} \Delta\omega(t) dt, \quad (1.3.2)$$

где  $\Delta\omega(t)$  - приращение частоты ПГ, обусловленное каналом управления. Значение  $\Delta\omega(t)$  выражается через управляющее напряжение  $u_y(t)$  следующим образом

$$\Delta\omega(t) = S_y u_y(t). \quad (1.3.3)$$

Напряжение  $u_y(t)$  для  $t \in [nT_p, (n+1)T_p]$  можно представить в следующем виде

$$u_y(t) = y(t - nT_p, y(nT_p)) + mEF(\varphi_n), \quad (1.3.4)$$

где  $y(t)$  - напряжение с выхода нелинейного канала фильтра нижних частот,  $E$  - максимальное напряжение с выхода фазового детектора,  $mEF(\varphi_n)$  - напряжение с выхода линейного канала.

На интервале  $t \in [nT_p, (n+1)T_p]$  напряжение на выходе нелинейного канала можно записать в виде:

$$y(t) = \Phi(M_f, y_n + (t - nT_p)EF(\varphi_n) / T_f), \quad (1.3.5)$$

где  $y_n$  - напряжение с выхода нелинейного интегратора в момент времени  $t = nT_p$ .

Из (1.3.5) следует, что нелинейность  $\Phi(y)$  может сработать в произвольные моменты времени. Т.к. с другой стороны значение  $F(\varphi_n)$  постоянно на периоде системного такта, выход из ограничения происходит только в моменты времени кратные периоду дискретизации системы  $t = nT_p$ .

Введем время  $T_p^* \in [0, T_p]$ , равное части периода  $T_p$ , на которой не происходит ограничения выходного сигнала  $y(t)$ . При  $T_p^* = T_p$  нелинейного ограничения на периоде не происходит. При  $T_p^* = 0$  фильтр на протяжении всего периода находится в насыщении. Учитывая (1.3.3), (1.3.4), (1.3.5) возьмем интеграл (1.3.2) и найдем приращение фазы ПГ за системный такт в зависимости от  $y_n$  и  $F(\varphi_n)$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{n+1} = & S_y T_p mF(\varphi_n) + S_y T_p^* y_n + \\ & + \frac{S_y T_p^{*2} EF(\varphi_n)}{2T_f} + S_y M(T_p - T_p^*). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Объединим (1.3.5), (1.3.6) в систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_H T_p - S_y T_p m E F(\varphi_n) - S_y T_p^* y_n - \\ \quad - \frac{S_y T_p^{*2} E F(\varphi_n)}{2 T_f} - S_y M(T_p - T_p^*) \\ y_{n+1} = \Phi(M_f, y_n + T_p E F(\varphi_n) / T_f). \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Система (1.3.7) точно описывает поведение системы на всех этапах ее работы и будет позднее использована для построения моделирующего алгоритма. Из нее, в частности, следует, что при итерациях с ограничением и итерациях без ограничения коэффициент усиления системы по постоянному току и относительная начальная расстройка различны.

Положим далее, что величина  $\frac{S_y T_p^2 \pi}{2 T_f} \ll 1$ . Это эквивалентно утверждению,

что изменение выходного напряжения интегратора за время системного дискрета пренебрежимо мало. Такая ситуация является достаточно распространенной в технике СФС. В этом случае появляется возможность выделить в системе быстрые и медленные движения, что в свою очередь позволяет положить для простоты, что нелинейность  $\Phi(y)$  срабатывает только в моменты, кратные системному дискрету  $t = n T_p$ . Учитывая сделанные предположения, перейдем к единой системе уравнений, заменив в (1.3.7)  $T_p^*$  на  $T_p$

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_H T_p - S_y T_p E \left( m + \frac{T_p}{2 T_f} \right) F(\varphi_n) - S_y T_p y_n \\ y_{n+1} = \Phi(M_f, y_n + T_p E F(\varphi_n) / T_f). \end{cases}$$

Сделаем далее замену переменных

$$x_n = T_p \omega_H - S_y T_p y_n \quad (1.3.8)$$

и получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - S_y T_p E(m + \frac{T_p}{2 T_f}) F(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = \omega_H T_p - S_y T_p \Phi\left(M_f, \frac{\omega_H T_p - x_n}{S_y T_p} + T_p E F(\varphi_n) / T_f\right) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha F(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = g - \Phi(M, g - x_n + \beta F(\varphi_n)), \end{cases}$$

где  $\alpha = ES_y T_p (m + \frac{T_p}{2 T_f})$ ,  $\beta = \frac{ES_y T_p^2}{T_f}$ ,  $g = T_p \omega_H$ . Функция  $\Phi(M, y)$

пронормирована на  $S_y T_p$ , вследствие этого  $M = T_p S_y M_f$  - максимальное значение нормированной функции  $\Phi(M, y)$ .

При моделировании данной системы были сделаны допущения на параметры и характер работы системы, при которых ее математическая модель сводится к общему виду (1.1.1). Следует сказать, что с точки зрения общности учет этих допущений в обобщенной модели нецелесообразен. С другой стороны, в ряде случаев требования практического использования конкретных устройств вынуждают провести уточнение общей модели. Применительно к импульсным системам появляется необходимость учета непостоянства интервала дискретизации (на практике часто используемый режим), произвольного времени срабатывания нелинейности фильтра и т.д. Влияние этих факторов на поведение системы будет изучено в разделе, посвященном компьютерному моделированию.

#### 1.4. Математическая модель импульсно-цифровой СФС

В импульсно цифровых системах цепь управления состоит из аналогового и цифрового каналов (рис. 1.9). В цифровом канале сигнал ошибки с выхода ФД поступает на АЦП, далее осуществляется его обработка в цифровом

фильтре и преобразование в напряжение, которое поступает на вход ПГ. Системы подобного типа получили широкое распространение [51-53].

Положим, что аналоговый канал является линейным. Покажем, что в этом случае математическая модель такой системы может быть также представлена в виде (1.1.1). Поведение системы описывается системой уравнений [14]

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega_y T_p \sum_{j=0}^n W[n-j] F(\varphi_n) + \gamma_H + S_g T_p y_n \\ y_{n+1} = \Phi(F(\varphi_n), F(\varphi_{n-1}), \dots, y_n, y_{n-1} \dots), \end{cases}$$

где  $W[n]$  - дискретный аналог импульсной характеристики аналогового канала,  $\Phi(y)$  - нелинейный функционал описывающий работу цифрового канала.

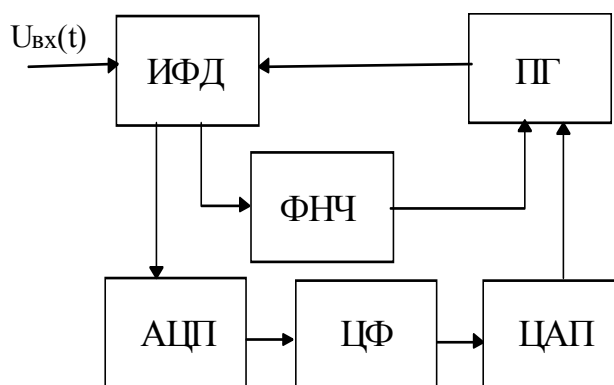


Рис. 1.9. Структурная схема импульсно-цифровой СФС.

Получим математическую модель. Для этого сделаем допущения о свойствах системы, аналогичные допущениям, сделанным при моделировании импульсной системы. В качестве линейного аналогового канала будем рассматривать звено нулевого порядка с коэффициентом усиления  $m$ . В качестве цифрового - нелинейный интегрирующий канал. Функциональная схема этой системы представлена на рис. 1.10. Конечную разрядность сетки цифровой части учитывать не будем.

По аналогии с (1.3.1) запишем разность фаз на выходе ФД в момент времени  $t=nT_p$ :

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \omega_{\text{вх}} T_p - \omega_{n20} T_p - \Delta\varphi_n, \quad (1.4.1)$$

где  $\Delta\varphi_n$  - приращение фазы ПГ за время  $T_p$ .

$$\Delta\varphi_n = \int_{(n-1)T_p}^{nT_p} \Delta\omega(t) dt,$$

где  $\Delta\omega(t)$  - приращение частоты ПГ, обусловленное каналом управления. Значение  $\Delta\omega(t)$  выражается через управляющее напряжение  $u_y(t)$  следующим образом  $\Delta\omega(t) = S_y u_y(t)$ .

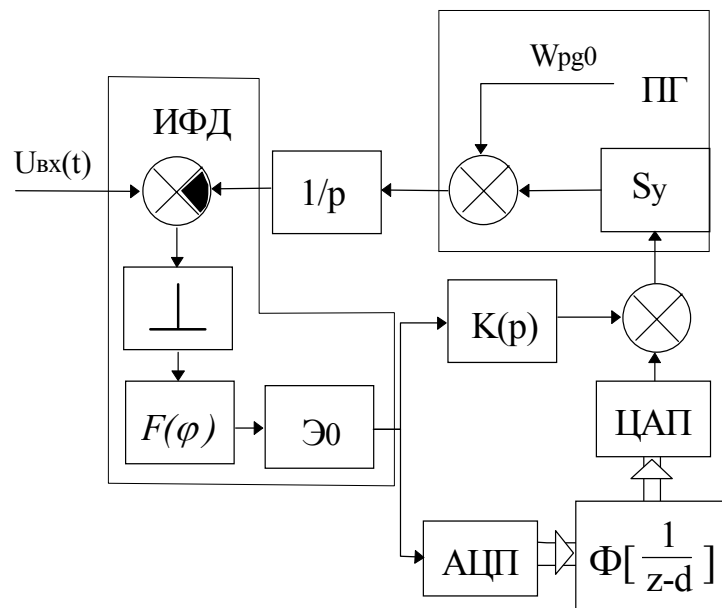


Рис. 1.10. Функциональная схема импульсно-цифровой СФС с нелинейным цифровым каналом в цепи управления.

Как уже говорилось, напряжение  $u_y(t)$  для  $t \in [nT_p, (n+1)T_p]$  можно представить в виде  $u_y(t) = r_{\text{вых}} y_n + mEF(\varphi_n)$ , где  $y_n$  - код на выходе цифрового канала в момент времени  $n$ ,  $r_{\text{вых}}$  - вес разряда ЦАП,  $E$  - максимальное напряжение с выхода фазового детектора,  $mEF(\varphi)$  - напряжение с выхода линейного пропорционального канала.

Значение  $y_{n+1}$  через  $y_n$  и  $F(\varphi_n)$  определяется как

$$y_{n+1} = \Phi \left( M_f, dy_n + \frac{EF(\varphi_n)}{r_{ex}} \right), \quad (1.4.2)$$

где  $r_{ex}$  - вес разряда входного АЦП,  $M_f$  - максимальный код на выходе цифрового канала.

С учетом этого выражение для  $\Delta\varphi_{n+1}$  будет иметь вид

$$\Delta\varphi_{n+1} = S_y T_p Em F(\varphi_n) + S_y T_p r_{вых} y_n. \quad (1.4.3)$$

Объединим (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3) и получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n + T_p \omega_H - S_y T_p Em F(\varphi_n) - S_y T_p r_{вых} y_n \\ y_{n+1} = \Phi \left( M_f, dy_n + \frac{EF(\varphi_n)}{r_{ex}} \right). \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Сделаем замену переменных  $x_n = T_p \omega_H - S_y T_p r_{вых} y_n$ , с учетом этого (1.4.4) примет вид

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha F(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = g - \Phi \left( M, d^* (g - x_n) + \beta F(\varphi_n) \right), \end{cases}$$

где:  $\alpha = S_y T_p Em$ ,  $\beta = S_y T_p Er_{вых} / r_{ex}$ ,  $d^* = r_{вых} d$ ,  $g = T_p \omega_H$ . Функция  $\Phi(y)$  пронормирована на  $S_y T_p r_{вых}$ , вследствие этого  $M = S_y T_p r_{вых} M_f$  - максимальное значение нормированной функции  $\Phi(M, y)$

Таким образом и для импульсно-цифровой системы второго порядка с нелинейным цифровым каналом математическая модель описывается системой уравнений вида (1.1.1).

Наличие единой модели позволяет применить к исследованию различных физических объектов единую методику и алгоритмы анализа, а также представить результаты исследований в общей для всех систем форме. С другой стороны, для каждой конкретной ДСФС параметры обобщенной модели  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g$ ,  $M$  связаны между собой через параметры узлов системы. Для различных систем эти связи различны. Т.е. методика исследований обобщенной модели и форма представления результатов должны быть выбраны таким образом, чтобы



полученные данные были легко переводимы в параметры каждого конкретного физического объекта, прежде всего нормированные ( $D$ -коэффициент усиления,  $\gamma_H$  - относительная начальная расстройка и т.д.).

Для решения этой задачи все исследования обобщенной модели (1.1.1) целесообразно проводить в области параметров  $(\alpha, \beta)$  при фиксированных значениях  $M, g$ . В пользу этого выбора можно привести следующие аргументы:

1. Фазовым пространством обобщенной модели является ограниченный по координате  $x$  цилиндр. Несложно видеть, что верхняя и нижняя его границы определяются как  $x_{max}=M+g$ ,  $x_{min}=-M+g$ . Т.е. при фиксированных  $M, g$  границы фазового пространства остаются неизменными. Это в свою очередь позволяет существенно повысить роль а вместе с тем и эффективность аналитических исследований. И что очень важно, эти границы могут оставаться постоянными при изменении коэффициента усиления в кольце по постоянному току.

2. При фиксированном  $M$  для каждого конкретного типа ДСФС значения  $\alpha$  и  $\beta$  могут выбираться произвольно за счет изменения параметров системы. В самом деле, параметры  $\alpha, \beta$  во всех случаях пропорциональны максимальному напряжению (коду) с выхода фазового детектора, а отношение  $\alpha/\beta$  во всех случаях зависит от параметров фильтра, таких как  $m$  или  $d$ . Значение  $M$  от вышеперечисленных параметров не зависит.

3. Плоскость параметров  $(\alpha, \beta)$  является общепринятой при анализе дискретных систем второго порядка с линейным фильтром. Т.е. представление результатов исследований в этой плоскости позволит провести сравнительный анализ результатов исследования системы с нелинейным и линейным фильтром.

С практической точки зрения интерес представляет представление результатов исследований в пространствах обобщенных параметров -  $(D, \gamma_H)$ ,  $(D, \omega_H T_p)$  для импульсных систем,  $(S_C, \gamma_H)$  для цифровых систем, где  $D$  - коэффициент усиления системы по постоянному току,  $S_C$  - обобщенный коэффициент усиления в кольце ЦСФС,  $\gamma_H$  - относительная начальная расстройка,  $T_p$  - период дискретизации.

Обратимся к физическому смыслу  $M$ . Несложно видеть что для всех типов рассмотренных ДСФС  $M$  равно максимально возможному приращению фазы ПГ за системный дискрет, обусловленному нелинейным каналом цепи управления. В этом отношении  $M$  можно рассматривать как аналог нормированной полосы удержания для интегрирующего канала.

С другой стороны максимальную расстройку перестраиваемого по частоте генератора, можно представить следующим образом:

$$f_{MAX} = \frac{f_0}{2\pi} M, \quad (1.4.5)$$

где  $f_0$  частота дискретизации (тактовая частота системы). Отсюда физический смысл  $M$  можно определить также как нормированное отношение полосы перестройки генератора за счет интегрирующего канала к частоте дискретизации системы (тактовой частоте).

## 1.5. Выводы

1. В главе получена обобщенная математическая модель ДСФС с нелинейным фильтром, представляющая собой систему двух нелинейных разностных уравнений в координатах  $\varphi$  -разность фаз,  $x$  - нормированная текущая частотная расстройка.

2. Показано, что математические модели целого ряда цифровых систем с АЦП до петли без учета конечности разрядной сетки сводятся к обобщенной математической модели (1.1.1). К их числу относятся:

- ЦСФС с квантованием фазы входного сигнала;
- ЦСФС с квантованием квадратурных составляющих входного сигнала;
- ЦСФС с квантованием мгновенных значений входной смеси.

3. Показано, что математическая модель импульсной СФС с нелинейным интегратором в цепи управления при определенных допущениях сводится к (1.1.1). К числу основных допущений относятся:

- период дискретизации в системе постоянен ( $T_p$  - const);
- нелинейность фильтра  $\Phi(y)$  срабатывает в моменты времени, кратные системному такту.

4. Показано, что математические модели импульсно-цифровых СФС с нелинейным цифровым каналом в цепи управления без учета конечности разрядной сетки сводятся к (1.1.1).

5. Обоснован выбор плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  при фиксированных значениях  $M, g, d$  для анализа систем. Показано, что представление результатов исследований в таком виде позволяет легко интерпретировать полученные данные для конкретных физических объектов.

## 2. Динамика ДСФС с пилообразной характеристикой детектора

Данная глава посвящена исследованию динамических свойств дискретных СФС с пилообразной характеристикой детектора и различными типами нелинейных фильтров в цепи управления. При этом основная задача сводится к разработке общей методики анализа ДСФС с конкретными нелинейными фильтрами и исследованию с ее помощью возможных движений в системе (1.1.1), включая периодические движения, квазипериодические движения, устойчивые предельные множества. Итоговым результатом этих исследований должны стать области устойчивости в большом и в целом, построенные в пространстве параметров системы, включая графики полосы захвата. Необходимость разработки методики вызвана недостаточным уровнем развития теории дискретных нелинейных систем, в том числе и систем фазовой синхронизации.

Большинство работ, посвященных дискретным СФС, рассматривают модели с линейным фильтром и ограничиваются приближенными, либо частными исследованиями [26-32, 35-38, 54, 67, 68]. Что касается дискретных систем с несколькими нелинейностями, то можно назвать ограниченное число работ. Часть из них посвящена исследованию моделей с торроидальным фазовым пространством [42,56,57], представляющих большой теоретический и практический интерес. Другая часть посвящена исследованию различных многокольцевых структур на основе дискретных колец ФАПЧ [41-44,58,59].

Усилиями сотрудников кафедры радиофизики Ярославского государственного университета, в том числе и автора диссертации, в последнее время разработаны методики и алгоритмы, основанные на качественно-аналитическом подходе, позволяющие получить достаточно полные сведения о поведении различных ДСФС, включая системы с нелинейным фильтром в цепи управления [44,45,60,61,62]. В работах [39,63,40] автором диссертации исследуются периодические и квазипериодические движения на фазовой плоскости в дискретных системах второго порядка с линейным фильтром. В работах [46-49,64,65] на основе полученных результатов, анализируются системы с нелинейным фильтром в цепи управления для нескольких вариантов нелинейности фильтра и фазового детектора. Проведенные в диссертации исследования обобщают предложенную в этих работах методику исследования

ДСФС с нелинейным фильтром в цепи управления. При этом рассматриваются четыре варианта наиболее часто встречающихся нелинейных фильтров:

- пропорционально-интегрирующий с ограничением (ограничивающий);
- пропорционально-интегрирующий со сбросом (пилообразный);
- интегратор с форсированием с ограничением (ограничивающий);
- интегратор с форсированием со сбросом (пилообразный).

В ходе исследования решаются следующие задачи:

- описание общих свойств модели (1.1.1) для каждого конкретного вида нелинейностей фильтра;
- изучение периодических и квазипериодических движений, существование которых возможно в системе, исследование их бифуркаций;
- определение области параметров, при которых в системе существуют движения заданной структуры;
- определение области глобальной устойчивости состояния синхронизма.

С учетом специфики исследования систем с нелинейным фильтром, предлагается следующая схема:

1. На первом этапе изучаются динамические свойства системы с линейным фильтром в цепи управления. Строится фазовый портрет системы. Изучаются типы возможных бифуркаций периодических движений и соответствующая им структура фазового пространства. Далее, в пространстве параметров ищутся области существования возможных периодических движений и анализируется, какие из них определяют область глобальной устойчивости (ОГУ) системы.

2. На втором этапе на основе данных, полученных для системы с линейным фильтром, рассматривается СФС с нелинейным фильтром. Аналогично предыдущему исследуются периодические и квазипериодические движения, области их существования в пространстве параметров, анализируется структура фазового пространства, соответствующая различным типам движений. Исследуется влияние нелинейности фильтра на поведение системы. С учетом нелинейных свойств фильтра строится область глобальной устойчивости и полоса захвата системы.

Исследование ДСФС с различными типами нелинейностей фильтра позволяет провести сравнительный анализ свойств этих систем, а также выработать практические рекомендации разработчикам по оптимизации структуры ДСФС и их характеристик.

## 2.1. Система с линейным фильтром в цепи управления

Пусть  $\Phi(y)$  - линейная функция. Рассмотрим модель с линейным фильтром в цепи управления. Тогда (1.1.1) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha F(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = -\beta F(\varphi_n) + d x_n + g_n \end{cases}, \quad (2.1.1)$$

где  $g_n = g(1-d)$  - нормированная начальная расстройка.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть  $d < 1$ , в этом случае система (2.1.1) описывает СФС с ПИФ. Для импульсной СФС параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g_n$  выразятся через физические параметры следующим образом:

$$\alpha = \frac{D}{\lambda} \left( 1 - \frac{(1-d)(1-m)}{\alpha_p} \right), \quad (2.1.2)$$

$$\beta = \frac{D}{\lambda} \left( \frac{D(1-m)(1-d)^2}{\alpha_p} \right),$$

$$g_n = ((1-d)\alpha + \beta) \gamma_H = \frac{D}{\lambda} (1-d) \gamma_H,$$

$$D = E \lambda S_g T_p, \quad \alpha_p = T_p / T_f; \quad d = e^{-\alpha_p},$$

где  $D$  - коэффициент усиления по постоянному току,  $E$  - максимальное напряжение с выхода ФД,  $\lambda$  - нормированная крутизна характеристики ФД в рабочей точке,  $T_p$  - период дискретизации в системе,  $T_f$  - постоянная времени фильтра,  $\alpha_p = T_p / T_f$ ,  $m$  - коэффициент форсирования,  $\gamma_H$  - относительная начальная расстройка.

Для цифровой СФС с дискретным фазометром на входе параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g_n$  выразятся через физические параметры следующим образом:

$$\alpha = m S_C, \quad \beta = S_C, \quad S_C = 2\pi S S_{\Phi\Pi} / k_{2\pi}, \quad g_n = (1-d) 2\pi \Delta k_{BX} / k_{2\pi}, \quad (2.1.3)$$

где  $S_C$  - обобщенный коэффициент усиления,  $m$  - коэффициент передачи пропорционального канала,  $S_{\Phi\Pi}$  - максимальный код на выходе функционального преобразователя,  $S$  - нормировочный коэффициент цифрового генератора,  $k_{2\pi}$  - код, соответствующий приращению фазы на  $2\pi$ .

2. Пусть  $d=1$ ,  $g_n=0$ , в этом случае (2.1.1) описывает систему с интегратором с форсированием. Система имеет второй порядок астатизма, и вследствие этого в уравнении исчезает зависимость от начальной расстройки

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha F(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = -\beta F(\varphi_n) + x_n \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Для импульсной СФС коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  выразятся через физические параметры следующим образом:

$$\alpha = \frac{D}{\lambda} \left( \frac{m + \alpha_p}{2} \right), \quad \beta = \frac{D}{\lambda} \alpha_p. \quad (2.1.5)$$

Для цифровой СФС с дискретным фазометром на входе параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g_n$  выразятся через физические параметры следующим образом:

$$\alpha = m S_C, \quad \beta = S_C. \quad (2.1.6)$$

### 2.1.1. Общие свойства ДСФС с пилообразной характеристикой детектора

Рассмотрим общие свойства дискретной СФС второго порядка с пилообразной характеристикой ФД. Выражения (2.1.1), (2.1.4) задают отображение вектора состояния  $\vec{q} = [\varphi, x]^T$ . Для удобства разделим уравнения (2.1.3), (2.1.4) на  $\pi$  и перейдем к нормированным координатам.

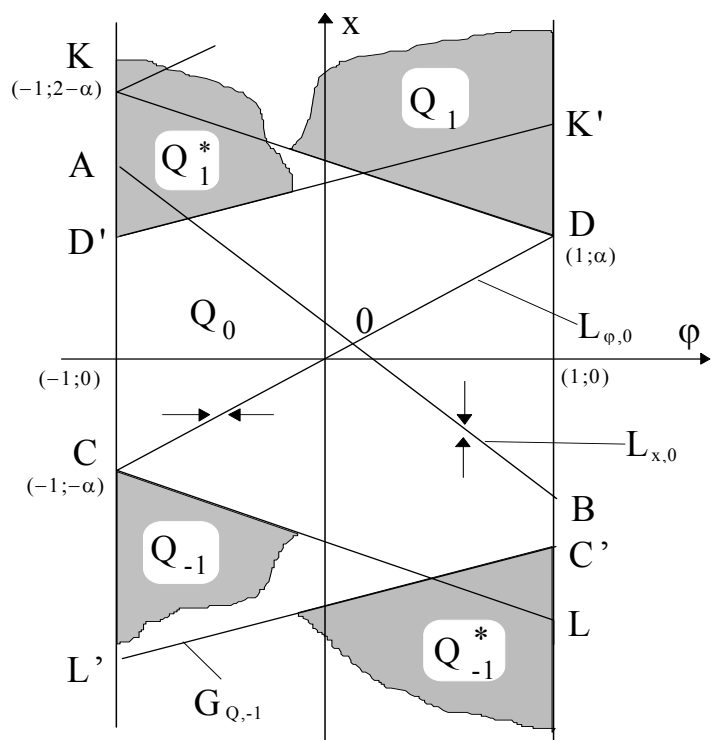
В силу периодичности  $F(\varphi)$  фазовым пространством системы будет цилиндр, общий вид развертки которого показан на рис. 2.1. Выделим линии  $L_{\varphi,0}$  и  $L_{x,0}$ , являющиеся линиями отображения с сохранением координат  $\varphi$  и  $x$  соответственно. Т.е. отображение вектора  $\vec{q}$ , принадлежащего одной из этих линий, происходит с сохранением значения соответствующей координаты. Уравнения этих прямых легко получить из (2.1.1), положив  $\varphi_{n+1} = \varphi_n$  и  $x_{n+1} = x_n$

$$L_{\varphi,0} : x = \alpha \varphi \quad (2.1.7)$$

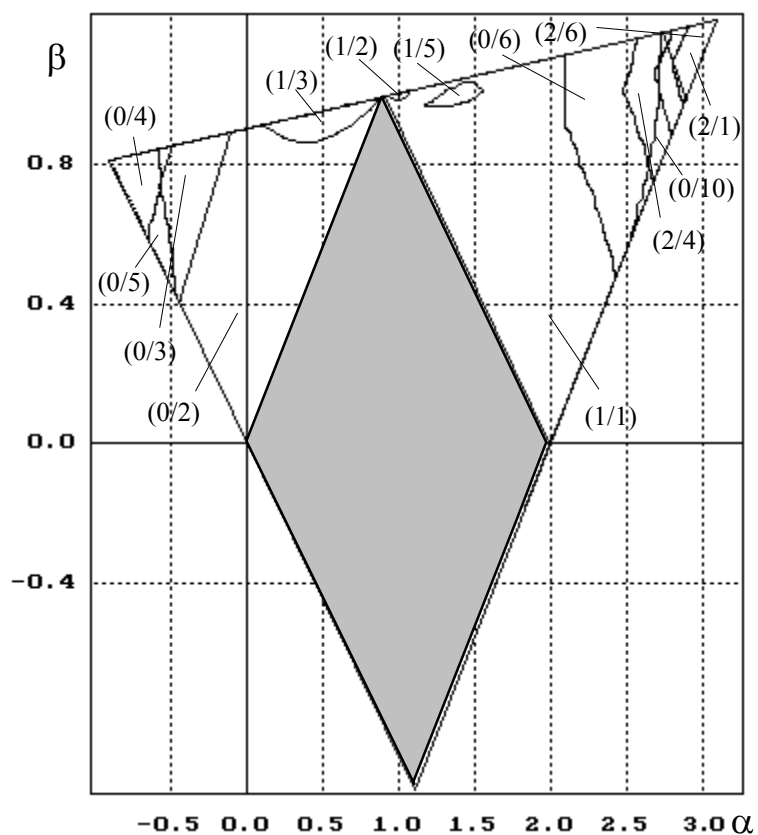
$$L_{x,0} : x = (-\beta \varphi + g_n) / (1-d)$$

Точка пересечения прямых  $L_{\varphi,0}$  и  $L_{x,0}$  является стационарным состоянием и имеет координаты  $O(\varphi_0, x_0)$

$$\varphi_0 = \frac{g_n}{(1-d)\alpha + \beta}, \quad x_0 = \frac{\alpha g_n}{(1-d)\alpha + \beta}. \quad (2.1.8)$$



**Рис. 2.1. Развертка фазового цилиндра СФС с пилообразной характеристикой ФД.**



**Рис. 2.2. Области существования периодических движений ДСФС с линейным ПИФ для  $d=0.1$ ,  $g_n=0$ .**



Из (2.1.8) легко заметить, что стационарное состояние существует при выполнении условия:

$$\left| \frac{g_n}{(1-d)\alpha + \beta} \right| < 1 \quad (2.1.9)$$

Заметим, что структура фазового пространства симметрична относительно смены знака  $g_n$ , поэтому в дальнейшем, не теряя общности, будем рассматривать  $g_n > 0$ .

Изучим далее возможные в данной системе периодические движения, анализ которых необходим для ответа на вопрос об устойчивости в целом состояния синхронизма. Для этого определим границы областей нелинейного отображения. На границу развертки фазового цилиндра  $\varphi = 1$  отображаются прямые  $G_{Q,m}$ , задаваемые уравнением

$$G_{Q,m} : x = (\alpha - 1)\varphi + 2m - 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.10)$$

На границу  $\varphi = -1$  отображаются прямые  $G_{Q,m}$ , задаваемые уравнением

$$G_{Q,m} : x = (\alpha - 1)\varphi + 2m + 1, \quad m = -1, -2, -3, \dots \quad (2.1.11)$$

Таким образом, прямые  $G_{Q,m}$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) определяют области линейного и нелинейного отображения. Отображение вектора состояния, принадлежащего области  $Q_0$ , лежащей между прямыми  $G_{Q,1}$  и  $G_{Q,-1}$  (соответственно между областями  $Q_{-1}$ ,  $Q_1$ ), происходит линейно. Вследствие этого его можно описать, используя линеаризованную матрицу системы (2.1.1)

$$\bar{q}_{n+1} = T_L \bar{q}_n + \bar{r}, \quad \text{где } T_L = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 1 \\ -\beta & d \end{bmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_H \end{bmatrix}. \quad (2.1.12)$$

При выборе начальных условий из области  $Q_m$  ( $m \neq 0$ ), которая расположена между прямыми  $G_{Q,m}$ ,  $G_{Q,m+1}$ , происходит нелинейное отображение. При положительных  $m$  точки этой области отображаются в точки, лежащие правее прямой  $\varphi = 1$  в  $m$ -ый справа период фазового цилиндра. Вследствие этого область  $Q_m$  нелинейно отображается в некоторую область  $Q_m^*$ . Аналогично, для отрицательных  $m$  происходит отображение в  $m$ -ый слева период фазового цилиндра. При нелинейном отображении вектор  $\bar{q}_n$  переходит в некоторый вектор  $\bar{q}'_{n+1}$

$$\bar{q}'_{n+1} = T_L \bar{q}_n + \bar{r}; \quad \left| [\bar{q}'_{n+1}]_\varphi \right| > 1. \quad (2.1.13)$$

Учтем влияние нелинейности  $F(\varphi)$ , прибавив к  $\vec{q}'_{n+1}$  вектор  $\vec{p} = [-2m, 0]^T$ , где  $m = ([\vec{q}'_{n+1}]_{\varphi} + 1) \text{ div } 2$  - номер периода фазового цилиндра, на который происходит отображение. Вектор  $\vec{p}$  переводит  $\vec{q}'_{n+1}$  в интервал  $[-1, 1]$  по координате  $\varphi$ . При нелинейном отображении  $\vec{q}_{n+1} = \vec{q}'_{n+1} + \vec{p} = T_L \vec{q}_n + \vec{r} + \vec{p}$ . Т.е. в общем случае можно записать:

$$\vec{q}_{n+1} = T_L \vec{q}_n + \vec{r} + \vec{p}_n, \quad (2.1.14)$$

где  $\vec{p}_n$  - вектор, учитывающий влияние нелинейности  $F(\varphi)$  на  $n+1$  шаге. Если отображение линейное, то  $\vec{p}_n = [0, 0]^T$ .

При движении из начального вектора  $\vec{q}_0$ , вектор состояния на  $n$ -ом шаге в соответствии с (2.1.14) запишется следующим образом:

$$\vec{q}_n = T_L^n \vec{q}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} T_L^i (\vec{p}_{n-i-1} + \vec{r}). \quad (2.1.15)$$

Если существует периодическое движение периода  $k$ , то должно выполняться условие замыкания цикла  $\vec{q}_k = \vec{q}_0$ . В этом случае согласно (2.1.15)

$$\vec{q}_0 = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} T_L^i (\vec{p}_{k-i-1} + \vec{r})}{E - T_L^k} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} T_L^i \vec{p}_{k-i-1}}{E - T_L^k} + \frac{\vec{r}}{E - T_L^k}. \quad (2.1.16)$$

Выражение (2.1.16) позволяет вычислить координаты вектора состояния произвольной точки цикла заданной структуры.

Будем называть предельным циклом (ПЦ) структуры  $(u/k)$  периодическое движение периода  $k$ , абсолютное приращение фазы на периоде которого равно  $2u$ . Соответственно приращение фазы  $\varphi$  по mod 2 за период цикла равно нулю.

В теории и практике систем синхронизации циклы типа  $(u/1)$ ,  $u = \pm 1, \pm 2, \dots$  получили название кратных захватов. В фазовом пространстве циклы данной структуры расположены на пересечении прямой  $L_{x,0}$  и прямых  $L_{\varphi,m}$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), задаваемых уравнениями  $x = \alpha\varphi + 2m$ . Это прямые отображения по координате  $\varphi$  с приращением фазы  $\pm 2, \pm 4, \dots$ . Координаты точек кратных захватов выражаются следующим образом:

$$\varphi_m = \frac{g_H - 2m(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}, x_m = \frac{\alpha g_H - \alpha 2m(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}, m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.17)$$

Из (2.1.17) нетрудно получить условие отсутствия кратных захватов  $(\beta + g_H)/(1-d) < \alpha$ .

С учетом изложенного выше определим необходимые и достаточные условия существования периодических движений:

1. Должно быть выполнено условие замыкания цикла (2.1.16).

2. Все точки цикла должны находиться в соответствующих им, согласно структуре цикла, областях  $Q_m$ . Точки, из которых происходит линейное отображение должны принадлежать области  $Q_0$ . Точки, из которых происходит нелинейное отображение - соответствующей области  $Q_m$  ( $m \neq 0$ ).

Второе утверждение эквивалентно требованию попадания всех точек цикла заданной структуры в отрезок  $[-1,1]$  по координате  $\varphi$  [40].

Если выполнены оба этих условия, то, согласно вышесказанному, цикл существует, и наоборот, если цикл существует, то эти условия автоматически выполняются.

Из (2.1.16) также следует, что вектор  $j$ -ой точки цикла некоторой структуры периода  $k$  можно представить в виде:

$$\vec{q}_j = \vec{l}_j + g_H \vec{b}, \quad (2.1.18)$$

где  $\vec{l}_j$  - вектор, определяемый первым слагаемым (2.1.16), он зависит от структуры цикла и выбора первой точки цикла. Вектор  $\vec{b} = (E - T_L)^{-1} (0,1)^T$  - постоянный вектор. Таким образом, при изменении  $g_H$  точки произвольного цикла, не меняя взаимного расположения, сдвигаются в фазовом пространстве вдоль вектора  $\vec{b}$ .

Покажем, что если в данной системе существует периодическое движение, то оно устойчиво, когда выполнены условия локальной устойчивости отображения (2.1.1) (собственные значения матрицы  $T_L$  по модулю меньше единицы).

В самом деле, пусть существует цикл периода  $k$ , точки которого расположены на  $u$  периодах  $F(\varphi)$ . Пусть  $\vec{q}_0$  вектор первой точки цикла на  $m$ -ом периоде  $F(\varphi)$ ,  $\vec{q}_1$  вектор первой точки на  $m+1$  периоде, т.е.  $\vec{q}_1 = (T_L)^n \vec{q}_0 + \vec{b}$ , где  $\vec{b}$  - постоянный вектор,  $n$  - количество точек цикла на  $m$ -ом периоде  $F(\varphi)$ . Пусть  $\vec{q}_0^*$  произвольный вектор близкий к вектору  $\vec{q}_0$ . Через  $n$  итераций он отобразится в вектор  $\vec{q}_1^*$ :  $\vec{q}_1^* = (T_L)^n \vec{q}_0^* + \vec{b}$ . Несложно видеть что вектор  $\Delta \vec{q}_1 = \vec{q}_1 - \vec{q}_1^*$  выражается через  $\Delta \vec{q}_0 = \vec{q}_0 - \vec{q}_0^*$ , как  $\Delta \vec{q}_1 = (T_L)^n \Delta \vec{q}_0$ . Таким образом,

цикл устойчив, если выполнены условия локальной устойчивости отображения (2.1.1).

Их можно получить, воспользовавшись аналогом критерия Раussa-Гурвица для дискретных систем [66]. Эти условия задаются системой неравенств:

$$\begin{cases} \alpha(1-d) + \beta > 0 \\ 1 - \beta + d(\alpha - 1) > 0 \\ (2 - \alpha)(1 + d) + \beta > 0 \end{cases} \quad (2.1.19)$$

Заметим, что отображение (2.1.1) инвариантно относительно преобразования  $g_n \rightarrow g_n + 2m$  (где  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). При этом все движения в системе переходят в подобные им движения, но при каждой итерации координата  $\varphi_n$  получает дополнительное приращение  $2m$ . Т. е. циклы  $(u/k)$  переходят в циклы  $(u + km)/k$ . В силу этого без нарушения общности можно рассматривать  $g_n$  в пределах

$$0 \leq g_n \leq 2. \quad (2.1.20)$$

### 2.1.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления

Рассмотрим процессы в ДСФС, описываемой (2.1.1) при  $d < 1$ .

На рис. 2.1 представлена развертка фазового цилиндра. Линиями отображения с сохранением координат  $\varphi$  и  $x$  являются прямые  $CD$  (линия  $L_{\varphi,0}$ ) и  $AB$  (линия  $L_{x,0}$ ) соответственно. Уравнения этих прямых определяются выражением (2.1.7). Стационарное состояние лежит на пересечении этих прямых и определяется выражением (2.1.8). В силу соотношений (2.1.2), учитывая зависимость  $\alpha, \beta$  от реальных физических параметров, несложно показать, что для ИСФС координаты состояния равновесия равны  $O = (\gamma_H, \gamma_H \alpha)$ . При увеличении (уменьшении) расстройки  $g_n$  стационарное состояние перемещается вверх (вниз) вдоль линии  $L_{\varphi,0}$  и при начальной расстройке  $|g_n| > (1-d)\alpha + \beta$  исчезает. Прямыми  $KD$  (линия  $G_{Q,1}$ ) и  $CL$  (линия  $G_{Q,-1}$ ) ограничены области нелинейного отображения  $Q_1$  и  $Q_{-1}$  соответственно. Прямыми  $K'D'$  и  $C'L'$  ограничены области после нелинейного отображения  $Q_1^*$  и  $Q_{-1}^*$  соответственно.

Известно, что при  $d < 1$  фазовое пространство данного отображения, вследствие ограниченности функции  $F(\varphi)$ , имеет притягивающий слой по координате  $x$  [34]. В данном случае он определяется пересечением прямой  $AB$  и прямых  $\varphi = 1$ ,  $\varphi = -1$  и выражается системой неравенств

$$\begin{cases} x < \frac{|\beta| + g_H}{1-d} \\ x > \frac{-|\beta| + g_H}{1-d} \end{cases} \quad (2.1.21)$$

Если притягивающий слой полностью принадлежит области  $Q_0$ , то нелинейное отображение из него невозможно. Это выполняется при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} [A]_x < \alpha \\ [A]_x < 2 - \alpha \\ [B]_x < \alpha \\ [B]_x < 2 - \alpha \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \beta < \alpha(1-d) - g_H \\ \beta < (2-\alpha)(1-d) - g_H \\ \beta > -\alpha(1-d) + g_H \\ \beta > (\alpha-2)(1-d) + g_H \end{cases} \quad (2.1.22)$$

Системы неравенств (2.1.22) дают оценку снизу области глобальной устойчивости стационарного состояния. Несложно видеть, что второе из неравенств (2.1.22) является условием отсутствия первого кратного захвата (выражение (2.1.17) при  $m=1$ ). Третье неравенство совпадает с условиями существования состояния синхронизма (выражение (2.1.9)). Оценка становится нулевой при выполнении условия

$$\begin{aligned} g_H &\geq (1-d) \\ \text{или} \\ g_H &\geq 1 \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

При увеличении  $d$ , согласно (2.1.22), (2.1.23), область в пространстве параметров  $(\alpha, \beta)$ , удовлетворяющая неравенствам (2.1.22), уменьшается, аналогичное уменьшение происходит с увеличением  $g_H$ .

Рассмотрим бифуркации возникновения-исчезновения периодических движений, возможных в данной системе.

Пусть все точки цикла некоторой структуры, кроме  $j+1$ -ой находятся в пределах отрезка  $[-1, 1]$  по  $\varphi$ . Из вышесказанного следует, что цикл возникает при пересечении вектором  $\vec{q}_j$  какой-либо границы области  $Q_m^*$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) через прямую  $G_{Q,m}$  и соответственно при пересечении вектором  $\vec{q}_{j+1}$  прямой

$\varphi=1$  или  $\varphi=-1$ . Цикл исчезает при выходе хотя бы одной его точки за пределы отрезка  $[-1,1]$  по  $\varphi$ .

Учитывая это, рассмотрим бифуркации периодических движений в зависимости от изменения начальной расстройки. Из (2.1.16), (2.1.18) следует, что при  $[\vec{b}]_{\varphi} > 0$  и при  $g_n > 0$  с увеличением  $g_n$  точки произвольного цикла сдвигаются в фазовом пространстве в сторону увеличения координаты  $\varphi$ . Т.е. бифуркация возникновения цикла происходит при пересечении вектора  $\vec{q}_j$  границы области  $Q_m^*$  ( $m=\pm 1, \pm 2..$ ) вдоль прямой  $G_{Q,m}$  и соответственно при пересечении вектором  $\vec{q}_{j+1}$  прямой  $\varphi=-1$ . Бифуркация исчезновения цикла в этом случае происходит при пересечении  $\vec{q}_{j+1}$  прямой  $\varphi=1$ . Аналогичные условия можно получить для  $[\vec{b}]_{\varphi} < 0$ . Вычислим из (2.1.16), (2.1.18) координаты вектора  $\vec{b}$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1/(\alpha(1-d) + \beta) \\ \alpha/(\alpha(1-d) + \beta) \end{bmatrix}. \quad (2.1.24)$$

Из (2.1.19) видно, что в области локальной устойчивости условие  $[\vec{b}]_{\varphi} > 0$  выполняется всегда.

Проведенный анализ позволяет применить следующую методику для нахождения областей существования периодических движений заданной структуры:

- при заданных параметрах системы из выражения (2.1.16) вычисляются координаты всех точек цикла;
- далее проверяются условия существования цикла;
- если цикл существует, то методом продолжения по параметру ищется его граничное значение, при котором движение разрушается;
- далее граница существования цикла строится методом продолжения по параметру.

Особенно просто эта методика применяется в случае построения областей существования циклов в пространстве параметров  $(D, \gamma_H)$ . В дальнейшем используем это при разработке алгоритма точного определения полосы захвата.

На рис. 2.2-2.5 в пространстве параметров  $(\alpha, \beta)$  показано распределение областей существования устойчивых периодических движений различной

структуры для различных значений начальной расстройки  $g_n$  и параметра  $d$ . Также показан треугольник локальной устойчивости. Штриховкой отмечена область глобальной устойчивости системы.

При нулевой начальной расстройке (рис. 2.2) область глобальной устойчивости снизу ограничивается границей локальной устойчивости. Справа сверху граница ОГУ совпадает с границей возникновения первого кратного захвата (цикл  $(1/1)$ ). Дальнейшее движение в сторону увеличения  $\alpha$ ,  $\beta$  для реальной системы соответствует увеличению коэффициента усиления в кольце. Это приводит к возникновению кратных захватов и различных циклов первого и второго рода, характерным для которых является наличие нескольких нелинейных отображений на периоде цикла (структура  $u/k$ ,  $u > 1$ ).

Слева сверху область глобальной устойчивости ограничивается циклом первого рода структуры  $(0/2)$ . Точки этого цикла располагаются в фазовом пространстве симметрично относительно состояния синхронизма и находятся в областях, образованных пересечением  $Q_I^* \cap Q_{-I}$  и  $Q_{-I}^* \cap Q_I$ . Соответственно при  $Q_I^* \cap Q_{-I} = \emptyset$  или  $Q_{-I}^* \cap Q_I = \emptyset$  существование цикла этого типа невозможно. При дальнейшем уменьшении  $\alpha$  наблюдается возникновение циклов первого рода структуры  $(0/k)$  с  $k > 2$ . Данное движение происходит следующим образом:  $k$ -2 шага с линейным отображением, нелинейное отображение с увеличением фазы, нелинейное отображение с уменьшением фазы. Существование этих циклов обуславливается симметрией фазового пространства при  $g_n = 0$ . Вследствие этого данные циклы возникают попарно и располагаются симметрично относительно состояния синхронизма.

С увеличением  $g$  ОГУ (см. рис. 2.3-2.5) уменьшается за счет возникновения области параметров, в которой не существует состояние равновесия (граница обозначена через  $(R)$ ). Исчезновение состояния равновесия ведет к возникновению в системе движений с постоянным возрастанием фазы. Это приводит к циклам второго рода различной структуры. Данные циклы показаны на рис. 2.4, 2.5б.

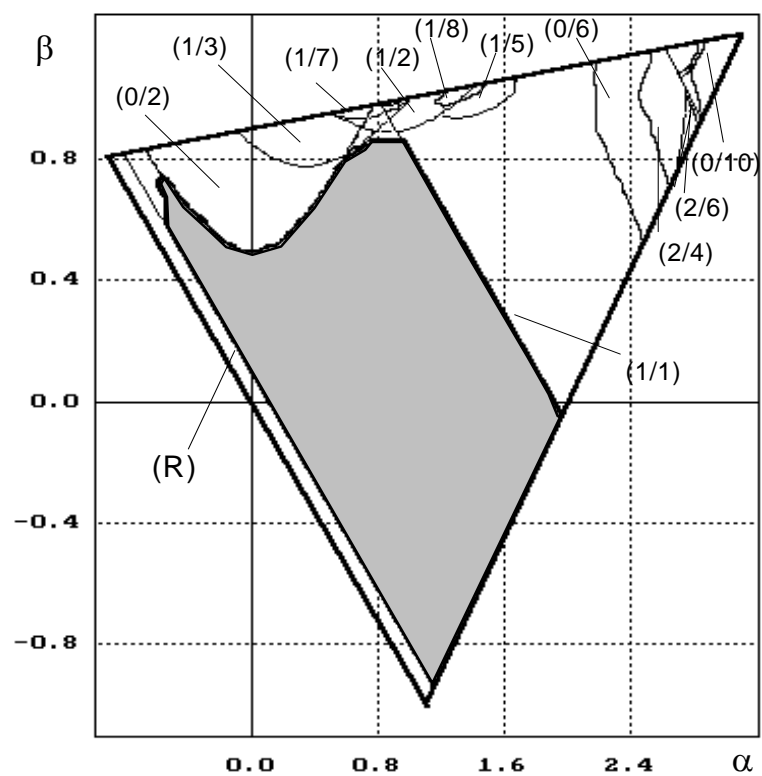


Рис. 2.3. Области существования периодических движений  
ДСФС с линейным ПИФ для  $d=0.1$ ,  $g_n=0.1$ .

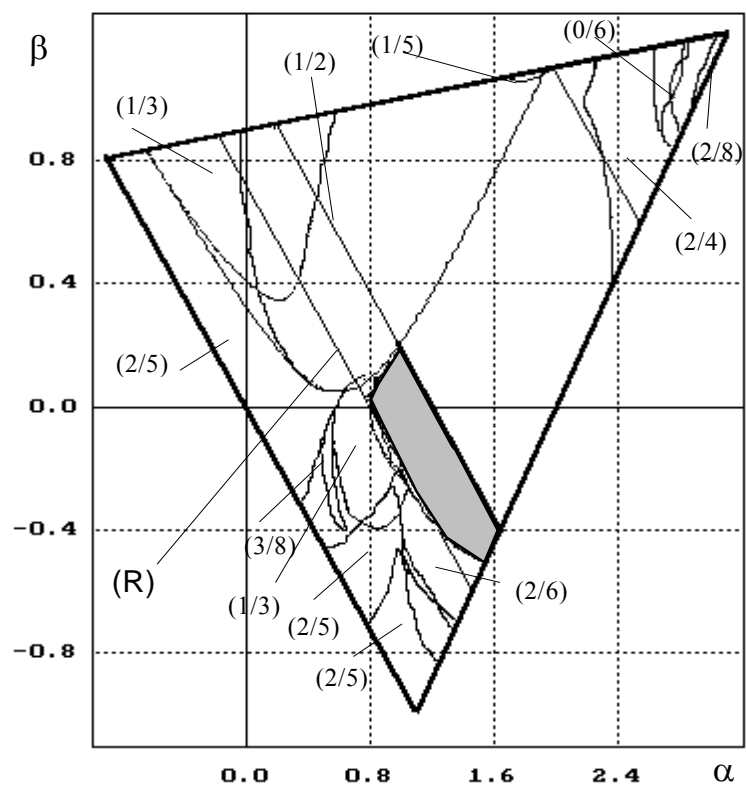


Рис. 2.4. Области существования периодических движений  
ДСФС с линейным ПИФ для  $d=0.1$ ,  $g_n=0.7$ .



Отметим, что уже при незначительных  $g_n$  происходит уменьшение областей существования циклов первого рода в области малых значений  $\alpha$ . Это связано с нарушением симметрии фазового пространства. За счет этого ОГУ в области малых значений  $\alpha$ ,  $\beta$  при небольших  $g_n$  увеличивается (рис 2.3, 2.5а). С дальнейшим увеличением расстройки наблюдается возникновение циклов второго рода. При этом область глобальной устойчивости ограничивается циклами структуры  $(1/k)$ . С увеличением расстройки области существования этих циклов расширяются.

Докажем следующее утверждение относительно циклов второго рода, определяющих область глобальной устойчивости системы.

Пусть

$$[\vec{b}]_{\varphi} > 0; Q_I^* \cap Q_{-I} = \emptyset. \quad (2.1.25)$$

Если при расстройке  $g_n = g_I$  не существует ни одного периодического движения, кроме стационарного состояния, то при увеличении  $g_n$ , первым возникает цикл второго рода структуры  $(1/k)$ . Причем данный цикл возникает при переходе вектора точки цикла после нелинейного отображения через прямую  $\varphi = -1$ .

Ранее было рассмотрено, каким образом происходит бифуркация возникновения циклов при выполнении условия  $[\vec{b}]_{\varphi} > 0$ . Чтобы точка после нелинейного отображения линейно отображалась на периоде  $F(\varphi)$  необходимо отсутствие пересечения областей  $Q_{-I}^*$  и  $Q_{-I}$ . Иначе появляется возможность повторного нелинейного отображения с уменьшением координаты  $\varphi$ . Это приводит к разрушению цикла. Также это условие гарантирует отсутствие рассмотренных ранее циклов первого рода.

Покажем теперь, что первым возникает цикл структуры  $(u/k)$  ( $u=1$ ). Для этого рассмотрим циклы структуры  $(u/k)$   $u>1$ , расположенные на нескольких периодах  $F(\varphi)$ . Непосредственно из (2.1.16) следует, что невозможен цикл данной структуры, который имел бы начальные точки с одинаковыми координатами на разных периодах. В самом деле, из (2.1.16) видно, что при выполнении этого условия данный цикл совпадает с циклом структуры  $(1/k)$ .

На рис. 2.6 изображена ситуация, соответствующая отсутствию циклов второго рода. Показаны фрагменты нескольких движений, начинающихся на

прямой  $\varphi = -1$  в точках  $x_{1k}$  и попадающих после некоторого числа итераций на прямую  $\varphi = 1$  в точки с координатой  $x_{2k}$ . Для существования цикла структуры  $1/k$  необходимо выполнение условия  $x_{2k} \geq x_{1k}$ . В рассматриваемом случае для каждого  $k$  значение  $x_{2k} < x_{1k}$ , следовательно, циклов данной структуры не существует и справедливо следующее утверждение: нелинейное отображение на каждом проходе периода  $F(\varphi)$  характеризуется уменьшением координаты  $x$  по сравнению с начальной точкой движения на предыдущем периоде. Несложно видеть, что при увеличении  $g_n$  координаты  $x$  точек  $x_{1k}$  уменьшаются, а точек  $x_{2k}$  увеличиваются. При возникновении равенства  $x_{2k} = x_{1k}$  возникает цикл структуры  $(1/k)$  (согласно рис. 2.6 первым родится цикл периода 4 и далее циклы периодов 3, 2). При существовании цикла структуры  $(u/k)$ ,  $u > 1$  приращение координаты  $x$  на разных периодах должно иметь разный знак. Это выполняется только в том случае, если уже существует цикл типа  $(1/k)$ .

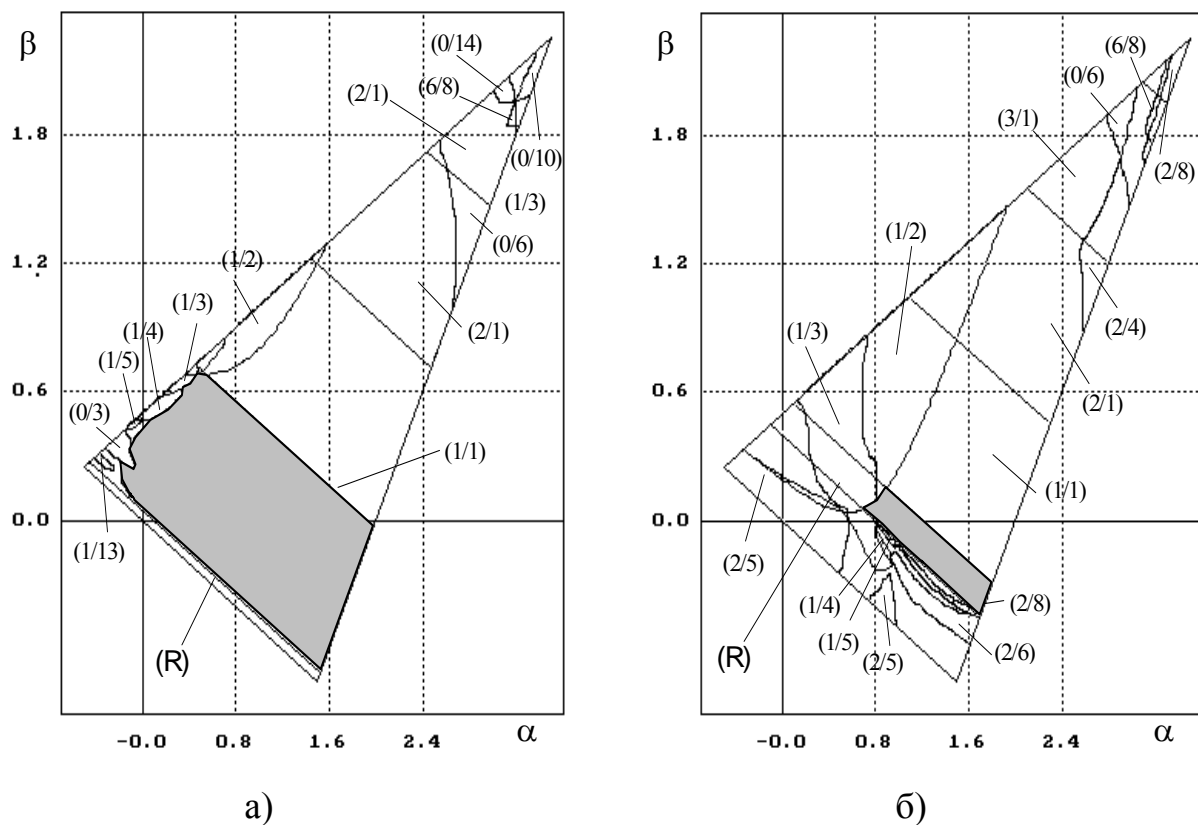
Из выражений для границ областей  $Q_m$  (2.1.10) (2.1.11) и выражения для координат вектора  $\vec{b}$  (2.1.24) несложно показать, что условия (2.1.25) эквивалентны системе неравенств:

$$\begin{cases} \beta < \alpha(1+d) + g \\ \beta < \alpha(d-1). \end{cases} \quad (2.1.26)$$

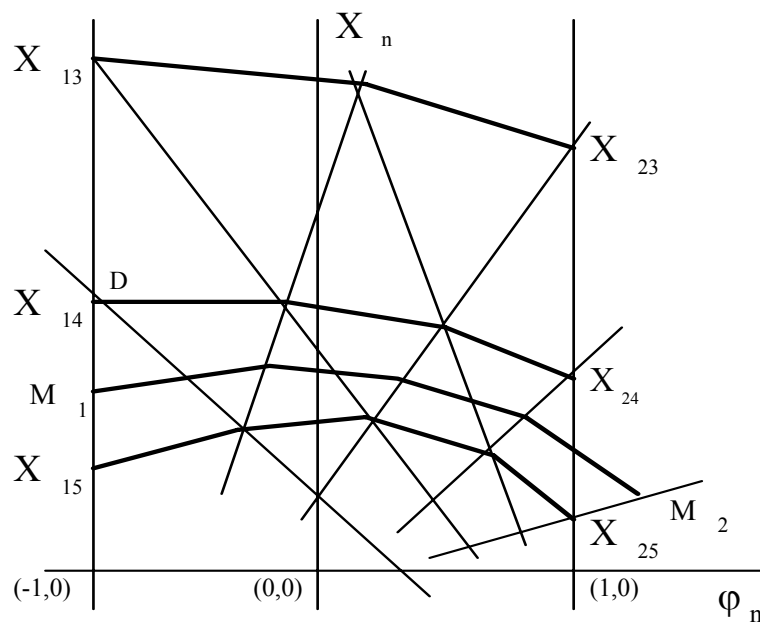
Одним из важнейших параметров систем фазовой синхронизации является полоса захвата или область частотных расстроек, при которых система придет в состояние синхронизма из любых начальных условий. Построим на основе рассмотренных свойств алгоритм нахождения полосы захвата системы (2.1.1) в области параметров определяемой условиями (2.1.26).

В основе его лежит задача минимального значения  $g_n$ , при котором исчезнут все периодические движения, кроме стационарного состояния.

Согласно приведенному выше доказательству, для этого достаточно найти минимальное  $g_n$ , при котором исчезнут все циклы структуры  $(1/k)$ . Бифуркация рождения/исчезновения цикла данной структуры происходит, когда вектор состояния первой после нелинейного отображения точки цикла будет находиться на левой границе  $\varphi = -1$  области  $Q_1^*$  (при положительных  $g_n$ ).



**Рис. 2.5. Области существования периодических движений ДСФС с линейным ПИФ для  $d=0.5$ : а)  $g_n=0.1$ ; б)  $g_n=0.8$ .**



**Рис. 2.6. Фазовое пространство СФС с пилообразной характеристикой ФД и линейным ПИФ.**

Искомое значение несложно получить из формул (2.1.16), (2.1.18).

$$\bar{q}_0 = \frac{\bar{p}}{E - T_L^k} + \frac{\bar{r}}{E - T_L}; \quad \bar{p} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_H \end{bmatrix} \quad (2.1.27)$$

Отсюда

$$g_k = \frac{-I + 2 \cdot [(T_L^k - E)^{-1}]_{11}}{[(T_L - E)^{-1}]_{21}} \quad (2.1.28)$$

где  $[\bullet]_{i,j}$  обозначен элемент матрицы  $i, j$ .

Определив минимальное значение из полученных  $g_k$ , найдем полосу захвата системы:

$$g_3 = \min_{k=1... \infty} (g_k) \quad (2.1.29)$$

На практике в качестве максимального  $k$  достаточно взять значение не превышающее 10...20.

На рис. 2.7 приведены результаты расчета полосы захвата ИСФС с ПИФ в цепи обратной связи для различных значений  $\alpha_p$  (сплошные линии). Заметные изгибы на графике вызваны сменой периода цикла, определяющего полосу захвата. Наибольшая полоса захвата наблюдается в области малых  $D$  и больших  $\alpha_p$ . При уменьшении полосы кольца (уменьшении  $\alpha_p$  и  $m$ ) и увеличении  $D$  полоса захвата уменьшается.

Данный результат является точным, в отличие от полученных ранее приближенными методами. Для сравнения на рис. 2.7а пунктиром показаны результаты, полученные с помощью метода усреднения [26]. Нетрудно заметить, что при малых  $m$  метод усреднения дает значительную ошибку.

На рис. 2.8 представлено семейство зависимостей полосы захвата от усиления для ЦСФС с цифровым фазометром на входе. Результаты приведены для параметров системы, выбранных из области, где условия (2.1.26) не выполняются. Вследствие этого нижняя граница полосы захвата определяется циклами первого рода. Верхняя граница, как это было и раньше, определяется движениями структуры  $(1/k)$ .

### 2.1.3. Система с интегратором в цепи управления

Рассмотрим основные свойства системы СФС с линейным интегратором, описываемой уравнениями (2.1.4). Они будут во многом аналогичны свойствам

отображения (2.1.1). Вместе с тем наблюдаются некоторые принципиальные различия, обусловленные единичным значением коэффициента при  $x_n$  ( $d=1$ ) и отсутствием зависимости от начальной расстройки.

На рис 2.9 представлена развертка фазового цилиндра. В отличие от фазового пространства системы с пропорционально интегрирующим фильтром линия отображения с сохранением координаты  $x$  (линия  $L_{x,0}$ ) в данном случае располагается вертикально и не зависит от начальной расстройки (совпадает с прямой  $\varphi=0$ ). Прямая  $CD$  - линия отображения с сохранением значения координаты  $\varphi$  (линия  $L_{\varphi,0}$ ).

Точка пересечения прямых  $L_{\varphi,0}$  и  $L_{x,0}$  - стационарное состояние системы. Оно имеет координаты:  $O=(0,0)$ . Несложно видеть, что в данной системе прямая  $L_{x,0}$  пересекается со всеми прямыми  $L_{\varphi,m}$ ,  $m=\pm 1, \pm 2, \dots$ . Таким образом, в рассматриваемой модели существует бесконечное множество кратных захватов, т.е. циклов структуры  $(u/1; u=\pm 1, \pm 2, \dots)$ . Область  $Q_0$ , из которой происходит линейное отображение, ограничена прямыми  $KD$  и  $CL$ .

Рассмотрим основные свойства данной системы:

Отображение (2.1.4) инвариантно относительно замены  $((\varphi \bmod 2), x) \rightarrow ((\varphi \bmod 2), x \pm 2m)$ . При этом все движения в системе переходят в подобные им, а координата  $\varphi$  на каждом шаге получает дополнительное приращение  $2m$ . Т. е. циклы структуры  $(u/k)$  переходят в циклы  $(u+km)/k$ . В силу этого поведение данной системы можно рассматривать на торе, период которого определяется неравенствами:

$$-1 \leq \varphi \leq 1, -1 \leq x \leq 1. \quad (2.1.30)$$

В связи с переходом от анализа поведения системы на цилиндре к анализу поведения на торе необходимо отметить следующее:

1. Любое состояние типа кратный захват становится абсолютно эквивалентно стационарному состоянию.

2. Выбор границ тора по координате  $x$  достаточно произволен и может быть сделан с учетом упрощения описания возможных движений. В частности, ниже будут использованы другие границы тора, отличные от (2.1.30), с целью сведения нелинейных отображений по координатам  $\varphi$ ,  $x$  к нелинейным отображениям только по координате  $x$ .

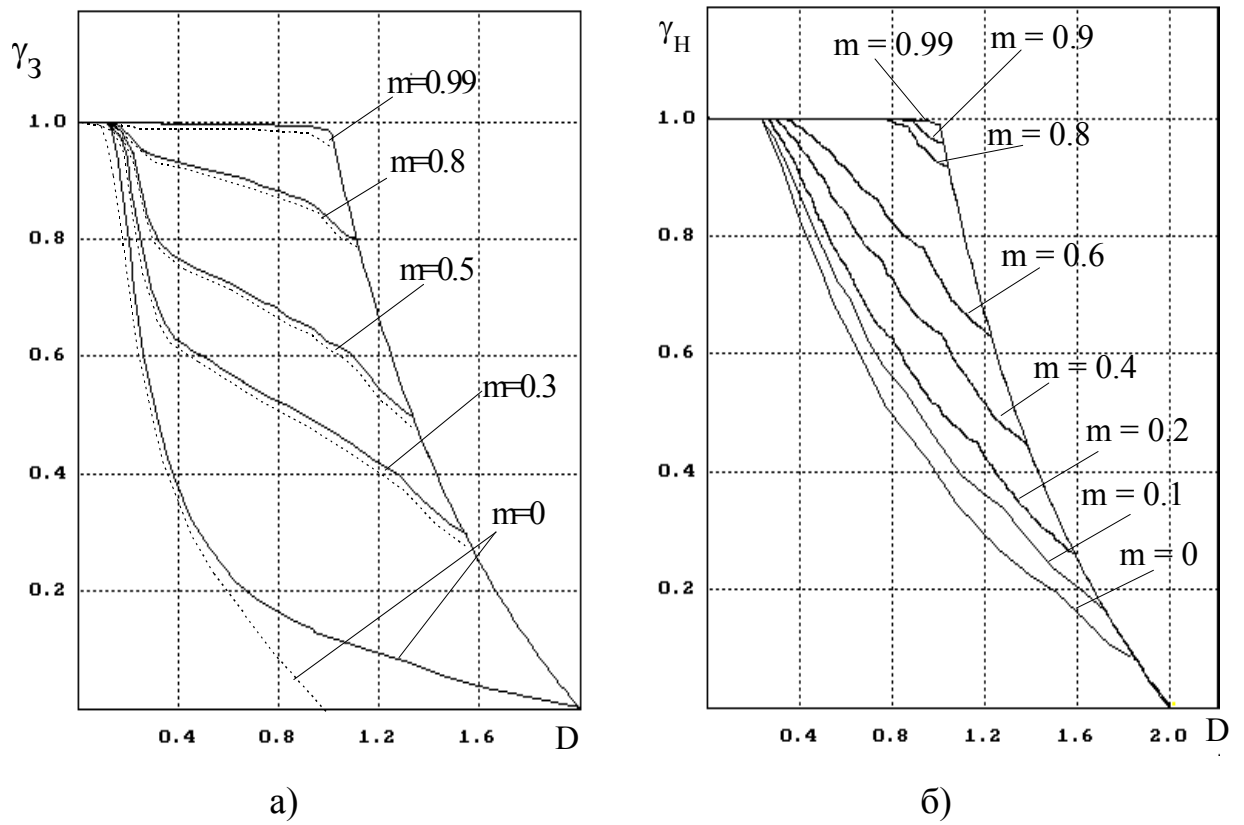


Рис. 2.7. Полоса захвата ИСФС с пилообразной характеристикой ФД и линейным ПИФ для а)  $\alpha_p = 0.1$ ; б)  $\alpha_p = 1$ .

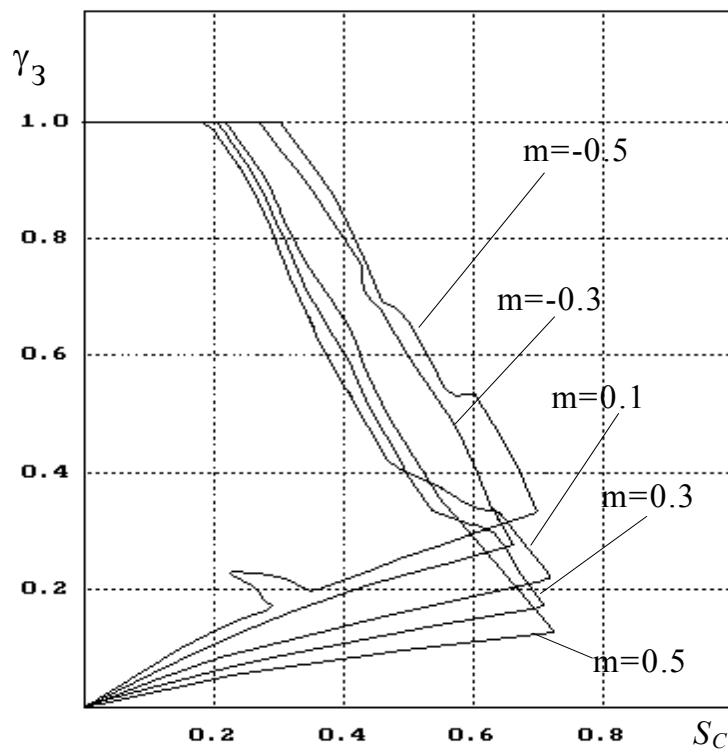


Рис. 2.8. Полоса захвата ЦСФС с пилообразной характеристикой ФД и линейным ПИФ для  $d = 0.1$ .

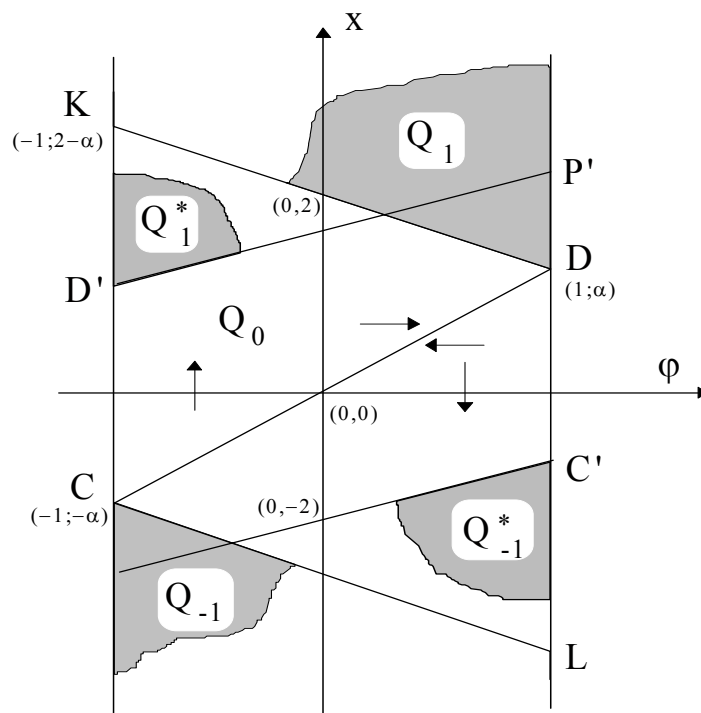


Рис. 2.9. Развертка фазового цилиндра СФС с пилообразной характеристикой ФД и линейным интегратором.

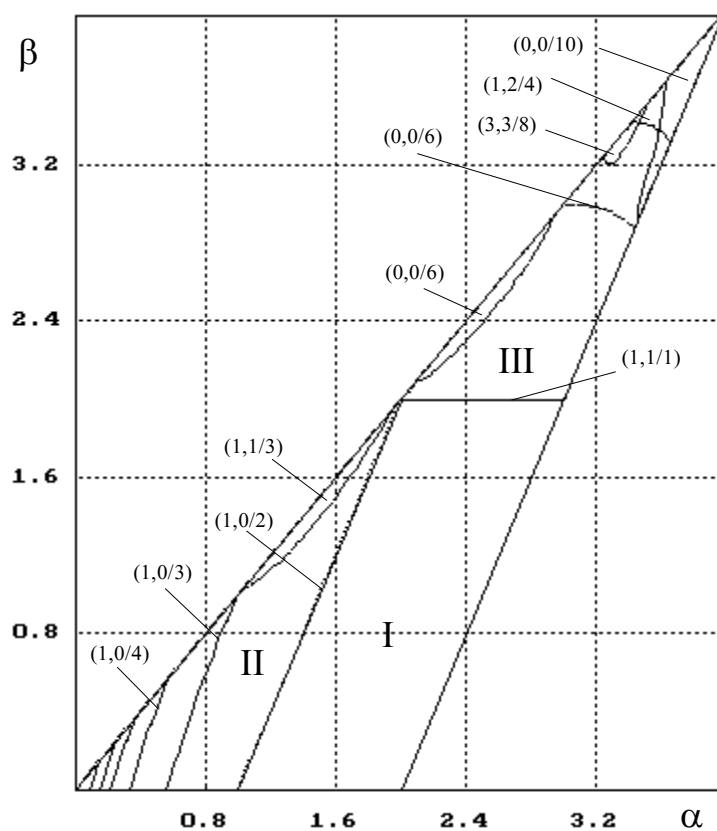


Рис. 2.10. Области существования периодических движений ДСФС с линейным интегратором.

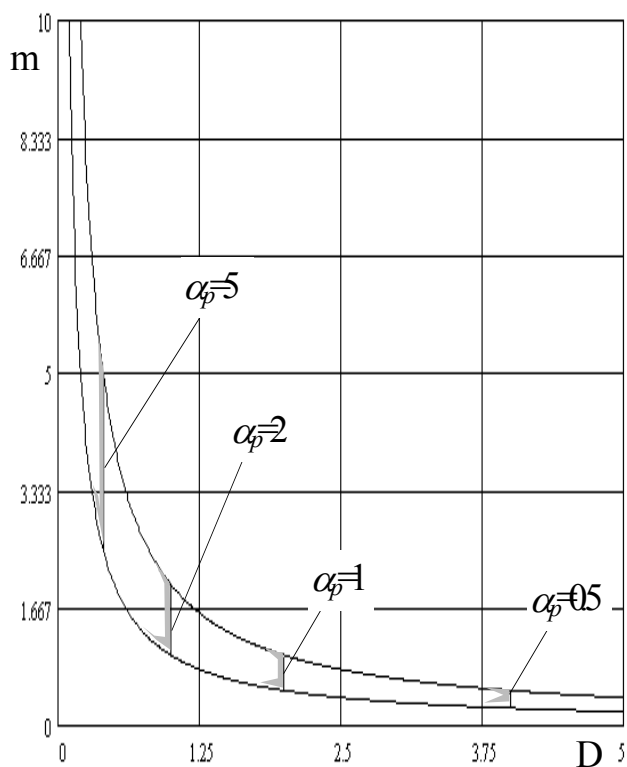


Рис. 2.11. Область I ИСФС с  
линейным интегратором.

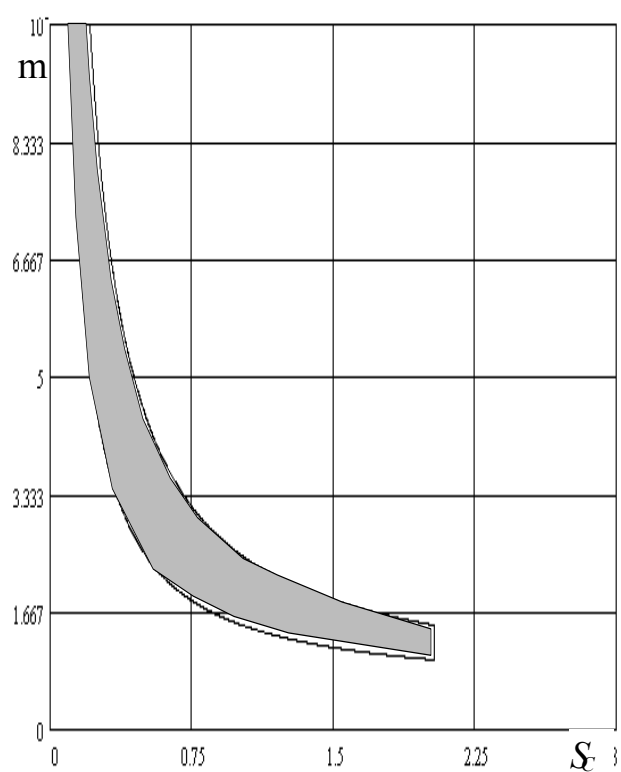


Рис. 2.12. Область I ЦСФС с  
линейным интегратором.

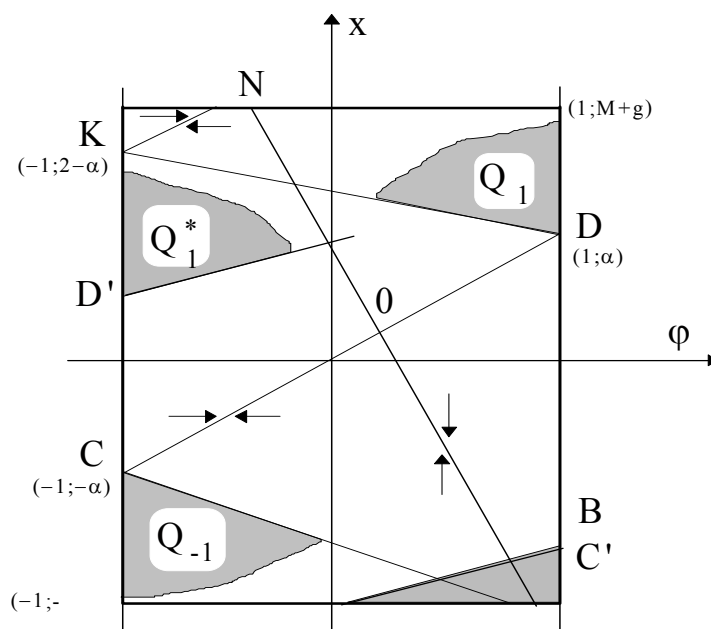


Рис. 2.13. Развертка фазового цилиндра СФС с пилообразной  
характеристикой ФД и ограничивающим фильтром.



Согласно рассмотрению системы на торе, введем расширенную классификацию структуры предельных циклов. Будем называть циклом  $(u, v/k)$  периодическое движение периода  $k$ , при котором абсолютное приращение координат  $\varphi$  и  $x$  равно  $2u$  и  $2v$  соответственно.

На рис. 2.10 показана область локальной устойчивости отображения (2.1.4) в пространстве параметров  $(\alpha, \beta)$ . Она разделена на три подобласти - I, II, III.

В области I не существует никаких периодических движений, кроме циклов структуры  $(n, 0/1)$   $n=0, \pm 1, \pm 2..$  (кратных захватов). Докажем это утверждение. Для этого выберем период фазового тора следующим образом

$$\begin{aligned} -1 \leq \varphi \leq 1, \\ (\alpha - 1)\varphi - 1 \leq x \leq (\alpha - 1)\varphi + 1 \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

Область, определяемая (2.1.31), получается из первоначального периода тора (2.1.30) при повороте его верхней и нижней границы относительно точек  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$  соответственно. В виде (2.1.31) период фазового тора совпадает с областью  $Q_0$ . Из построения следует, что модифицированные периоды тора, лежащие выше и ниже  $Q_0$  по оси  $x$ , совпадают с областями  $Q_m$  с  $m \neq 0$ .

Отображение из  $Q_0$  через границы  $\varphi = \pm 1$  невозможно. Вектор состояния  $\vec{q}$  может покинуть область  $Q_0$  только при отображении через верхнюю и нижнюю границу (линии  $(KD)$  и  $(CL)$  для области  $Q_0$  на рис. 2.9). При этом  $\vec{q}$  формально переходит на следующий модифицированный период тора.

Убедимся, что при выборе параметров системы из области I выполняется условие  $Q_0^* \subset Q_0$ , т.е. модифицированный период тора отображается сам в себя. Для этого достаточно найти условия на параметры системы, при которых точки K, D, C, L отображаются внутрь  $Q_0$ . Из построения следует, что точки K, D отображаются на прямую  $\varphi = 1$ , а точки C, L на прямую  $\varphi = -1$ . Т.е. условия отображения  $Q_0$  в себя сводятся к системе неравенств

$$\begin{cases} [L]_x < [K^*]_x < [D]_x \\ [L]_x < [D^*]_x < [D]_x \\ [C]_x < [C^*]_x < [K]_x \\ [C]_x < [L^*]_x < [K]_x \end{cases},$$

где звездочкой отмечены точки после отображения. Раскрывая их координаты получим систему следующих неравенств

$$\begin{cases} \beta < 2 \\ \beta < 2\alpha - 1, \end{cases}$$

что и требовалось доказать. Отсюда следует, что в области I периодических движений структуры, отличной от кратных захватов, не существует.

В области II, дополнительно к кратным захватам, могут существовать периодические движения второго рода по координатам  $\varphi$  и  $x$ . В силу симметрии фазового пространства циклы данной структуры существует парами: цикл с постоянным увеличением  $\varphi$ ,  $x$  и цикл с постоянным уменьшением  $\varphi$ ,  $x$ . Причем циклы по  $\varphi$  имеют структуру  $(1, 0/k)$ .

Для определения областей существования этих циклов воспользуемся методикой, предложенной ранее. Движение возникает, когда его вектора попадают в соответствующие его структуре области линейного и нелинейного отображения. Для расчета координат векторов цикла воспользуемся выражением (2.1.16). Граница возникновения цикла периода 2  $(1, 0/2)$  совпадает с границей областей I, II. С уменьшением  $\alpha$ ,  $\beta$  циклы второго рода по  $x$  исчезают, а для циклов второго рода по  $\varphi$  происходит ряд бифуркаций возникновения циклов в следующей последовательности  $(1, 0/2)$ ,  $(1, 0/3) \dots (1, 0/\infty)$ .

В области III существуют циклы первого и второго рода, характеризующиеся несколькими нелинейными отображениями по обеим координатам. Граница областей I, III совпадает с границей возникновения цикла второго рода  $(1, 1/1)$ . Это связано с тем, что в данной области параметров система обладает большим коэффициентом усиления в кольце. Характерным также является возникновение циклов первого рода. Это можно объяснить возрастанием симметрии фазового пространства при больших  $\alpha$ ,  $\beta$ .

На рис. 2.11, 2.12 представлены результаты расчета области I соответственно для импульсной и цифровой систем. На практике для обеспечения устойчивости при выборе параметров из этой области необходимо не только задать соответствующим образом параметры системы, но и обеспечить нахождение вектора состояния системы в области фазового пространства  $Q_0$  в начальный момент времени. Так как значение координаты  $x$  в момент времени зависит от начальной частотной расстройки, то указанное

требование эквивалентно ограничению на диапазон допустимых начальных расстроек. Вычислить предельные значения  $\omega_H$  можно воспользовавшись уравнениями (1.3.11) для цифровой и (1.2.10) для импульсной систем.

## 2.2. Система с ограничивающим фильтром в цепи управления

Проанализируем ДСФС для случая ограничивающего фильтра в цепи управления. Поведение системы в этом случае описывается уравнением (1.1.1). Рассмотрим вначале общие свойства ДСФС с пилообразной характеристикой ФД и ограничивающим фильтром. Далее более детально рассмотрим свойства ДСФС с нелинейным ПИФ и нелинейным интегратором. Анализ будем проводить, используя данные, полученные при изучении системы с линейным фильтром. При этом основное внимание будем уделять влиянию на поведение системы нелинейности  $\Phi(y)$ .

### 2.2.1. Общие свойства ДСФС с ограничивающим фильтром

Опишем общие свойства ДСФС с пилообразной характеристикой ФД и ограничивающим фильтром в цепи управления.

Фазовым пространством системы (2.1.1) в данном случае будет ограниченный по координате  $x$  цилиндр (рис. 2.13). Максимальное и минимальное значение координаты  $x$  соответственно равны  $g \pm M$ . ( $M$  - максимальное значение функции  $\Phi(y)$ ). При изменении начальной расстройки  $g$ , согласно (1.1.1), границы фазового цилиндра сдвигаются по координате  $x$ .

Движения в данной системе можно описать подобно выражению (2.1.14):

$$\vec{q}_{n+1} = B([\vec{q}_n]_x) \vec{q}_n + \vec{p}_n \quad (2.2.1)$$

где  $B([\vec{q}_n]_x)$  - нелинейная матрица отображения. Матрица  $B$  зависит от координаты  $x$  вектора состояния системы и равна: матрице  $C_L$  при отображении с одной из границ нелинейности  $\Phi(y)$ , матрице  $T_L$  при отображении из всего остального фазового пространства.

$$C_L = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}; \quad T_L = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 1 \\ -\beta & d \end{bmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Вектор  $\vec{p} = [p_\varphi, p_x]^T$  учитывает влияние нелинейностей  $F(\varphi)$  и  $\Phi(y)$ . Он может принимать следующие значения:

- $[0, g(1-d)]^T$  - при отображении из области  $Q_0$ , за исключением границ  $\Phi(y)$ ;
- $[2m, g(1-d)]^T$  - при отображении из области  $Q_m$ , за исключением границ  $\Phi(y)$ ;
- $[g \pm M, d(g \pm M)]^T$  - при отображении из области  $Q_0$ , с границы  $\Phi(y)$ ;
- $[2m + g \pm M, d(g \pm M)]^T$  - при отображении из области  $Q_m$ , с границы  $\Phi(y)$ .

Отметим следующие общие свойства данной системы.

1. Устойчивость периодического движения периода  $k$  в данной системе определяется собственными значениями матрицы  $A$

$$A = \prod_{i=1}^k B_i, \quad (2.2.3)$$

Из (2.2.3) видно, что в данной системе в принципе могут существовать устойчивые периодические движения даже при отсутствии локальной устойчивости состояния равновесия. В этом состоит принципиальное отличие СФС с ограничивающим фильтром от СФС с линейным фильтром в цепи управления.

2. Определим условия существования состояния равновесия в зависимости от параметров  $\Phi(y)$ . Как видно из рис 2.13, для существования состояния синхронизма необходимо, чтобы его координата  $x$  находилась в интервале  $[-M+g, M+g]$ . Из выражения (2.1.8) легко получить условия, при которых это выполняется

$$\begin{cases} M + g > \alpha g(1-d) / ((1-d)\alpha + \beta) \\ -M + g < \alpha g(1-d) / ((1-d)\alpha + \beta). \end{cases} \quad (2.2.4)$$

При нарушении условий (2.2.4) в системе возможны только движения с постоянным возрастанием или убыванием фазы.

3. Нелинейные отображения в системе с ограничивающим фильтром невозможны, если области  $Q_l$  и  $Q_{-l}$  не попадают в область фазового пространства, ограниченную  $\Phi(y)$  (рис. 2.13). Из выражений для границ областей  $Q_m$  (2.1.10) (2.1.11) для  $m = \pm l$  получим условия, при которых это выполняется

$$\begin{cases} M + g < \alpha \\ M + g < 2 - \alpha \\ -M + g > -2 + \alpha \\ -M + g > -\alpha \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Пусть выполняются условия локальной устойчивости (2.1.19) и параметры системы удовлетворяют неравенствам (2.2.5). Нелинейное отображение за границы фазового цилиндра в этом случае невозможно, а на границах нелинейности  $\Phi(y)$  нет притягивающих точек. Таким образом, система будет глобально устойчива, а система неравенств (2.2.5) дает оценку на область глобальной устойчивости в пространстве параметров системы.

4. При  $d < 1$  система имеет притягивающий слой (2.1.21). Учитывая, что  $g_n = (1-d)g$  легко показать, что при выполнении условия

$$M > |\beta|/(1-d) \quad (2.2.6)$$

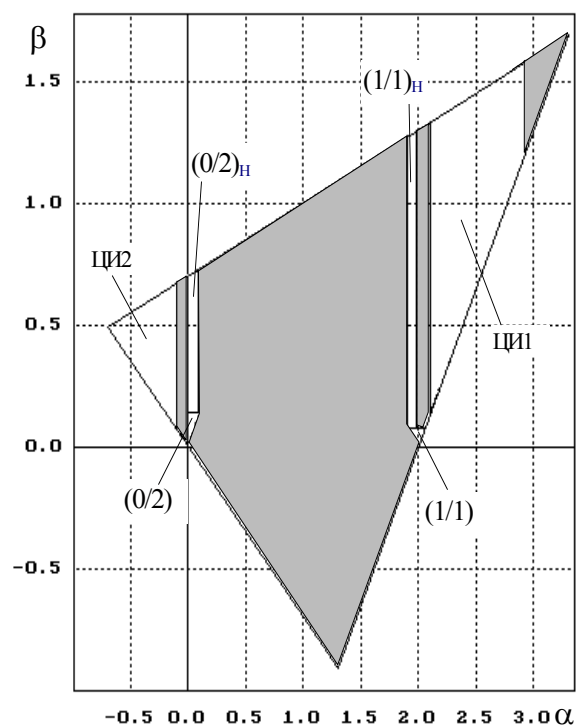
притягивающий слой лежит внутри области фазового пространства, ограниченной  $\Phi(y)$ . Таким образом, при выполнении (2.2.6) нелинейность фильтра не влияет на поведение СФС.

### 2.2.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления

С учетом сформулированных выше общих свойств, рассмотрим поведение системы (1.1.1) при  $d < 1$ . При анализе будем пользоваться методикой, разработанной при изучении систем с линейным фильтром, когда на основе качественного изучения структуры фазового пространства определяются возможные типы движений. Далее качественно-аналитическими методами построим области существования этих движений в пространстве параметров, что в итоге позволит определить области устойчивости системы в целом.

1. Анализ начнем со случая нулевых начальных расстроек ( $g=0$ ). На рис. 2.14, 2.15 представлены характерные разбиения пространства параметров СФС на области существования устойчивых движений для различных  $M, d$ . Штриховкой обозначены области глобальной устойчивости системы.

В центре треугольника локальной устойчивости находится область глобальной устойчивости, которая является объединением областей, удовлетворяющих условиям (2.1.22) и (2.2.5).

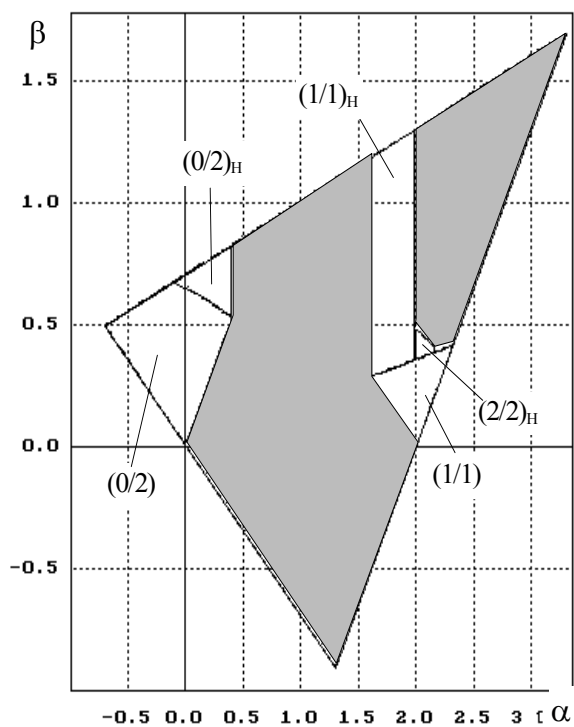


а)

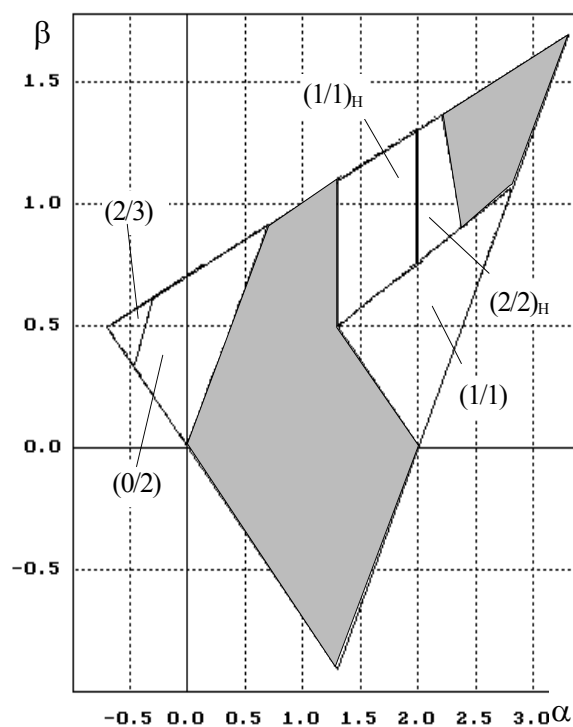


б)

Рис. 2.14. Области существования периодических движений ДСФС с ограничивающим ПИФ для  $M=0.1$ ;  $g=0$ : а)  $d=0.3$ ; б)  $d=0.7$ .



а)



б)

Рис. 2.15. Области существования периодических движений ДСФС с ограничивающим ПИФ для  $d=0.3$ ,  $g=0$ : а)  $M=0.4$ ; б)  $M=0.7$ .

При увеличении  $\alpha, \beta$  возникает периодическое движение первого рода структуры  $(1/1)_H$  (подстрочным индексом  $H$  будем обозначать циклы, хотя бы одна точка которых расположена на границе  $\Phi(y)$ ). Структура фазового пространства, при которой могут существовать эти движения, показана на рис. 2.16. Точка данного цикла располагается на пересечении прямой  $L_{\varphi,1}$  ( $L_{\varphi,-1}$ ) и верхней (нижней) границы  $\Phi(y)$ . Как видно из рисунка, для существования этого движения необходимо, чтобы координата  $\varphi$  пересечения прямой  $L_{x,0}$  и верхней (нижней) границы  $\Phi(y)$  была больше (меньше) чем координата  $\varphi$  пересечения прямой  $L_{\varphi,1}$  ( $L_{\varphi,-1}$ ) и верхней (нижней) границы  $\Phi(y)$ . Можно показать, что для цикла на верхней границе  $\Phi(y)$  все это выполняется при

$$\begin{cases} M(d-1)/\beta > (M+g-2)/\alpha \\ M+g > 2-\alpha \end{cases}, \quad (2.2.7)$$

для цикла на нижней границе  $\Phi(y)$  - при

$$\begin{cases} -M(d-1)/\beta > -(M+g-2)/\alpha \\ -M+g > -2+\alpha \end{cases}. \quad (2.2.8)$$

Условия устойчивости цикла определяются собственными значениями матрицы  $C_L$  и зависят только от  $\alpha$ . Они определяются выражением:

$$0 < \alpha < 2 \quad (2.2.9)$$

Когда точка пересечения прямых  $L_{x,0}$  и  $L_{\varphi,1}$  попадает по  $x$  в пределы  $[-M+g, M+g]$ , нелинейные свойства фильтра перестают влиять на данное движение. Вследствие этого цикл  $(1/1)_H$  исчезает и возникает цикл структуры  $(1/1)$  (кратный захват), который существует в системе с линейным фильтром.

При  $\alpha > 2$  согласно (2.2.9) цикл  $(1/1)_H$  теряет устойчивость. Это приводит к возникновению полосы глобальной устойчивости, которая существует при  $\alpha > 2$  (рис. 2.14).

При дальнейшем увеличении  $\alpha$  в фазовом пространстве реализуется структура, показанная на рис. 2.17. Данная структура фазового пространства характеризуется наличием пересечения областей  $Q_I, (Q_{-I})$  с обеими границами  $\Phi(y)$  а также тем, что координата  $\varphi$  пересечения прямой  $L_{x,0}$  и верхней (нижней) границы  $\Phi(y)$  была больше (меньше), чем координата  $\varphi$  пересечения границы области  $Q_I$  (области  $Q_{-I}$ ) и верхней (нижней) границы  $\Phi(y)$ . При такой структуре фазового пространства становится возможным существование

притягивающего движения, точки которого равномерно заполняют отрезки на границах нелинейности  $\Phi(y)$  (цикла-интервала). Движение этого типа не является периодическим и носит хаотический характер. Подробно его структура и механизм возникновения рассмотрены в приложении I. В дальнейшем будем называть это движение циклом-интервалом первого типа (ЦИ1).

В простейшем варианте все точки ЦИ1 располагаются на границах нелинейности  $\Phi(y)$ , как это показано на рис 2.17. Пример соответствующей структуры фазового пространства приведен на рис. 2.17. Это происходит, когда отображение всех точек отрезка  $(b4, b6)$  происходит на нижнюю границу  $\Phi(y)$  за один шаг. В случае, когда не все точки отрезка  $(b4, b6)$  или  $(b1, b3)$  отображаются за один шаг непосредственно на нижнюю границу нелинейности  $\Phi(y)$ , возникает более сложное движение. Этот цикл-интервал также состоит из конечного числа равномерно заполняемых отрезков, но не все они лежат на границах нелинейности  $\Phi(y)$ . Данное явление происходит в частности при увеличении  $\alpha$ .

Разрушение рассмотренного предельного множества происходит, при попадании его в область притяжения состояния равновесия. Как показал анализ, практически границу исчезновения ЦИ1 можно оценить по попаданию точки  $b3$  в пределы отрезка  $(b7, b8)$ . Из этого отрезка изображающая точка переходит в состояние синхронизма. После этого система становится глобально устойчива. (Правая граница области существования ЦИ1 на рис. 2.14а).

При движении из центральной области глобальной устойчивости в сторону уменьшения  $\alpha$  возникает цикл первого рода периода 2 структуры  $(0/2)_H$  (рис. 2.14б, 2.15а). Точки цикла располагаются на границах нелинейности  $\Phi(y)$  симметрично относительно состояния равновесия. Это движение возникает вследствие ограничения нелинейностью  $\Phi(y)$  цикла первого рода, который существует в системе с линейным фильтром. Структура фазового пространства, характерная для существования данного движения, показана на рис. 2.19. Как и для цикла  $(2/2)_H$ , отличительной особенностью является то, что область  $Q_1$  пересекает только верхнюю границу  $\Phi(y)$  и соответственно  $Q_{-1}$  пересекает только нижнюю границу  $\Phi(y)$ . В данном случае  $\alpha < 1$ , поэтому это эквивалентно выполнению следующих неравенств

$$M+g > \alpha; M+g > -\alpha; -M+g < \alpha; -M+g > -\alpha. \quad (2.2.10)$$



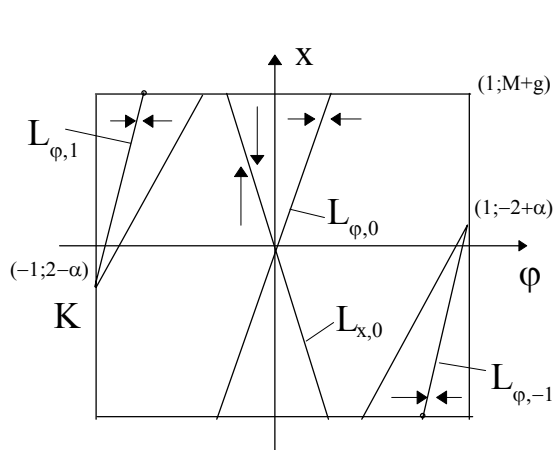


Рис. 2.16

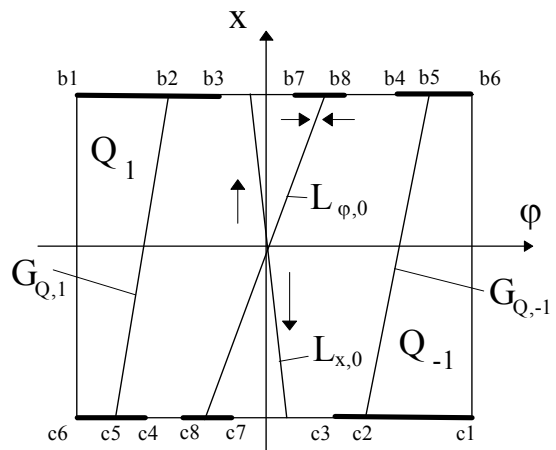


Рис. 2.17

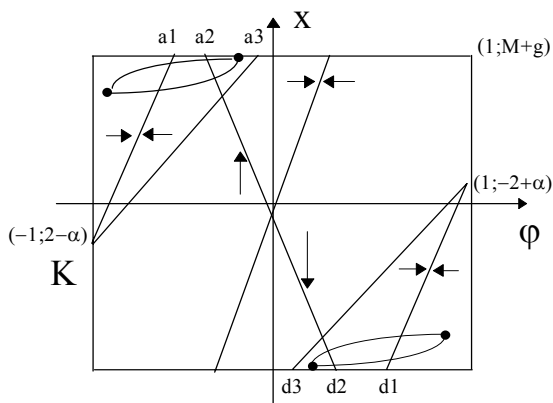


Рис. 2.18

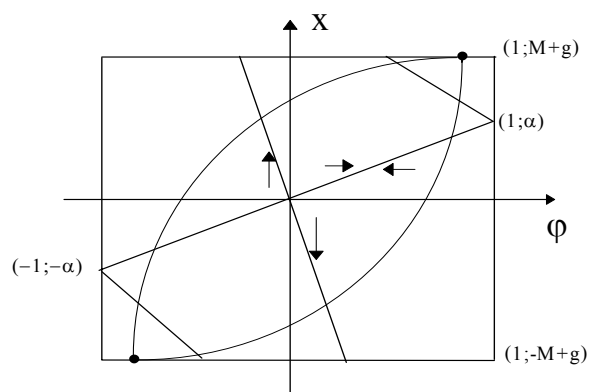


Рис. 2.19

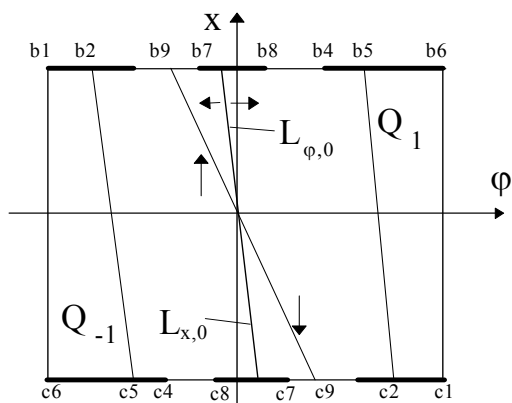


Рис. 2.20

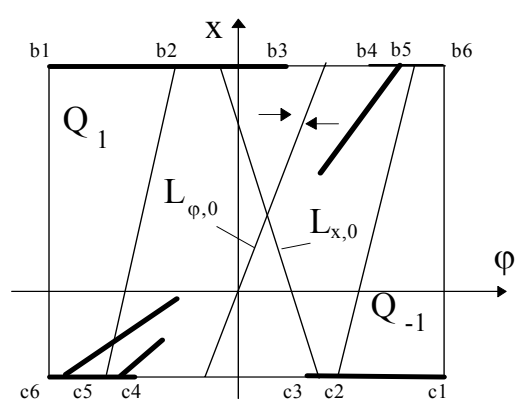


Рис. 2.21

Устойчивость цикла определяется собственными значениями матрицы  $C_L$  и зависит только от  $\alpha$ . Она определяется неравенством

$$0 < \alpha < 2 \quad (2.2.11)$$

При дальнейшем уменьшении  $\alpha$  движение теряет устойчивость, этим обуславливается возникновение области глобальной устойчивости системы, прилегающей к  $\alpha=0$  (рис. 2.14а). При дальнейшем уменьшении  $\alpha$  в фазовом пространстве реализуется структура, показанная на рис. 2.20. Как и в случае существования ЦИ1, области  $Q_I$ ,  $Q_{-I}$  пересекаются с обеими границами нелинейности  $\Phi(y)$ . Вследствие отрицательности  $\alpha$  прямая  $L_{x,0}$  имеет отрицательный наклон, а координата  $\varphi$  точки ее пересечения с верхней границей  $\Phi(y)$  (точка  $b9$ ) меньше координаты  $\varphi$  точки  $b2$ . (соответственно  $c9$  лежит левее  $c2$  на нижней границе  $\Phi(y)$ ). Точка  $b2$  ( $c2$ ) - это пересечение границы области прямой  $G_{Q,-I}$  ( $G_{Q,I}$ ) и верхней (нижней) границы  $\Phi(y)$ . Точка  $b9$  ( $c9$ ) - это пересечение прямой  $L_{x,0}$  и верхней (нижней) границы  $\Phi(y)$ . Возникновение такой структуры фазового пространства ведет к возникновению притягивающего множества, точки которого равномерно заполняют отрезки на границах нелинейности  $\Phi(y)$  (рис. 2.20). Далее будем называть это множество циклом интервалом второго типа (ЦИ2). Подробно его структура описана в приложении I. Это предельное множество также состоит из конечного числа равномерно заполняемых отрезков, но не все они лежат на границах нелинейности  $\Phi(y)$ . Разрушение этого движения также происходит при касании хотя бы одного из отрезков области притяжения состояния равновесия.

Проанализируем изменение структуры пространства параметров при изменениях  $M$ ,  $d$  (рис. 2.14, 2.15). Легко заметить, что при увеличении  $d$  область существования ЦИ2 в пределах границ локальной устойчивости системы уменьшается. Вместе с тем возрастает область существования цикла ( $0/2$ ).

При увеличении  $M$  картина распределения областей существования различных движений в пространстве параметров несколько меняется. С одной стороны увеличение  $M$  ведет к возникновению движений, характерных для системы с линейным фильтром, с другой стороны - к возникновению новых движений и изменению областей существования уже существовавших движений.

Область глобальной устойчивости, обусловленная условиями (2.1.22) и (2.2.5), уменьшается. В пределы границ  $\Phi(y)$  попадают точки кратного захвата. С увеличением  $M$  область существования данного движения возрастает.

При достаточно больших  $M$  потеря устойчивости цикла структуры  $(1/1)_H$  может привести к возникновению цикла периода  $(2/2)_H$ , если в фазовом пространстве реализуется структура, показанная на рис. 2.18. Характерным для этой структуры является выполнение следующих условий: область  $Q_1$  пересекает только верхнюю границу  $\Phi(y)$ , и соответственно  $Q_{-1}$  пересекает только нижнюю границу  $\Phi(y)$ . Это эквивалентно выполнению следующих неравенств:

$$M+g>2-\alpha, -M+g<2-\alpha, M+g>-2+\alpha, -M+g<-2+\alpha. \quad (2.2.12)$$

Также необходимо, чтобы точка  $a2$  (рис. 2.18) находилась между точками  $a1$  и  $a3$ . Точка  $a1$  - это точка пересечения прямой  $L_{\phi,1}$  и верхней границы  $\Phi(y)$ . Точка  $a2$  лежит на пересечении прямой  $L_{x,0}$  и верхней границы  $\Phi(y)$ . Точка  $a3$  лежит на пересечении границы области  $Q_1$  прямой  $G_{Q,1}$  и верхней границы  $\Phi(y)$ . Аналогичные условия накладываются на точки  $d1, d2, d3$ .

Устойчивость данного движения определяется собственными значениями матрицы  $B=C_L T_L$  что эквивалентно неравенству  $|(1-\alpha)^2-\beta|<1$ .

С дальнейшим ростом  $M$  область существования этого цикла возрастает (рис. 2.15). Это объясняется тем, при больших  $M$  соответствующая структура фазового пространства реализуются в большей области параметров системы.

При увеличении  $M$  области существования ЦИ1 и ЦИ2 уменьшаются и при  $M$  порядка 0.2-0.3 исчезают. Это связано с увеличением области притяжения состояния синхронизма в пространстве параметров, что ведет к разрушению движений этого типа. Разрушение ЦИ1 ведет к увеличению области глобальной устойчивости в области больших  $\alpha$ . При малых и отрицательных  $\alpha$ . с увеличением  $M$  происходит возникновение циклов первого и второго рода, не ограниченных нелинейностью  $\Phi(y)$ . Эти движения характерны для систем с линейным фильтром.

2. Рассмотрим поведение системы при отличных от нуля частотных расстройках ( $g \neq 0$ ). На рис. 2.22 представлено последовательное изменение разбиения пространства параметров на области существования различных движений при увеличении расстройки.

Прежде всего следует отметить, что в соответствии с выражением (2.2.4) область существования состояния синхронизма уменьшается. Возрастает область существования кратного захвата, т.к. при увеличении  $g$  его точка быстрее попадает в пределы нелинейности  $\Phi(y)$ . Левая граница области существования циклов  $(1/1)_H$  сдвигается в сторону меньших  $\alpha$ . Это следует из выражений (2.2.7) (2.2.8), соответственно увеличивается область существования цикла  $(2/2)_H$ .

С ростом  $g$  нарушается симметрия фазового пространства. Это ведет к модификации циклов-интервалов. Появляются дополнительные отрезки, не лежащие на границах  $\Phi(y)$ . Подобная ситуация показана на рис. 2.21. С другой стороны возникают условия их полного исчезновения, так как область существования ЦИ начинает пересекаться с областью притяжения состояния равновесия.

Область существования циклов первого рода, которые при  $g=0$  существовали в области малых и отрицательных  $\alpha$ , вследствие нарушения симметрии фазового пространства уменьшается. С этим связано расширение области глобальной устойчивости в области малых  $\alpha$  при небольших значениях  $g$  (рис. 2.22а).

Как уже говорилось, при увеличении  $g$  в СФС с линейным фильтром в области малых  $\alpha$  возникают циклы второго рода. Аналогичный процесс наблюдается и в случае нелинейного фильтра. Области существования циклов данной структуры показаны на рис. 2.22б, 2.22в. При выборе параметров вблизи границ существования цикла часть его точек лежит на границах  $\Phi(y)$ . При дальнейшем увеличении  $g$  или  $M$  все точки циклов данной структуры переходят в область линейных по  $x$  отображений. Этот процесс проиллюстрирован на рис. 2.23.

На рис. 2.24, 2.25 приведены графики полосы захвата (области глобальной устойчивости в координатах  $(S_c, \gamma_H)$ ) для ЦСФС с нелинейным ПИФ. Для малых значений  $m$  и близких к единице  $d$  (рис. 2.24) при малых значениях  $M$  в системе не существует устойчивых предельных циклов, и вследствие этого верхняя граница полосы захвата определяется условием существования состояния равновесия (2.2.4) ( $M=0.05, 0.1$  на рис. 2.24). Таким образом, в этом случае полоса захвата может быть определена аналитически. С увеличением  $M$

возникают циклы второго рода структуры  $(1/k)_H$ , которые и определяют верхнюю границу полосы захвата ( $M=0.4$  на рис. 2.24).

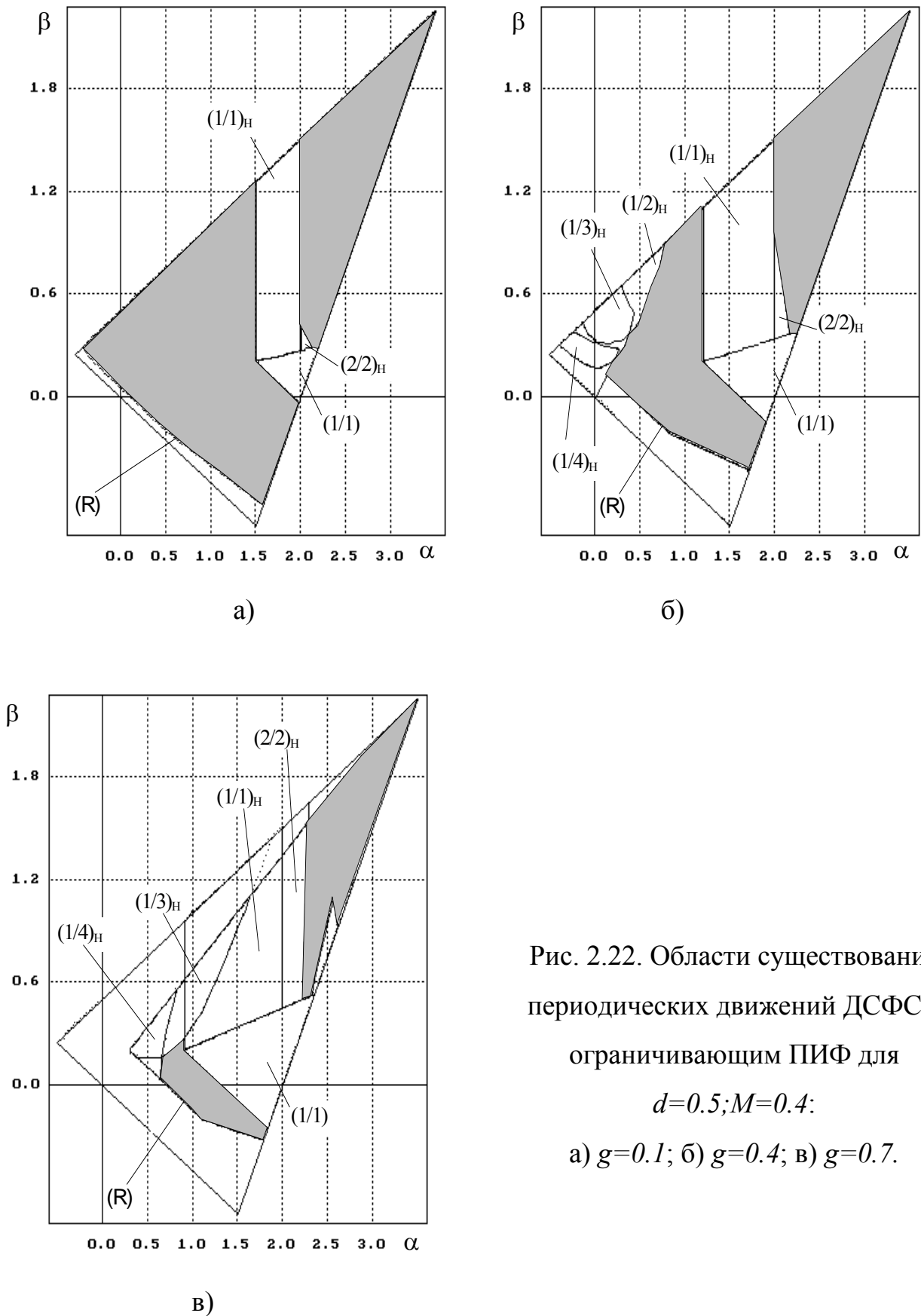


Рис. 2.22. Области существования периодических движений ДСФС с ограничивающим ПИФ для  $d=0.5; M=0.4$ :  
а)  $g=0.1$ ; б)  $g=0.4$ ; в)  $g=0.7$ .

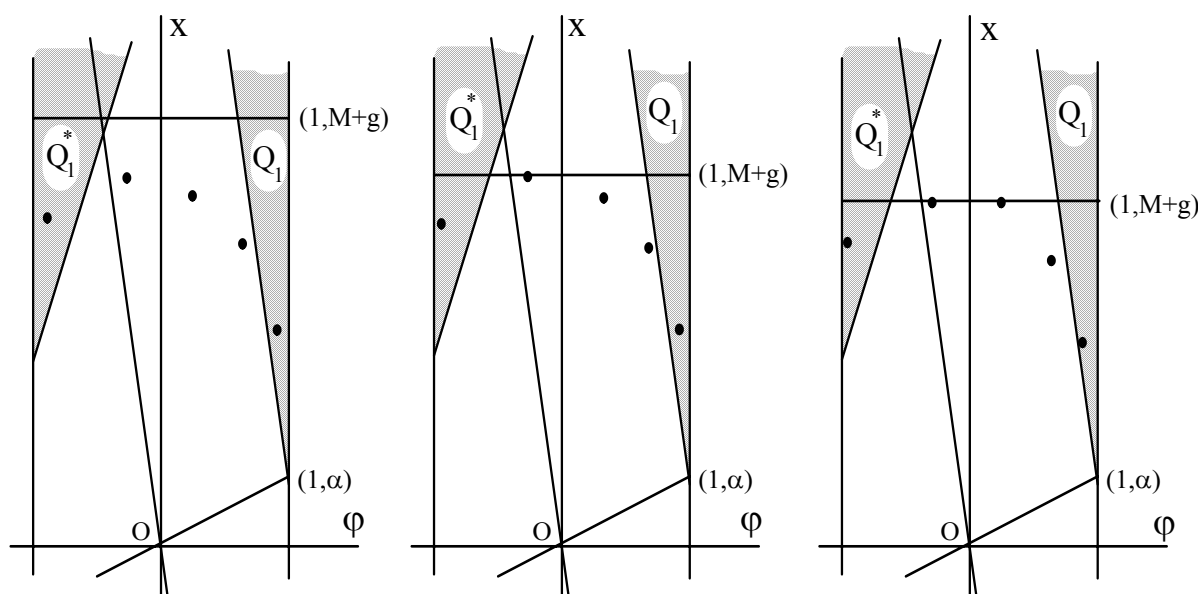


Рис. 2.23. Модификация цикла (1/5) под влиянием нелинейности  $\Phi(y)$ .

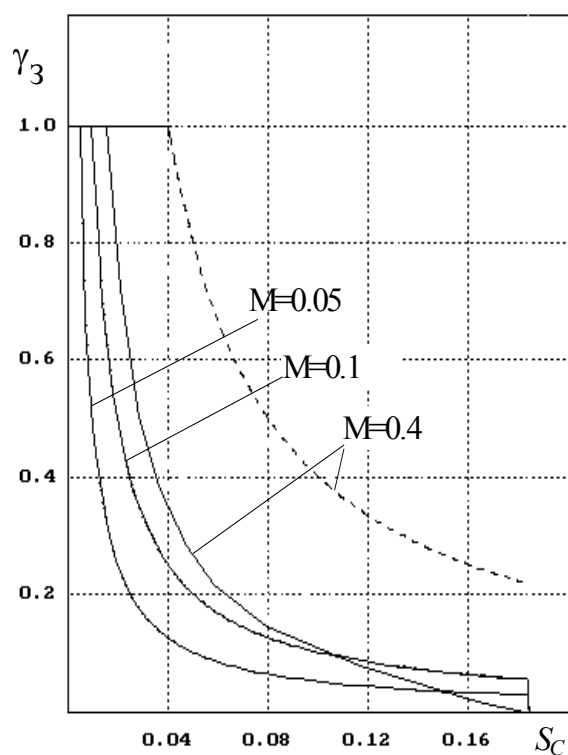


Рис. 2.24. Полоса захвата ЦСФС с ограничивающим ПИФ для  $m=0.5$ ,  $d=0.9$ .

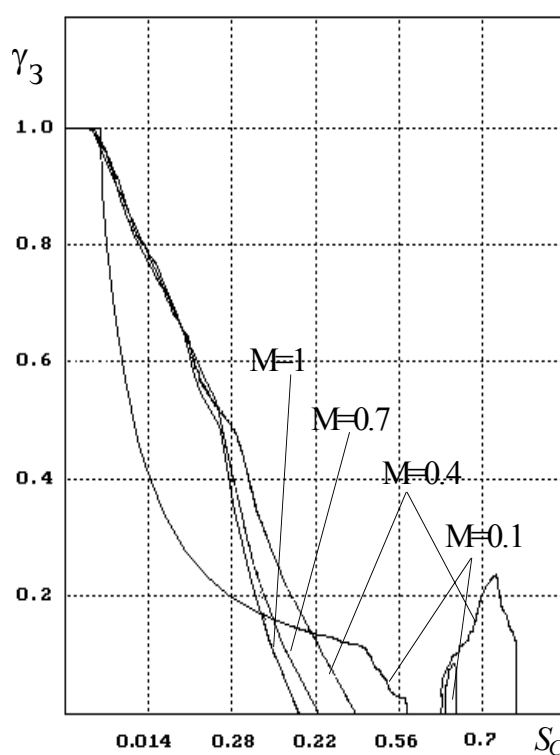


Рис. 2.25. Полоса захвата ЦСФС с ограничивающим ПИФ для  $m=3.5$ ;  $d=0.5$ .

При увеличении  $m$  и уменьшении  $d$  описанные тенденции сохраняются. Вместе с тем полоса захвата может быть разрывной. Ненулевая полоса захвата в области больших  $S_c$  соответствует полосе ОГУ, возникающей в пространстве параметров  $\alpha, \beta$  после потери циклом  $(1/1)_H$  устойчивости (рис. 2.14).

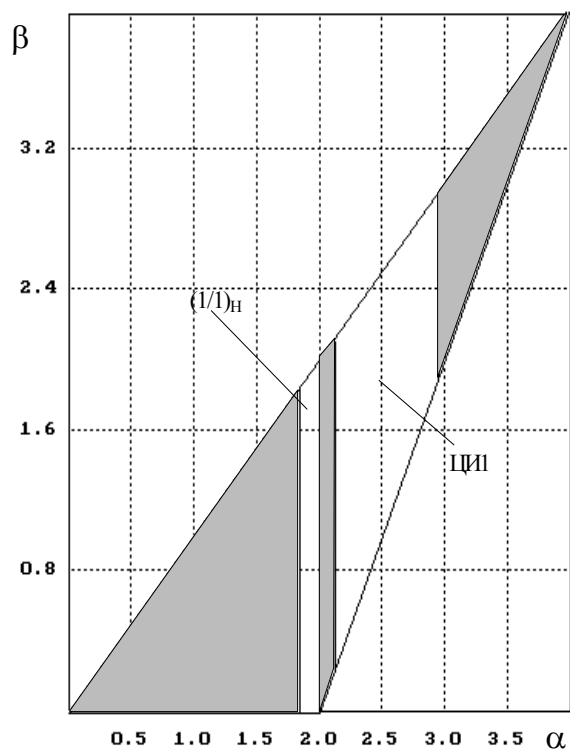
### 2.2.3. Система с интегратором в цепи управления

Рассмотрим основные свойства системы (1.1.1) для случая  $d=1$ , соответствующего системе с нелинейным интегратором в цепи управления. Данный вариант, как уже говорилось, можно рассматривать как предельный случай системы с пропорционально интегрирующим фильтром. Вследствие этого основные закономерности разбиения пространства параметров на области существования различных движений сохраняются. Вместе с тем наблюдается и качественное различие в поведении систем.

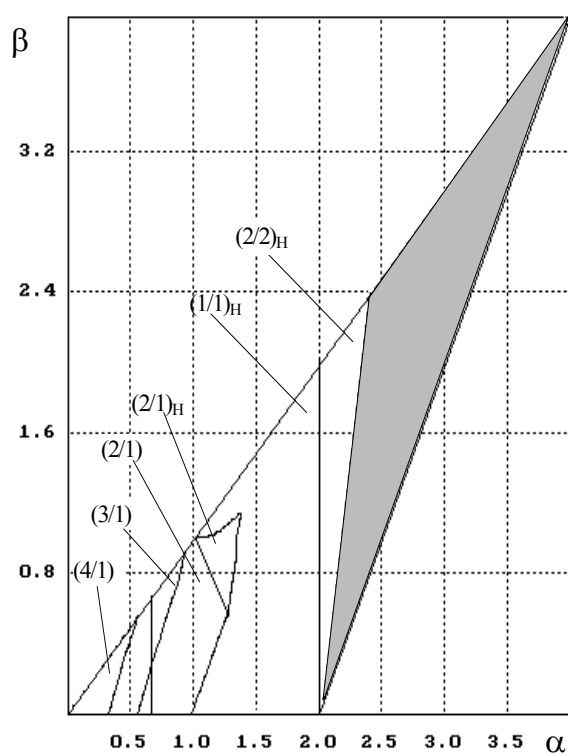
При малых значениях  $M$  (рис. 2.26а) и нулевой начальной расстройке в области малых  $\alpha$  СФС с ограничивающим интегратором глобально устойчива. Это объясняется тем, что, как это было сказано выше, при данном выборе параметров  $\Phi(y)$  области существования ЦИ2 и циклов первого рода уменьшаются и при  $d=1$  исчезают. Разбиение пространства параметров в области больших  $\alpha$  при малых  $M$  аналогично системе с нелинейным ПИФ. Оно характеризуется наличием областей существования цикла структуры  $(1/1)_H$ , дополнительной полосы глобальной устойчивости и ЦИ1.

При увеличении  $M$ , как это было и в системе с ПИФ, область существования ЦИ1 уменьшается, а область существования цикла  $(1/1)_H$  увеличивается. Вместе с тем в области малых  $\alpha$  возникают циклы второго рода структуры  $(1/k)_H$  и структуры  $(1/k)$  (рис. 2.26б). Последние характерны для систем с линейным фильтром. Все это приводит к качественному изменению ОГУ системы. При больших  $M$  СФС будет глобально устойчива только в области больших  $\alpha$ .

Отличительной особенностью данной системы является то, что при изменении  $g$  в пределах  $g < |M|$  согласно (2.2.4) состояние синхронизма существует во всей области локальной устойчивости системы. Это связано с тем, что линий отображения с охранением координаты  $x$   $L_{x,0}$  совпадает с осью ординат. При увеличении (уменьшении)  $g$  границы нелинейности  $\Phi(y)$  просто сдвигаются вверх (вниз) вдоль координаты  $x$ .

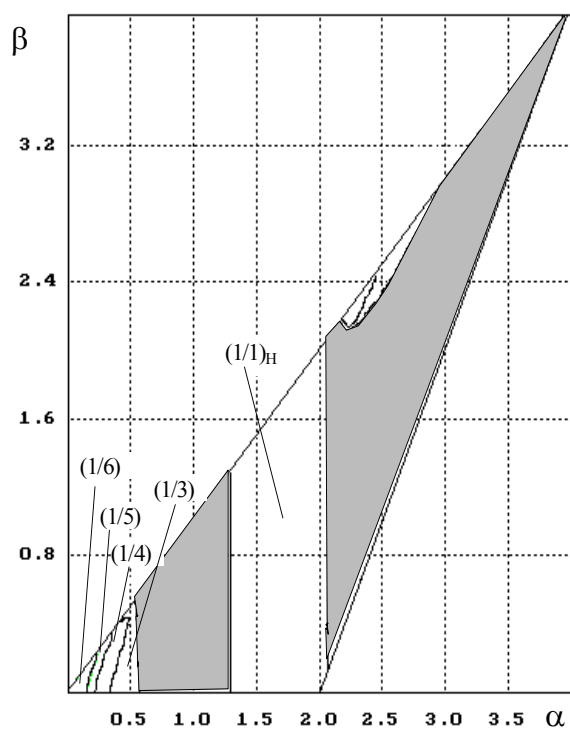


а)

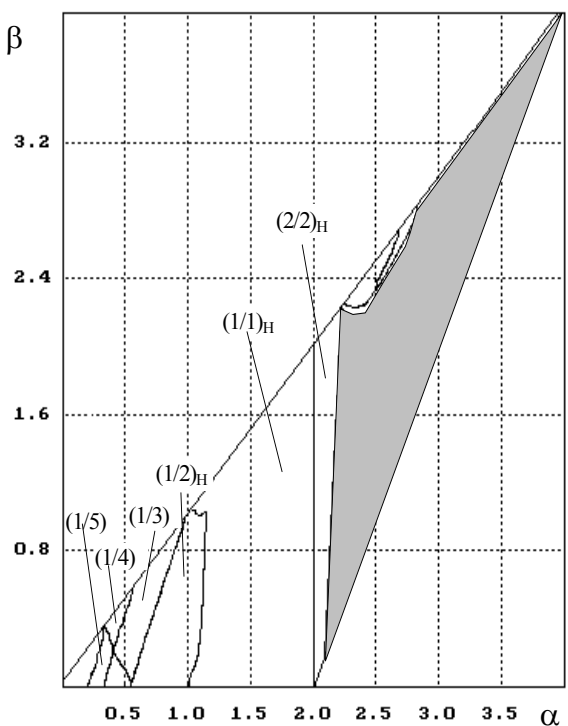


б)

Рис. 2.26. Области существования периодических движений ДСФС с ограничивающим интегратором для  $g=0$ : а)  $M=0.1$ ; б)  $M=1.3$ .



а)



б)

Рис. 2.27. Области существования периодических движений ДСФС с ограничивающим интегратором для а)  $M=0.4, g=0.3$ ; б)  $M=0.7, g=0.4$ .



Отметим также следующее свойство этой системы. Пусть существует цикл, все точки которого лежат по координате  $x$  в пределах  $[-M+g, M+g]$ . При изменении  $g$  координаты точек этого цикла не изменятся до тех пор, пока хотя бы одна точка не ограничится нелинейностью  $\Phi(y)$ . Это утверждение следует из того, что, пока точки периодического движения не попадают под влияние  $\Phi(y)$ , цикл описывается отображениями (2.1.1), в которые  $\Phi(y)$  не входит (координата  $p_x$  вектора  $\vec{p}$  равна нулю).

Качественная структура разбиения пространства параметров при различных  $g$  представлена на рис. 2.27. При увеличении расстройки происходят следующие процессы:

В область, ограниченную  $\Phi(y)$ , попадают движения, существующие в системе с линейным фильтром. Бифуркация возникновения-исчезновения данных циклов происходит так, как это было описано для системы с ПИФ.

Изменяется область существования циклов, обусловленных нелинейностью фильтра.

Область глобальной устойчивости при больших  $g$  перемещается в сторону больших  $\alpha, \beta$ . Это связано с тем, что в области малых  $\alpha, \beta$  возникают циклы, не ограниченные нелинейностью  $\Phi(y)$  и расширением области существования циклов структур  $(1/1)_H, (1/2)_H$ . Также наблюдается возникновение циклов первого рода структуры  $(0/3)_H$ . В свою очередь в области больших  $\alpha, \beta$  при больших расстройках исчезает цикл-интервал и система становится глобально устойчива.

В системе с нелинейным интегратором, в отличие от системы с линейным интегратором, имеется возможность построения полосы захвата. Результаты данного расчета представлены на рис. 2.28, 2.29.

На рис. 2.28 показана зависимость полосы захвата при различных значениях  $M$ . Для  $M > 0.1$  она разделяется областью существования цикла  $(1/1)_H$  на две части (аналогичная ситуация показана на рис. 2.27а). С ростом  $M$  эта область существования этого цикла расширяется, что приводит к уменьшению полосы захвата. Верхняя граница полосы захвата для  $M < 0.5$  определяется условиями существования состояния равновесия. Как это следует из (2.2.4), с ростом  $M$  она сдвигается в область больших расстроек. Это приводит к тому, что при  $M \approx 0.5$  определяющими становятся циклы второго рода по  $\varphi$ . Слева полоса захвата системы ограничивается циклами второго рода. Области их существования с ростом  $M$  сдвигаются в сторону больших  $D$ .

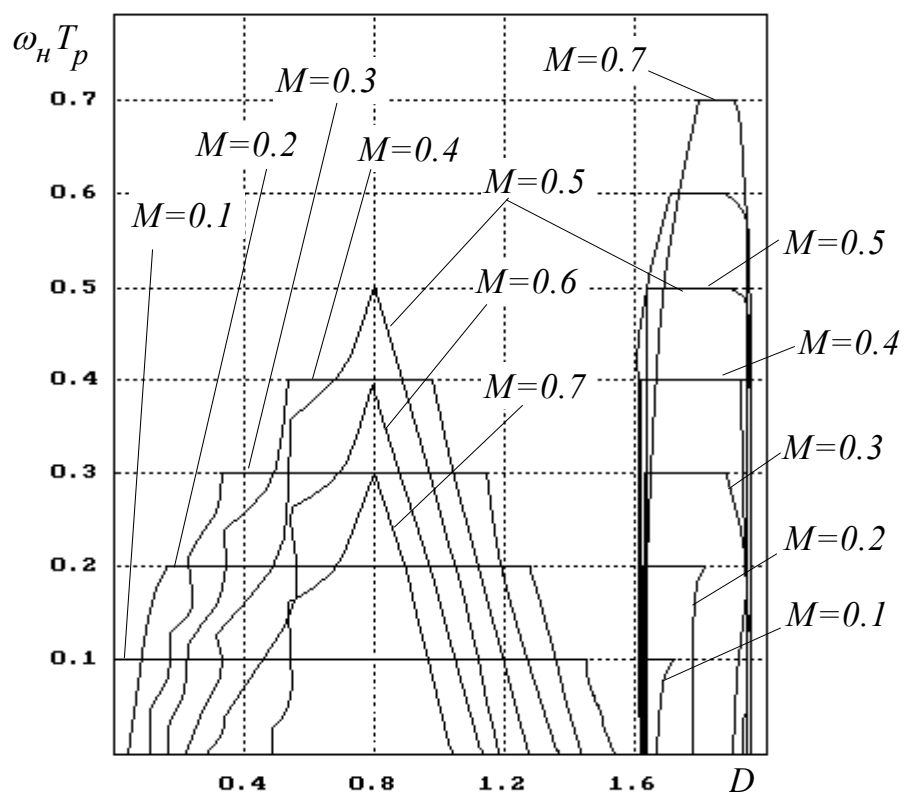


Рис. 2.28. Полоса захвата ИСФС с ограничивающим интегратором для  $m=1$ ;  $\alpha_p=0.5$  и различных значениях  $M$ .

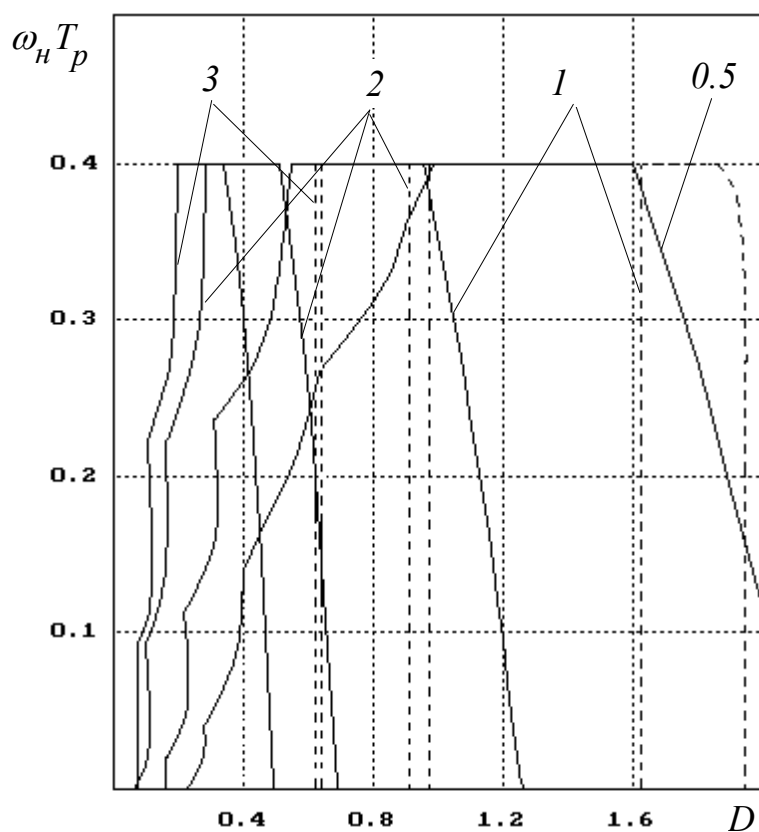


Рис. 2.29. Полоса захвата ИСФС с ограничивающим интегратором для  $M=0.4$ ;  $\alpha_p=0.5$  и различных значениях  $t$ .

При малых  $M$  ограничение слева за счет циклов второго рода незначительно, вследствие этого хорошей оценкой полосы захвата может служить условие (2.2.4), определяющее существование состояния синхронизма и выражения (2.2.7), (2.2.8), определяющие условия существования цикла  $(1/1)_H$ .

На рис. 2.29 показана зависимость полосы захвата от значения коэффициента форсирования  $m$ . Полоса захвата является разрывной. Пунктиром показаны границы полосы захвата в области больших  $D$ , сплошной линией - в области малых  $D$ . Между ними находится область существования цикла структуры  $(1/1)_H$ . С увеличением  $m$  граница локальной устойчивости системы сдвигается в сторону меньших усилений. Это приводит к смещению полосы захвата в область меньших значений  $D$ .

## 2.3. Система с пилообразным фильтром в цепи управления

Проанализируем ДСФС для случая пилообразной характеристики фильтра в цепи управления. Поведение системы в этом случае описывается системой (1.1.1). Наличие двух периодических нелинейностей позволяет рассматривать данную систему на торе. Частный случай системы на торе - СФС с линейным интегратором в цепи управления уже рассматривалась выше.

### 2.3.1. Общие свойства ДСФС с пилообразным фильтром

Рассмотрим общие свойства СФС с пилообразной характеристикой фильтра.

1. На рис. 2.30 показана развертка фазового тора системы. Его отличительной особенностью является то, что в силу периодичности координаты  $x$  наряду с областями нелинейного отображения по координате  $\varphi$  существуют области нелинейного отображения по координате  $x$  - области  $P_m$ ,  $P_m^*$ . Из области  $P_m$  вектор состояния нелинейно отображается в область  $P_m^*$ . Границы областей  $P_m$  определяются прямыми  $G_{P,m}$  подобно прямым  $G_{Q,m}$  (2.1.10), (2.1.11). Для положительных  $m$ :

$$G_{P,m} : x = (M(2m+1) + dg + \beta\phi)/d ; m=0,1,2,3.. \quad (2.3.1)$$

для отрицательных  $m$ :

$$G_{P,m} : x = (M(2m-1) + dg + \beta\phi)/d ; m=-1,-2,-3.. \quad (2.3.2)$$

Аналогично прямым  $L_{\phi,m}$  (прямые отображения с сохранением координаты  $\phi \bmod 2$ ) введем прямые  $L_{x,m}$  отображения с сохранением координаты  $x \bmod 2M$ :

$$L_{x,m} : x = g - (2mM + \beta\phi)/d ; m=\pm 1, \pm 2, \pm 3.. \quad (2.3.3)$$

В данной системе нелинейность  $\Phi(y)$  ограничивает область существования состояния равновесия. Как и в системе с ограничивающим фильтром, оно существует при выполнении условия (2.2.4).

2. Движения в системе можно описать подобно движениям в системе с линейным фильтром:

$$\vec{q}'_{n+1} = T_L \vec{q}_n + \vec{r} , \quad \vec{q}_{n+1} = \vec{q}'_{n+1} + \vec{p}_n$$

или

$$\vec{q}_{n+1} = T_L \vec{q}_n + \vec{r} + \vec{p}_n . \quad (2.3.4)$$

В отличие от выражения (2.1.14) в данном случае вектор  $\vec{p}$  учитывает нелинейные отображения как по координате  $\phi$ , так и по координате  $x$ . Его координаты вычисляются следующим образом:

$$\vec{p}_n = [-2m, -2uM]^T , \quad (2.3.5)$$

где  $m = ([\vec{q}'_{n+1}]_{\phi} + 1) \bmod 2$  - номер периода фазового тора по  $\phi$ , на который происходит отображение;  $u = ([\vec{q}'_{n+1}]_x + M) \bmod 2M$  - номер периода фазового цилиндра по  $x$ , на который происходит отображение.

Будем называть циклом  $(u,v/k)$  периодическое движение периода  $k$ , при котором абсолютное приращение координат  $\phi$  и  $x$  равно  $2u$  и  $2Mv$  соответственно. В силу сложности движений в ряде случаев для конкретизации структуры цикла будем указывать изменения координат на каждом шаге.

Сформулируем необходимые и достаточные условия существования периодических движений в системе.

а) Условие замыкания цикла. Оно формулируется аналогично системе с линейным фильтром, выражается формулой (2.1.16). Необходимо учитывать, что для этого случая в (2.1.16) вектор  $\vec{p}$  рассчитывается по формуле (2.3.5).

б) Все точки цикла должны находиться в соответствующих им, согласно структуре цикла, областях  $Q_m, P_m$ . Точки, из которых происходит линейное

отображение, должны принадлежать пересечению областей  $Q_0$  и  $P_0$ . Точки, из которых происходит нелинейное отображение, - соответствующей области  $Q_m$ ,  $P_m$  ( $m \neq 0$ ). Это утверждение эквивалентно требованию попадания всех точек цикла заданной структуры в отрезок  $[-1,1]$  по координате  $\varphi$  и в отрезок  $[-M+g, M+g]$  по координате  $x$ .

Если выполнены оба этих условия, то, согласно вышесказанному, цикл существует, и наоборот, если цикл существует, то эти условия автоматически выполняются.

3. Аналогично притягивающему слою по координате  $x$  в системах с линейным фильтром в данной системе может существовать притягивающий слой по координате  $\varphi$  (попав в него, вектор состояния никогда его не покидает). Легко видеть, что данный слой существует при выполнении условия

$$0 < \alpha < 2 \quad (2.3.6)$$

и определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} \varphi > \min\left(\frac{-M+g}{\alpha}, \frac{M+g}{\alpha-2}\right) \\ \varphi < \max\left(\frac{-M+g}{\alpha-2}, \frac{M+g}{\alpha}\right) \end{cases} \quad (2.3.7)$$

4. Как и в системе с ограничивающим фильтром, притягивающий слой по  $x$  будет лежать в пределах  $\Phi(y)$  при выполнении условия

$$M > |\beta|/(1-d). \quad (2.3.8)$$

Заметим, что при выполнении (2.3.8) нелинейное отображение по координате  $x$  невозможно (рис. 2.30), так как в этом случае координата  $x$  пересечения прямой  $L_{x,0}$  и прямых  $\varphi = 1$  и  $\varphi = -1$  находится в пределах отрезка  $[-M+g, M+g]$ , который определяется нелинейностью  $\Phi(y)$ . Т.е. поведение системы совпадает с поведением СФС с линейным фильтром.

Аналогично легко показать, что нелинейное отображение по координате  $\varphi$  невозможно при выполнении условий

$$\begin{cases} M+g < \alpha \\ M+g < 2-\alpha \\ -M+g > -\alpha \\ -M+g > -2+\alpha \end{cases}, \quad (2.3.9)$$

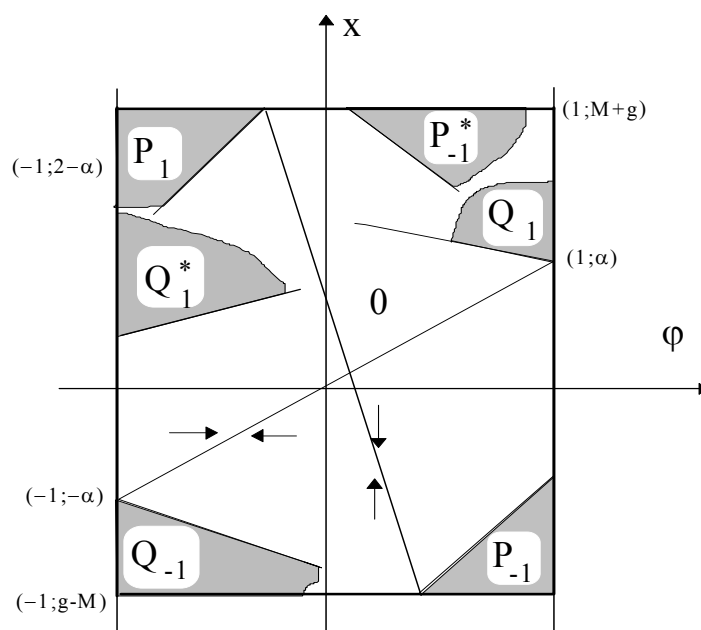


Рис. 2.30. Развертка фазового тора СФС с пилообразной характеристикой ФД и нелинейным периодическим фильтром.

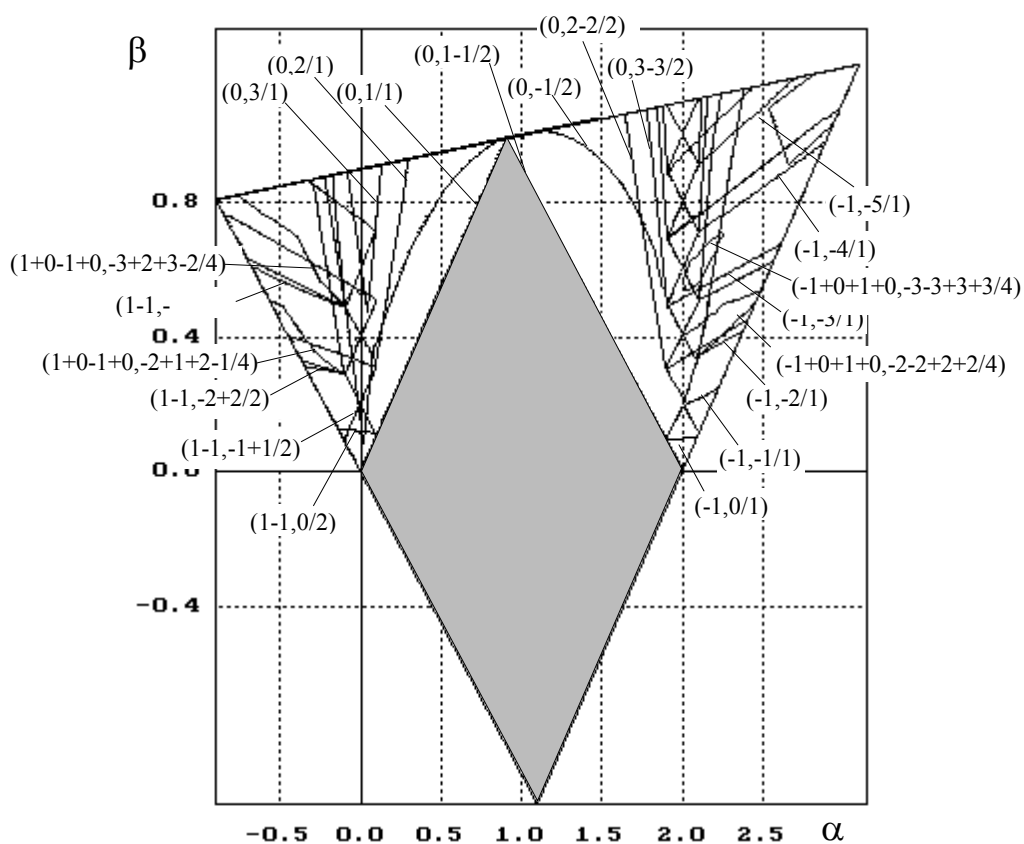


Рис. 2.31. Области существования периодических движений ДСФС с нелинейным ПИФ для  $d=0.1$ ;  $M=0.1$ ;  $g=0$ .

т.к. в этом случае координата  $x$  пересечения прямой  $L_\varphi$  и прямых  $\varphi = 1$  и  $\varphi = -1$  находится за пределами отрезка  $[-M+g, M+g]$ , который определяется нелинейностью  $\Phi(y)$ . Т.е. при условии (2.3.9) поведение системы подобно поведению СФС с линейным фильтром.

Пересечение областей, определяемых неравенствами (2.3.8) и (2.3.9), можно рассматривать в качестве оценки на ОГУ системы, т.к. при этом невозможно нелинейное отображение ни по одной из координат.

5. Как и в системе с линейным фильтром, все периодические движения, возможные в данной системе, будут устойчивы при выполнении условий локальной устойчивости стационарного состояния. В самом деле, в любой точке фазового пространства отображение вектора состояния будет определяться одной и той же матрицей  $T_L$ .

6. Пусть существует устойчивое периодическое движение произвольной структуры, все точки которого находятся в пределах периода фазового тора. При уменьшении  $M$  до некоторого значения  $M=M_l$  точка цикла с наибольшим значением  $|x|$  выйдет за границы  $\Phi(y)$ . Это приведет к разрушению движения, так как перестанут выполняться условия его существования. Таким образом, при изменении  $M$  бифуркации рождения-исчезновения циклов происходят при переходе вектора состояния одной из точек цикла через границу  $\Phi(y)$ .

### **2.3.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления**

Рассмотрим основные свойства системы с пилообразным пропорционально-интегрирующим фильтром. Для этого воспользуемся разработанной ранее методикой и сформулированными выше общими свойствами ДСФС с пилообразным фильтром.

На рис. 2.31-2.33 в пространстве параметров  $\alpha, \beta$  показаны области существования различных периодических движений при нулевой начальной расстройке. Штриховкой отмечена область глобальной устойчивости системы.

При анализе приведенных результатов установлено, что в центре области локальной устойчивости при  $g=0$  всегда существует ОГУ. Границы ее совпадают с ОГУ системы с линейным фильтром при  $g=0$ . При выполнении неравенства (2.3.8)  $\Phi(y)$  не влияет на поведение системы, поэтому ограничение

ОГУ происходит циклом второго рода  $(1,0/1)$  (кратный захват) с одной стороны и циклом первого рода  $(1-1,0/2)$  с другой стороны, как это и было в системе с линейным фильтром. Когда (2.3.8) не выполняется, на границах ОГУ возникают циклы, существование которых обусловлено влиянием как  $F(\varphi)$ , так и  $\Phi(y)$ . Это цикл  $(0,1-1/2)$  на правой границе ОГУ и цикл  $(0,1/1)$  на левой границе ОГУ.

При малых значениях  $M$  при движении из ОГУ в сторону больших  $\alpha$ ,  $\beta$  (вправо вверх) и меньших  $\alpha$  (влево вверх) качественная картина распределения областей существования различных периодических движений в пространстве параметров повторяется (рис. 2.31). Это объясняется тем, что в период фазового тора попадают новые области  $P_m$ . В результате этого возникают семейства циклов с одинаковым периодом, точки которых располагаются на различных периодах нелинейности  $\Phi(y)$ . Причем циклы одного семейства имеют подобные области существования в пространстве параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Например, при движении в сторону увеличения  $\alpha$ ,  $\beta$  возникает цикл структуры  $(0,-2+2/2)$ . Граница возникновения данного цикла проходит вдоль той же прямой  $\beta=(2-\alpha)(1-d)$ , что и граница возникновения цикла  $(1,0/1)$  (первого кратного захвата) в системе с линейным фильтром. Данный цикл принадлежит семейству циклов периода два структуры  $(0,m-m/2)$   $m=1,2,3..$  Точки данных циклов располагаются на пересечении прямой  $x=(\alpha-2)\varphi$  и прямых  $x=(\beta\varphi+(1-d)g\pm 2Mm/(1+d))$  симметрично относительно состояния равновесия системы. С дальнейшим увеличением  $\alpha$ ,  $\beta$  возникают циклы этой структуры с большими значениями  $m$ . Это связано с попаданием точек этих циклов в период фазового тора.

В данной системе, подобно циклам второго рода по  $\varphi$  в системе с линейным фильтром, возникают циклы второго рода по  $x$ . Область существования циклов данного типа примыкает к верхней границе локальной устойчивости. В области больших  $\alpha$  данные циклы имеют структуру  $(0,-m+(m+1)/2)$ . На границе области (2.3.9) возникает семейство циклов структуры  $(\pm 1;-m/1)$   $m=\pm 1, \pm 2...$  Движения этого типа возникают на пересечении прямых  $L_{x,m}$  и прямых  $L_{\varphi,\pm 1}$ . Области существования циклов этого семейства касаются прямой  $\alpha=2-M-g$ . При движении от этой границы в сторону увеличения  $\alpha$  возникают семейства циклов больших периодов. Например, циклы периода 4.



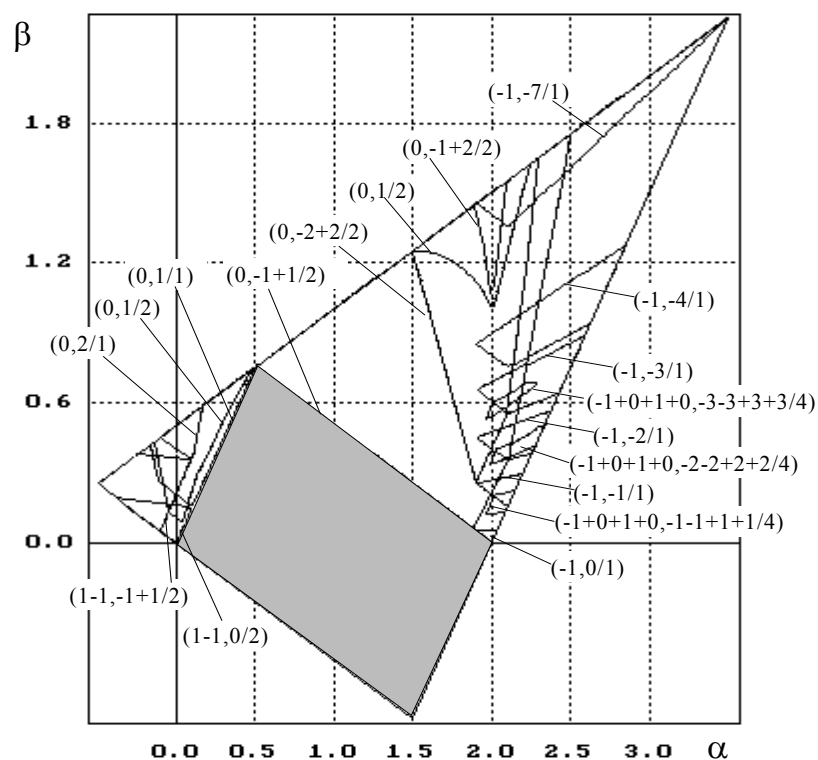


Рис. 2.32. Области существования периодических движений ДСФС  
с нелинейным ПИФ для  $d=0.5$ ;  $M=0.1$ ;  $g=0$ .

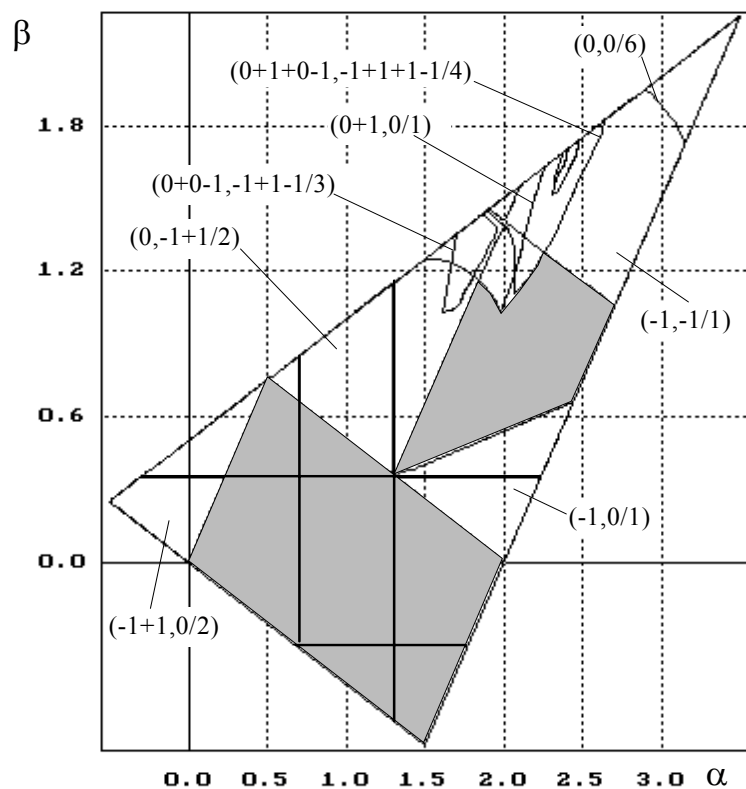


Рис. 2.33. Области существования периодических движений ДСФС  
с нелинейным ПИФ для  $d=0.5$   $M=0.7$ ;  $g=0$ .

При движении из ОГУ в сторону уменьшения  $\alpha$  первым возникает пара циклов структуры  $(0, \pm 1/1)$ , принадлежащих семейству циклов структуры  $(0, \pm m/1)$ . Точки движений этого семейства располагаются на пересечении прямой  $L_{\varphi,0}$  и прямых  $L_{x,m}$ . С практической точки зрения циклы этого типа интересны тем, что при попадании системы в такой цикл координата  $\varphi$  с течением времени остается неизменной. Таким образом, циклы структуры  $(0, \pm m/1)$  можно рассматривать как аналоги состояния синхронизма ( $C_m$ ). Поведение системы вблизи  $C_m$  определяется (2.3.4), где вектор  $\bar{p}_n = [0, -2mM]^T$ . Таким образом, от основного состояния синхронизма они отличаются тем, что нелинейный фильтр на каждой итерации переполняется и сбрасывается  $m$  раз. Координаты цикла  $C_m$  легко получить из (2.1.7), (2.3.3).

$$\varphi_{C_m} = \frac{dg - 2Mm}{d\alpha + \beta} \quad (2.3.10)$$

$$x_{C_m} = \frac{\alpha(dg - 2Mm)}{d\alpha + \beta}.$$

Правая граница возникновения  $C_{\pm 1}$  проходит вдоль той же прямой  $\beta = \alpha(1+d)$ , что и граница возникновения цикла  $(0/2)$  в системе с линейным фильтром. Циклы этого семейства больших периодов возникают при дальнейшем уменьшении  $\alpha$  (рис. 2.31, 2.32). Из (2.3.10) следует, что  $C_m$  могут существовать даже тогда, когда не выполняются условия (2.2.4), т.е. не существует основное состояние синхронизма.

На границе области, определяемой условием (2.3.9), возникают циклы структуры  $(1-1; -m+m/2)$ . Области существования этих циклов касаются прямой  $\alpha = M+g$ .

К верхней границе области локальной устойчивости примыкают области существования циклов второго рода по  $x$ . Это семейство циклов имеют структуру  $(0; -(m+1)-m/2)$ . (рис. 2.31).

При увеличении  $d$  количество циклов одного семейства, существующих в пределах области локальной устойчивости при больших  $\alpha, \beta$ , увеличивается. В свою очередь количество циклов в пределах области локальной устойчивости при малых  $\alpha, \beta$  уменьшается. На рис. 2.32 для данного случая представлена качественная картина расположения областей существования циклов различных семейств.

При увеличении  $M$  области существования циклов больших периодов рассмотренных ранее структур выходят за границы области локальной устойчивости (рис. 2.33). Это приводит к возникновению дополнительной области глобальной устойчивости между областями существования циклов  $(0; -1+1/2)$  и  $(1/1)$ . С увеличением  $M$  эта область сдвигается в сторону больших  $\beta$ .

На рис. 2.34, 2.35 в плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  приведены области существования различных периодических движений в системе с ненулевой начальной расстройкой ( $g \neq 0$ ). Основные результаты анализа сводятся к следующему.

При увеличении начальной расстройки область существования состояния равновесия уменьшается. Вместе с тем происходит трансформация периода фазового тора, его симметрия нарушается. Это приводит к значительному уменьшению областей существования циклов первого рода. Вследствие этого происходит некоторое расширение области глобальной устойчивости при малых  $\alpha$  (рис. 2.34). При дальнейшем увеличении расстройки возникают циклы второго рода как по  $x$  (рис. 2.34, 2.35) так и по  $\varphi$ . При малых  $M$  преобладают циклы по  $x$ . С увеличением  $M$  границы фазового тора по  $x$  расширяются, и вследствие этого расширяются области существования циклов второго рода по  $\varphi$ . С увеличением  $g$  области существования циклов второго рода возрастают.

На рис. 2.36-2.37 приведены графики расчета полосы захвата ЦСФС с пилообразным ПИФ в координатах  $(S_C, \gamma_3)$ . Для малых  $m$  и близких к единице  $d$  полоса захвата системы определяется в основном циклами второго рода по  $x$ , когда нелинейность  $\Phi(y)$  влияет на поведение системы, т.е. выполняется условие (2.3.8) (для  $M < 0.4$ , рис. 2.36). С ростом  $M$  это влияние исчезает, и полоса захвата совпадает с данными для системы с линейным фильтром. При уменьшении  $d$  и увеличении  $m$  наблюдаются следующие закономерности. При уменьшении  $M$  верхняя граница полосы захвата сначала перемещается в сторону больших  $\gamma_H$  (Рис. 2.37а). При дальнейшем увеличении  $M$  верхняя граница полосы захвата перемещается в сторону меньших значений, вместе с тем возникает область неустойчивости системы при больших  $S_C$ , которая уменьшается с ростом  $M$  (рис. 2.37б). Данная область обуславливается циклами структуры  $(0, m-m/2)$ .

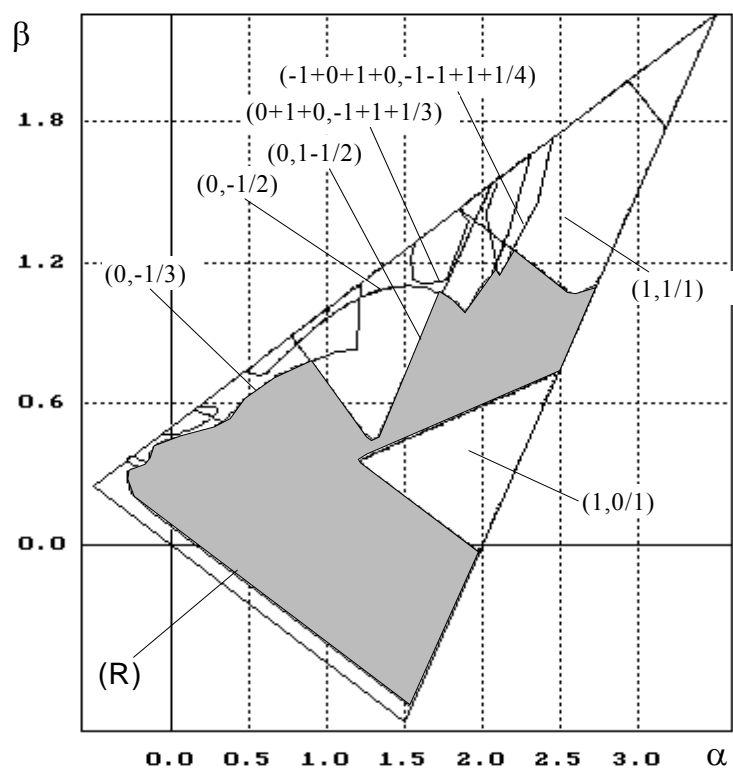


Рис. 2.34. Области существования периодических движений ДСФС с нелинейным ПИФ для  $d=0.5$ ;  $M=0.7$ ;  $g=0.1$ .

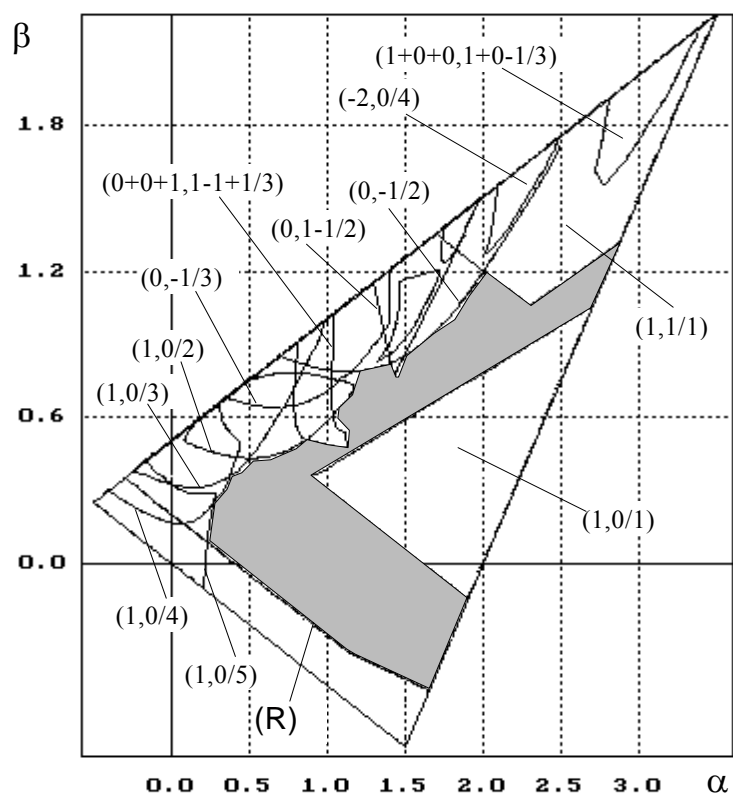


Рис. 2.35. Области существования периодических движений ДСФС с нелинейным ПИФ для  $d=0.5$ ;  $M=0.7$ ;  $g=0.7$ .

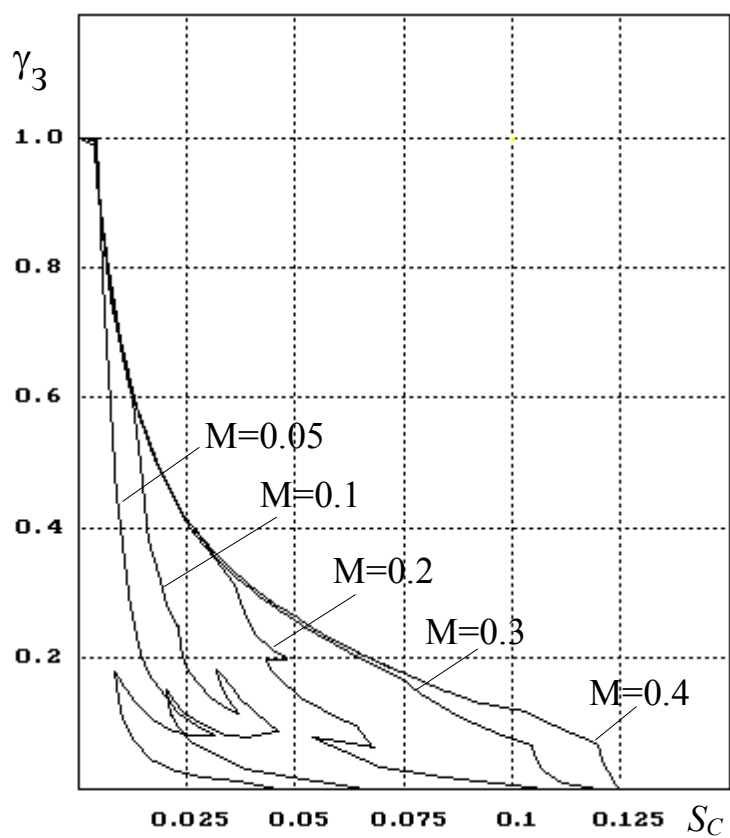
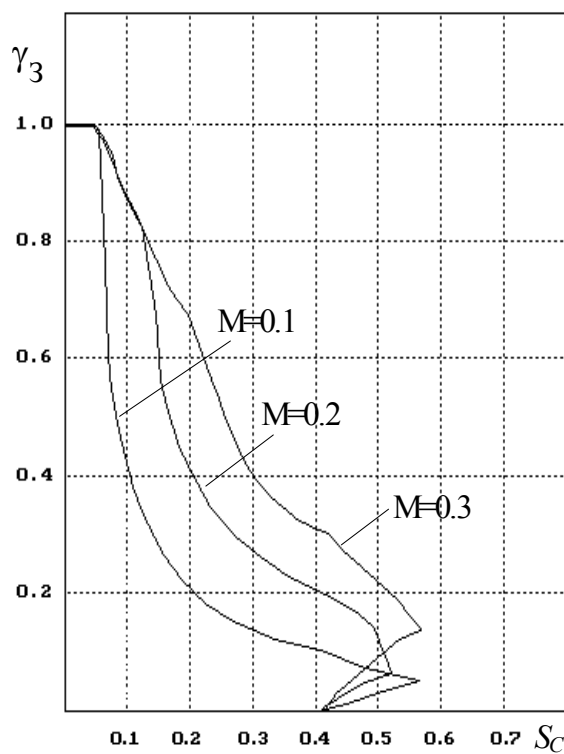
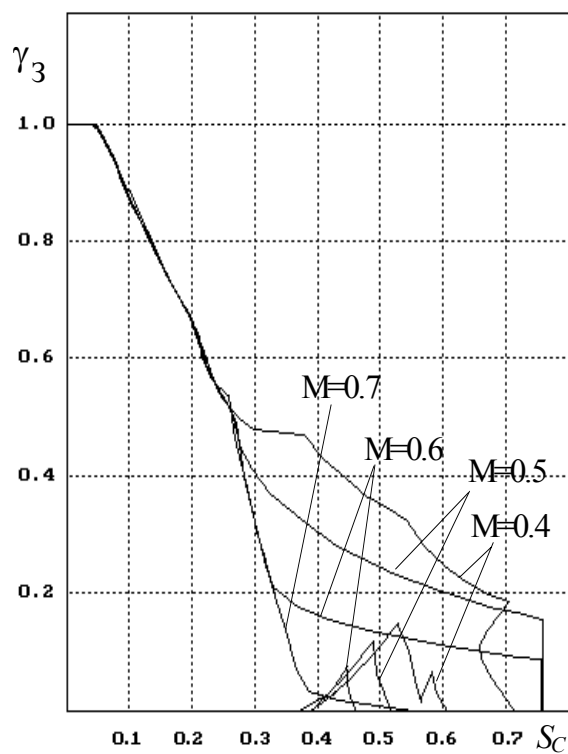


Рис. 2.36. Полоса захвата ЦСФС  
с пилообразным ПИФ для  $m=0.5$ ;  $d=0.9$ .



а)



б)

Рис. 2.37. Полоса захвата ЦСФС с пилообразным ПИФ для  $m=3.5$ ;  $d=0.5$ .

### 2.3.3. Система с интегратором в цепи управления

Основной отличительной особенностью этой системы, по сравнению с СФС с ПИФ, является то, что нижняя граница возникновения цикла структуры  $(0, 1-1/2)$ , который в системе с ПИФ определял границу ОГУ, совпадает с нижней границей локальной устойчивости системы. При  $M < 1$  правая граница области существования этого цикла определяет границу ОГУ системы. Сверху ОГУ ограничивается циклом первого рода структуры  $(0-1+0+1, 1-1+1-1/4)$  и циклом второго рода структуры  $(1, 1/1)$ . Динамика изменения ОГУ системы в зависимости от  $M$  ( $M < 1$ ) показана на рис. 2.38. С увеличением  $M$  область глобальной устойчивости расширяется. При  $M = 1$  поведение системы полностью совпадает с поведением рассмотренной ранее СФС с линейным интегратором. Соответственно и ОГУ системы при  $M = 1$  совпадает с ОГУ ДСФС с линейным интегратором. Разница состоит в том, что в рассматриваемом случае отсутствует область кратных захватов.

Установлено, что для  $M > 1$ , ОГУ системы ограничивается снизу следующими движениями:

1) Циклами первого рода структуры  $(1-1+1-1, 1+0-1+0/4)$ . Этот цикл подобен циклу периода четыре, ограничивающему ОГУ при  $M < 1$ . Отличие заключается в том, что структура движения по координате  $\varphi$  для этого цикла соответствует структуре движения по  $x$  ранее рассмотренного цикла. И наоборот, структура движения по  $x$  соответствует структуре движения по  $\varphi$ .

2) Циклами второго рода по  $x$  структуры  $(0, 1/2)$ .

3) Циклами первого рода по  $x$  структуры  $(0, 1-1/2)$ .

Также следует отметить, что при малых  $M$  в области больших  $\beta$  существует дополнительная небольшая область ОГУ. Она возникает на верхней границе области существования цикла структуры  $(1, 1/1)$  (рис. 2.38). С увеличением  $M$  эта подобласть глобальной устойчивости перемещается в сторону больших  $\beta$  и при  $\beta \approx 0.7$  выходит за границы локальной устойчивости системы.

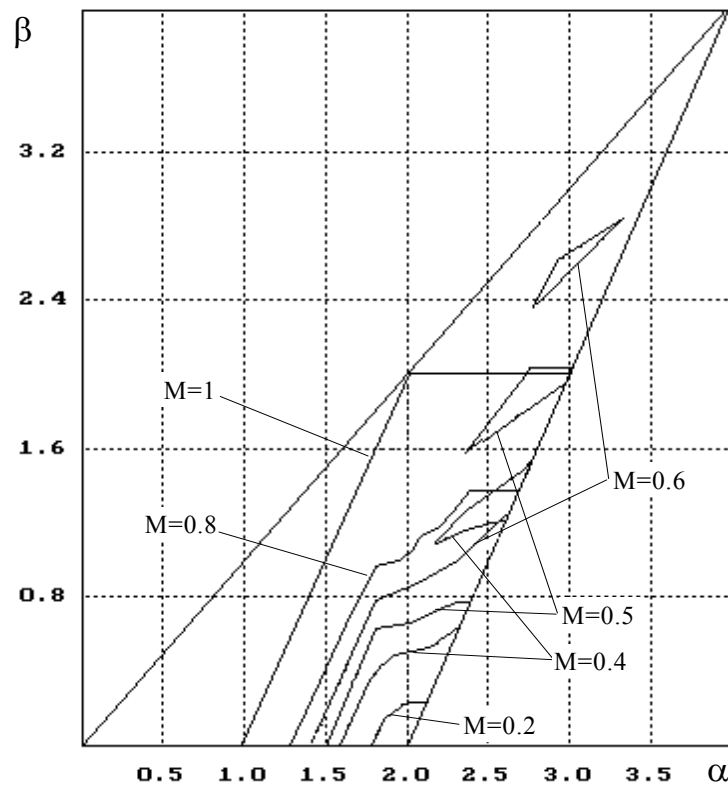


Рис. 2.38. Области глобальной устойчивости ДСФС с пилообразным интегратором для  $g=0$ ,  $M < 1$ .

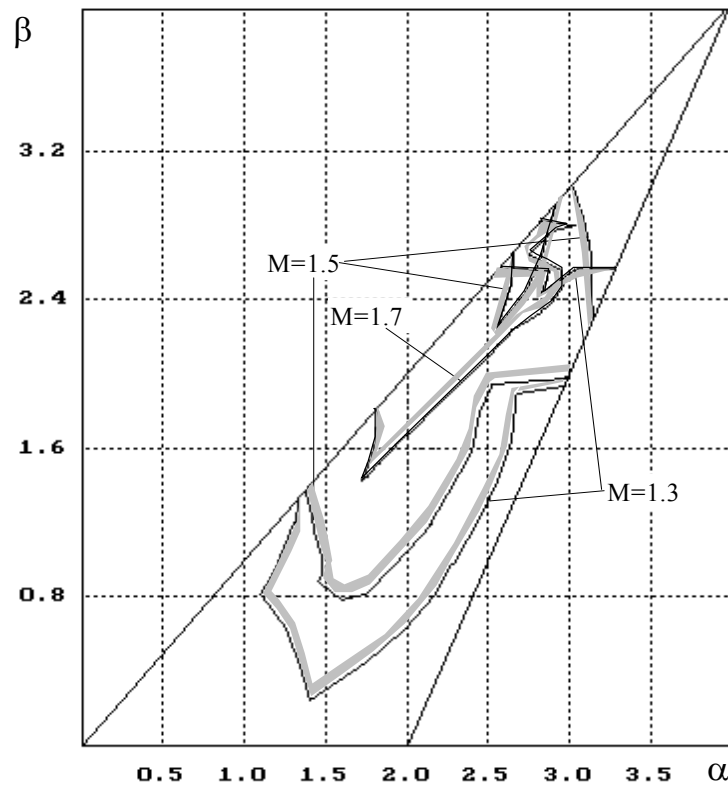


Рис. 2.39. Области глобальной устойчивости ДСФС с пилообразным интегратором для  $g=0$ ,  $M > 1$ .

Сверху основная область ОГУ ограничивается циклом второго рода структуры  $(1,1/1)$  и движениями таких структур, области существования которых лежат в около левой нижней границы циклов семейства  $(1,m/1)$  (рис. 2.31,2.32). Это циклы периода 2,3,4. Динамика изменения ОГУ в данном случае в зависимости от  $M$  ( $M>1$ ) показана на рис. 2.39. С увеличением  $M$  нижняя граница ОГУ сдвигается в сторону больших  $\beta$ , а правая граница - в сторону меньших  $\alpha$ . Все это ведет к уменьшению области параметров, где СФС глобально устойчива с увеличением  $M$ .

## 2.4. Выводы

1. В результате выполненных исследований изучены основные динамические свойства обобщенной модели ДСФС с пилообразной характеристикой фазового детектора и различными нелинейными фильтрами в цепи управления: пропорционально-интегрирующим фильтром ограничивающего и пилообразного типа, астатическим фильтром ограничивающего и пилообразного типа. К числу основных свойств относятся: области существования возможных в системе периодических и квазипериодических движений, условия возникновения предельных циклов, их бифуркации в зависимости от различных параметров, области устойчивости в большом и целом, полоса захвата.

2. Для проведения исследований была предложена оригинальная методика, основанная на качественно-аналитическом подходе при анализе отображений на цилиндре и торе систем с линейным фильтром. Результатом ее применения явились впервые полученные точные значения границ областей существования различных движений в ДСФС с линейными фильтрами. В частности, получены точные значения полосы захвата ИСФС с пропорционально-интегрирующим фильтром для произвольных значений параметров. Найдена область параметров системы, где полоса захвата ограничивается циклами второго рода с одним проскальзыванием, а при больших усилениях - кратным захватом.

3. Для анализа ДСФС с линейным интегратором дополнительно предложена оригинальная методика качественно-аналитического исследования, основанная на переходе от цилиндрического фазового пространства к



торроидальному с границами, исключаящими нелинейные отображения по координате  $\varphi$ . Методика позволила свести всевозможные нелинейные движения по двум координатам к движениям только по координате  $x$  и значительно упростить процесс анализа. В результате получены точные границы существования периодических движений различных типов и условия на максимальную частотную расстройку, при которой в системе всегда обеспечивается синхронизм. Построены области на плоскости параметров  $(D, m)$  для импульсной и  $(D, m)$  и  $(S_C, m)$  для цифровой систем, в которых существует единственное периодическое движение - кратный захват.

4. С помощью предложенной методики изучена динамика ДСФС с ограничивающим ПИФ, характерным для цифровых систем и ограничивающим интегратором, характерным для импульсных систем. Результатом явилось построение областей устойчивости в целом для произвольных параметров системы, установление закономерностей изменения полосы захвата от параметров нелинейности фильтра. Для ЦСФС установлен разрывной характер зависимости полосы захвата от усиления. С ростом границ нелинейности  $M$  разрывность пропадает. Для ИСФС с интегратором также установлен разрывной характер полосы захвата в зависимости от усиления. Доказано существование периодических движений при малых усилениях практически при для любых параметров  $\alpha_p, m$ .

5. В ходе исследования ДСФС с ограничивающим фильтром установлено существование кроме периодических движений притягивающих множеств двух типов, точки которых располагаются на границах  $\Phi(y)$  (циклов-интервалов). Вектор состояния при данном режиме совершает хаотические перемещения в ограниченной области фазового пространства и сигнал на выходе системы по своим статистическим характеристикам соответствует случайному процессу.

6. Исследованы динамические свойства ДСФС с пилообразным пропорционально-интегрирующим фильтром и пилообразным интегратором. Найдены области параметров системы, где нелинейные свойства фильтра не влияют на установившиеся движения, а также области параметров где система ведет себя подобно ДСФС с линейным фильтром. Описаны возможные периодические движения, их бифуркации в зависимости от параметров системы. В результате анализа установлено, что в данной системе существуют семейства периодических движений. Циклы одного семейства имеют

одинаковый период, и разные координаты векторов  $\vec{p}_n$ , описывающих нелинейное отображение на каждой итерации. Показано, что разбиение пространства параметров  $(\alpha, \beta)$  имеет периодичность относительно областей существования циклов одного семейства.

Результатом исследований явилось построение областей устойчивости в целом, зависимость полосы захвата от параметров нелинейности для цифровой СФС. Показана возможность значительного увеличения полосы захвата в области больших усиления за счет увеличения форсирования  $m$ .

7. В результате исследований ДСФС с пилообразным интегратором установлено существование состояний, эквивалентных состоянию синхронизма ( $C_m$ ). При этом поведение системы в окрестности  $C_m$  совпадает с поведением системы в окрестности основного состояния синхронизма. Показано, что  $C_m$  могут существовать даже при отсутствии основного состояния равновесия. Подобные состояния объясняются вращением по координате, отвечающей за состояние фильтра, и связаны с переполнением интегратора на каждом системном такте.

### 3. Динамика ДСФС с синусоидальной характеристикой детектора

Данная глава посвящена исследованию динамических свойств СФС с синусоидальной характеристикой детектора и нелинейным фильтром в цепи управления. Объектом исследования этой главы выступает обобщенная модель ДСФС второго порядка с нелинейным фильтром в цепи управления (1.1.1). Следует сказать, что существует большое количество работ, посвященных исследованию систем с синусоидальной характеристикой ФД [28,33-35,54]. Однако в большинстве из этих работ рассматриваются модели первого и второго порядка с линейным фильтром. В основном, в этих работах исследуются случаи для частного набора параметров или рассматриваются характеристики отдельных движений. Для примера можно назвать работы, где исследованы динамические характеристики ДСФС второго порядка для случая нулевых начальных расстроек [34]. В работе [28] полоса захвата ДСФС 2-го порядка исследуется при помощи частотных методов, однако полученные оценки носят приближенный характер.

Что касается дискретных систем с нелинейным фильтром, то можно говорить об ограниченном количестве работ, в том числе и о работах выполненных автором диссертации или в соавторстве с ним.

В этих работах предложены методики и алгоритмы, основанные на качественно-численном подходе, позволяющие получить достаточно полные сведения о поведении ДСФС второго порядка с синусоидальной характеристикой детектора. Так в [48,49,55] исследуются периодические и квазипериодические движения на фазовой плоскости в дискретных системах второго порядка с нелинейным фильтром в цепи управления для различных вариантов нелинейности фильтра. Проведенные в диссертации исследования обобщают полученные ранее результаты по исследованию ДСФС нелинейным фильтром в цепи управления.

Основная цель этой главы - установление общих закономерностей поведения ДСФС с нелинейным фильтром для синусоидальной характеристики детектора, изучение областей существования и бифуркаций возможных в системе устойчивых движений, приводящих к потере глобальной устойчивости состояния синхронизма, определение на основе полученных данных областей устойчивости в целом.

В отличие от СФС с пилообразной характеристикой детектора, в данном случае исследование периодических движений достаточно затруднено, т.к. аналитическое описание поведения системы зачастую невозможно. Это обуславливает применение наряду с качественно-аналитическими численных методов. В частности, большое значение приобретает задача нахождения областей в пространстве параметров СФС, при которых на фазовой плоскости реализуется качественно различная картина взаимного расположения входящих и выходящих сепаратрис неустойчивых стационарных состояний (инвариантных многообразий системы).

В ходе исследований анализируются ДСФС с двумя вариантами фильтров: нелинейный пропорционально интегрирующий фильтр (ПИФ) ( $d < 1$ ); нелинейный интегратор с форсированием ( $d = 1$ ). При этом основное внимание уделяется исследованию областей существования и бифуркации различных периодических движений в зависимости от параметров системы, в особенности от параметров нелинейности фильтра. Эти данные используются далее для нахождения области глобальной устойчивости состояния синхронизма.

Решаются следующие задачи:

- описание общих свойств модели ДСФС с синусоидальной характеристикой детектора для каждого конкретного вида нелинейностей фильтра;
- отыскание качественно-аналитическими и качественно-численными методами периодических и квазипериодических движений, существование которых возможно в системе, изучение их бифуркаций;
- построение в пространстве параметров областей, в которых существуют движения заданной структуры;
- определение глобальной устойчивости состояния синхронизма.

Методика исследований подобна методике, применявшейся во второй главе. Области существования периодических движений и предельных инвариантных кривых строятся с помощью качественно-аналитических и качественно-численных методов. Вначале координаты точек заданного цикла вычисляются аналитически, а если это невозможно, то находятся численно. Затем методом продолжения по параметру строится область существования.

Как и в случае с пилообразной характеристикой детектора, на первом этапе изучаются динамические свойства системы с линейным фильтром в цепи управления. На втором этапе, на основе полученных данных, рассматриваются

ДСФС с нелинейным фильтром. В ходе исследований строится фазовый портрет системы, определяются области параметров, в которых реализуется качественно различная структура фазового пространства. Далее в пространстве параметров качественно-численными методами анализируются области существования всевозможных периодических движений и исследуется область устойчивости в целом состояния синхронизма.

### 3.1. Система с линейным фильтром в цепи управления

Рассмотрим модель с линейным фильтром в цепи управления. Для этого положим в (1.1.1)  $F(\varphi) = \sin(\varphi)$ ,  $\Phi(y)$  - линейная функция. С учетом этого для случая пропорционально-интегрирующего фильтра ( $d < 1$ ) система (1.1.1) будет иметь вид

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = -\beta \sin(\varphi_n) + dx_n + g(1-d) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Для конкретных типов СФС параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g$  выражаются через физические параметры аналогично п.2.1. В случае линейного интегратора  $d=1$  и (3.1.1) примет вид

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = -\beta \sin(\varphi_n) + x_n \end{cases} \quad (3.1.2)$$

#### 3.1.1. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления

Опишем основные свойства ДСФС с синусоидальной характеристикой ФД на примере СФС с линейным ПИФ в цепи управления. Фазовое пространство этого типа СФС представляет собой фазовый цилиндр, развертка которого представлена на рис. 3.1. Выделим аналогично системе с пилообразной характеристикой детектора следующие кривые:  $L_{\varphi,m}$  - линии с сохранением координаты  $\varphi$  по модулю  $2\pi$ ,  $L_{x,0}$  - линия с сохранением координаты  $x$ :

$$L_{\varphi,m} : x = \alpha \sin(\varphi) \pm 2\pi m; m=0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (3.1.3)$$

$$L_{x,0} : x = (-\beta \sin(\varphi) + g(1-d))/(1-d)$$

Точки пересечения кривых  $L_{\varphi,0}$  и  $L_{x,0}$   $O_j$  - есть стационарные состояния системы. На периоде  $\sin(\varphi)$  таких точек две. Они имеют координаты:

$$\begin{aligned}
O_1 &= \left[ \arcsin\left(\frac{g(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}\right), \alpha\left(\frac{g(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}\right) \right]^T, \\
O_2 &= \left[ \pi - \arcsin\left(\frac{g(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}\right), \alpha\left(\frac{g(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}\right) \right]^T.
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

На пересечении кривой  $L_{x,0}$  и кривых  $L_{\varphi,m}$  ( $m=\pm 1, \pm 2, \dots$ ) возникают циклы структуры  $(u/1)$  или кратные захваты. Из (3.1.3) следует, что вектора точек этих циклов имеют координаты:

$$\begin{aligned}
O_{m,1} &= \left[ \arcsin\left(\frac{(g-2\pi m)(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}\right), \alpha\left(\frac{(g-2\pi m)(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}\right) \right]^T, \\
O_{m,2} &= \left[ \pi - \arcsin\left(\frac{(g-2\pi m)(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}\right), \alpha\left(\frac{(g-2\pi m)(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta}\right) \right]^T,
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

где  $m=\pm 1, \pm 2, \dots$ . Из построения легко заметить, что состояние синхронизма существует при выполнении условия

$$\beta > (g - \alpha)(1 - d). \tag{3.1.6}$$

Когда выполняется (3.1.6) кривые  $L_{\varphi,0}$  и  $L_{x,0}$  пересекаются.

Аналогично (3.1.6) найдем условия на параметры системы, при которых возможны кратные захваты:

$$\left| \frac{(g - 2\pi u)(1 - d)}{\alpha(1 - d) + \beta} \right| < 1. \tag{3.1.7}$$

Область локальной устойчивости неподвижной точки  $\varphi_j$  цикла структуры  $(u/1)$  ( $u=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) определяется системой неравенств

$$\begin{cases}
(\alpha(1-d) + \beta) \cos(\varphi_i) > 0 \\
1 - d + (d\alpha - \beta) \cos(\varphi_i) > 0 \\
2(1+d) + (\beta - \alpha(1+d)) \cos(\varphi_i) > 0.
\end{cases} \tag{3.1.8}$$

Как это следует из (3.1.8), на периоде  $\sin(\varphi)$  только одна из неподвижных точек цикла может быть устойчива, другая неустойчива. На рис. 3.2 в пространстве параметров  $(\alpha, \beta)$  показаны области локальной устойчивости стационарного состояния и нескольких кратных захватов для  $g=1, d=0.5$ .

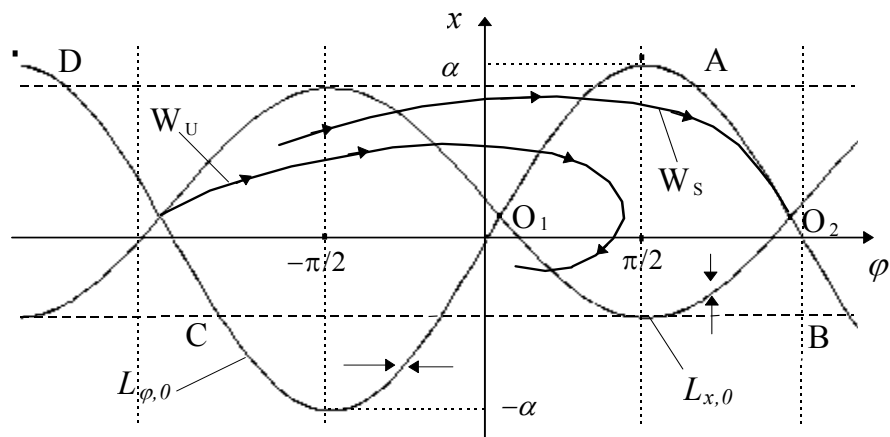


Рис. 3.1 Фазовое пространство СФС с синусоидальной характеристикой ФД и линейным ПИФ.

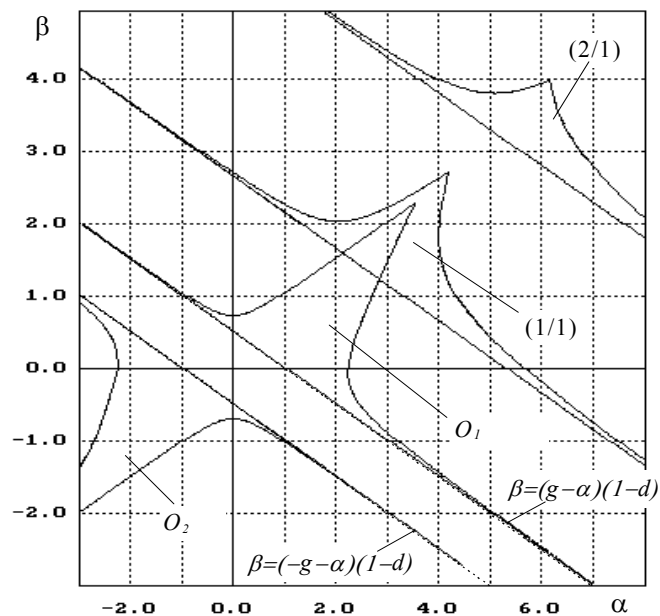


Рис. 3.2. Области локальной устойчивости циклов структуры  $(u/l)$  для  $d=0.5$ ,  $g=1$ .

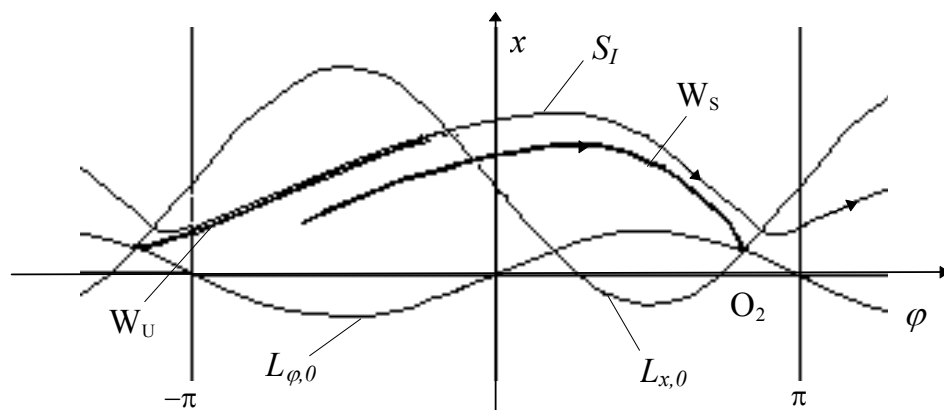


Рис. 3.3. Фазовое пространство ДСФС с линейным ПИФ.

Система уравнений (3.1.1) задает отображение пространства векторов состояний системы в себя. Оно инвариантно относительно преобразования  $g \rightarrow g + 2\pi m$  (где  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). При этом все движения в системе переходят в подобные им движения, но при каждой итерации координата  $\varphi_n$  получает дополнительное приращение  $2\pi m$ , а координаты  $x_n$  всех точек изменяются на  $2\pi m$ . Т. е. циклы  $(u/k)$  переходят в циклы  $(u + km)/k$ . В силу этого без нарушения общности можно рассматривать  $g$  в пределах

$$0 < g < 2\pi. \quad (3.1.9)$$

Отображение (3.1.1) инвариантно относительно преобразования:

$$(\varphi, \alpha, \beta) \rightarrow (\varphi + \pi, -\alpha, -\beta). \quad (3.1.10)$$

При этом преобразовании все движения в системе переходят в подобные им движения. Координата  $x$  остается неизменной, а координата  $\varphi$  переходит в координату  $\varphi + \pi$ , т.е. происходит поворот фазового цилиндра на полпериода. Данное утверждение легко проверить непосредственной подстановкой в (3.1.1). Рассмотрим плоскость параметров  $(\alpha, \beta)$ . Из (3.1.10) следует, что в данной плоскости области существования всех движений располагаются симметрично относительно нуля. Заметим далее, что, согласно (3.1.6), в полосе, ограниченной прямыми  $\beta = (g - \alpha)(1 - d)$  и  $\beta = (-g - \alpha)(1 - d)$ , вообще не существует неподвижных точек. Здесь существуют только вращательные движения по  $\varphi$ . Из этого можно сделать вывод, что области локальной устойчивости состояний синхронизма  $O_1, O_2$  в пространстве параметров  $(\alpha, \beta)$  не пересекаются и симметричны относительно нуля. Данные области показаны на рис. 3.2, верхняя граница области локальной устойчивости  $O_2$  проходит вдоль прямой  $\beta = (g - \alpha)(1 - d)$ , нижняя граница области для точки  $O_1$  проходит вдоль прямой  $\beta = (-g - \alpha)(1 - d)$ .

Известно, что при  $d < 1$  для произвольных параметров, в фазовом пространстве существует притягивающий слой [34]. Для данной системы он определяется так же как и для СФС с пилообразной характеристикой детектора:

$$g - \frac{|\beta|}{1 - d} < x < g + \frac{|\beta|}{1 - d}. \quad (3.1.11)$$

В силу этого, при анализе установившихся движений в фазовом пространстве, можно ограничиться областью внутри притягивающего слоя. На рис. 3.1 притягивающий слой системы обозначен горизонтальным пунктиром.



При анализе движений в системе особенно важно взаимное расположение сепаратрисных кривых неустойчивых стационарных состояний. Для практики особенно интересен случай, когда выходящая сепаратрисная инвариантная кривая седла не пересекает входящую и лежит ниже нее, т.к. при этом становятся невозможны движения с постоянным возрастанием или убыванием фазы. Подобная структура фазового пространства показана на рис. 3.1 (кривая  $W_U$  ниже кривой  $W_S$ ). Покажем, что это выполняется

$$\begin{aligned} &\text{при } \alpha > g + \beta/(1-d), && \text{если } \alpha < 1, \\ &\text{при } \begin{cases} \alpha > g + \frac{\beta}{(1-d)} \\ -\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \sqrt{\alpha^2 - 1} + g + \frac{\beta}{(1-d)} < \frac{\pi}{2}, \end{cases} && \text{если } \alpha > 1. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

При выборе начальных условий ниже (выше) кривой  $L_{\varphi,0}$  итерация происходит с уменьшением (увеличением) координаты  $\varphi$ . При  $\alpha > g + \beta/(1-d)$   $L_{\varphi,0}$  пересекает границы притягивающего слоя. Рассмотрим область  $G$  ( $ABCD$ ) в фазовом пространстве, образованную верхней и нижней границей притягивающего слоя, а также частями кривой  $L_{\varphi,0}$ , лежащими между точками  $A$ ,  $B$  и  $C$ ,  $D$  (рис. 3.1). Эти точки лежат на пересечении  $L_{\varphi,0}$  с границами притягивающего слоя. Найдем далее условия, при которых область  $G$  отображается в себя. Для этого достаточно рассмотреть отображение отрезка ( $AD$ ), принадлежащего верхней границе притягивающего слоя

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin(\varphi_n) + g + \beta / (1-d); \varphi \in (AD). \quad (3.1.13)$$

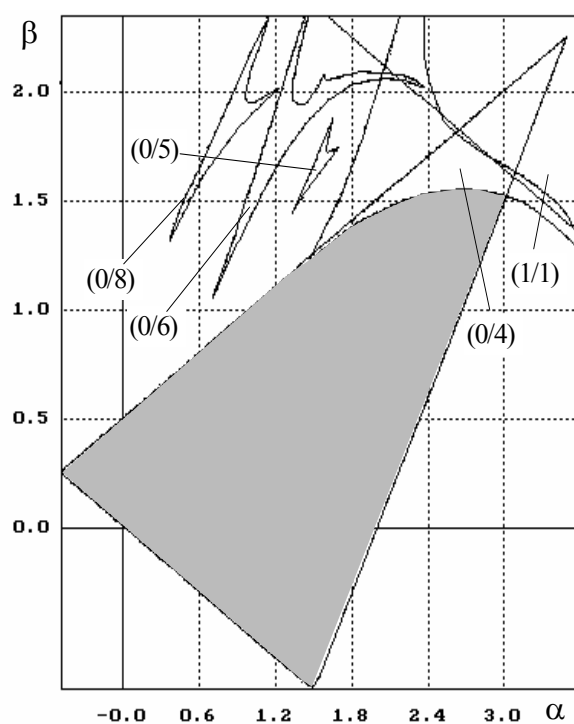
Если  $\varphi_{n+1} < \pi / 2$ , то отображение происходит всегда внутри области  $G$ . Несложно видеть, что это всегда выполняется при  $\alpha < 1$ , а в случае  $\alpha > 1$   $\varphi_{n+1}$  достигает максимума при  $\varphi = -\arccos(1/\alpha)$ . Таким образом, при выполнении (3.1.12) скольжения по фазе в системе становятся невозможны.

Проанализируем далее существующие в системе устойчивые движения, определяющие область глобальной устойчивости состояния синхронизма, а также ее изменение в зависимости от параметров для различных начальных расстройек по частоте.

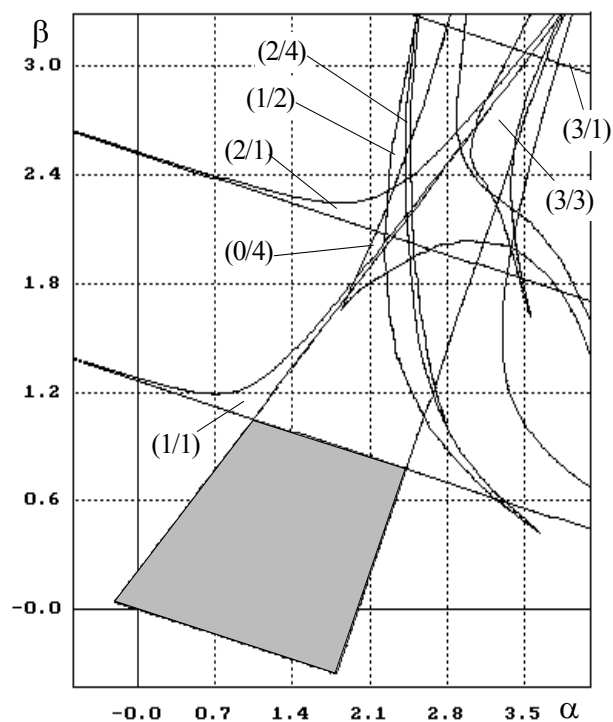
1. На рис. 3.4 показаны области существования различных периодических движений системы с линейным ПИФ для нулевой расстройки. Штриховкой отмечена ОГУ системы, ограниченная сверху первым кратным захватом (цикл структуры (1/1)) или циклами первого рода, которые существуют в области

больших  $\alpha$ ,  $\beta$ . При малых  $d$  верхняя граница ОГУ определяется циклом первого рода структуры  $(0/4)$  (рис. 3.4а). Это движение принадлежит семейству циклов первого рода структуры  $(0/k)$ , области существования которых располагаются вблизи верхней границы локальной устойчивости СФС. Области существования нескольких устойчивых циклов этого семейства показаны на рис. 3.4а. При увеличении  $d$  верхняя граница возникновения кратного захвата перемещается в сторону меньших  $\beta$ , и он становится определяющим для ОГУ системы (рис. 3.4б). Это приводит к уменьшению области глобальной устойчивости. Вместе с тем при увеличении  $d$  в области локальной устойчивости при больших  $\alpha$ ,  $\beta$  появляются кратные захваты более высокого порядка, а также возникают различные циклы первого и второго рода (рис. 3.4б). Это цикл второго рода периода два  $(1/2)$ . Потеря устойчивости этого цикла при увеличении  $\alpha$  происходит с удвоением периода. Это приводит к рождению устойчивого цикла  $(2/4)$ , который теряет в свою очередь устойчивость с удвоением периода и т.д. Области существования циклов с увеличением периода значительно уменьшаются, так что уже для циклов периода 16 они практически равны нулю. На рис. 3.4б показаны области существования только циклов  $(1/2)$ ,  $(2/4)$ . Характерным также является возникновение цикла первого рода структуры  $(0/4)$ . Точки этого цикла при  $g=0$  располагаются попарно симметрично относительно состояния синхронизма.

2. При ненулевых расстройках в области малых значений  $\alpha$  потеря глобальной устойчивости происходит вследствие рождения структуры, которую будем далее называть структурой (С) (рис. 3.3). Характерным для этой структуры является то, что входящая сепаратриса неустойчивой стационарной точки ( $W_S$ ) лежит ниже выходящей сепаратрисы ( $W_U$ ). Это приводит к возникновению притягивающей инвариантной кривой (кривая  $S_I$  на рис. 3.3). Движение вдоль кривой происходит с постоянным возрастанием фазы  $\varphi$ . Вследствие этого ОГУ в области малых  $\alpha$  уменьшается (рис. 3.5). В области больших  $\alpha$ ,  $\beta$  ограничение ОГУ происходит первым кратным захватом. С увеличением расстройки граница области его существования перемещается в область меньших  $\alpha$ ,  $\beta$  (рис. 3.5а). При дальнейшем росте  $g$  описанные тенденции сохраняются. Вместе с тем область существования цикла второго рода  $(2/1)$  опускается ниже границы первого кратного захвата и также уменьшает область глобальной устойчивости (рис. 3.5б).

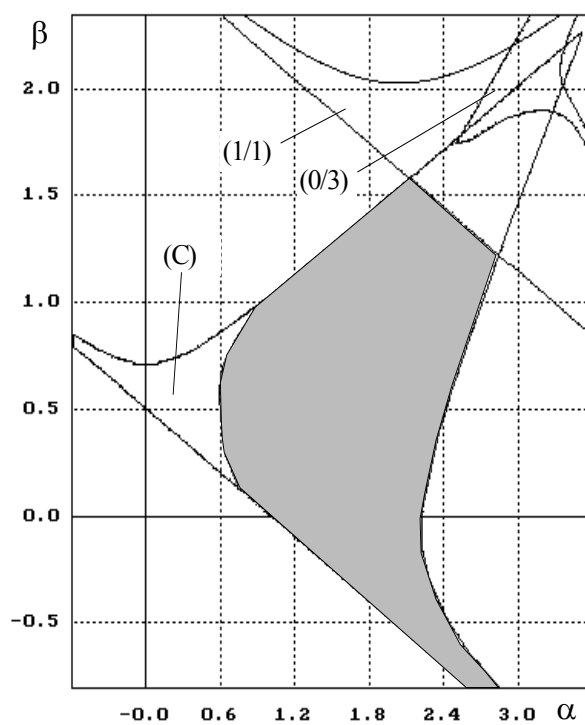


а)

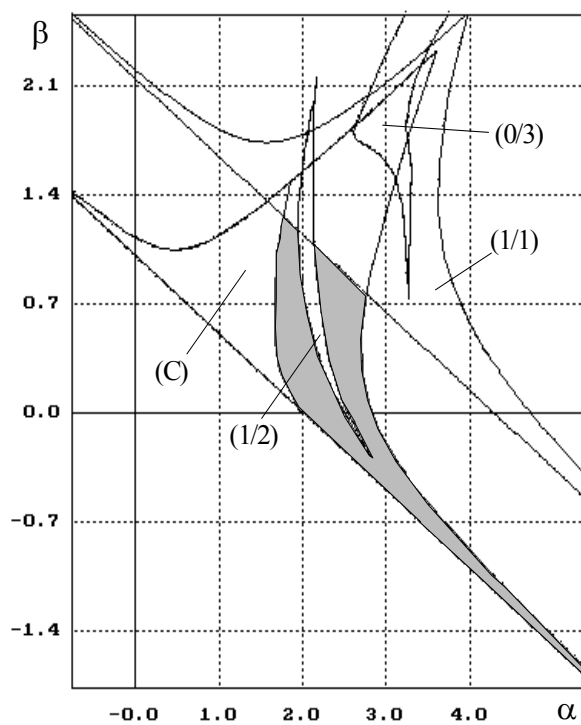


б)

Рис. 3.4. Области существования различных периодических движений системы с линейным ПИФ для  $g=0$ : а)  $d=0.5$ ; б)  $d=0.8$ .



а)



б)

Рис. 3.5. Области существования различных периодических движений системы с линейным ПИФ для  $d=0.5$ : а)  $g=1$ ; б)  $g=2$ .

Проанализируем полосу захвата системы (границу области глобальной устойчивости системы в пространстве параметров  $(D, \gamma_H)$ ). Анализ выполним для ИСФС с линейным ПИФ по графикам рис. 3.6.

Рассмотрим предварительно область локальной устойчивости системы. Она определяется неравенствами (3.1.8). Из (2.1.3) следует, что при нулевых значениях  $\gamma_H$  граница области локальной устойчивости определяется системой неравенств

$$\begin{cases} D(1-d) > 0 \\ 1-d > -D(d - (1-m)(1-d))/\alpha_p \\ 2(1+d) > D(1+d - 2(1-m)(1-d))/\alpha_p \end{cases} \quad (3.1.14)$$

и достигает максимального значения по  $D$ , когда выполняется условие:

$$m = 1 - \frac{\alpha_p(d+1)^2}{4(1-d)}. \quad (3.1.15)$$

С увеличением  $\gamma_H$  происходит расширение области локальной устойчивости в сторону больших  $D$ . Это происходит вследствие уменьшения значения  $\cos(\varphi_i)$  ( $\varphi_i$  - координата  $\varphi$  состояния синхронизма) с увеличением  $\gamma_H$ .

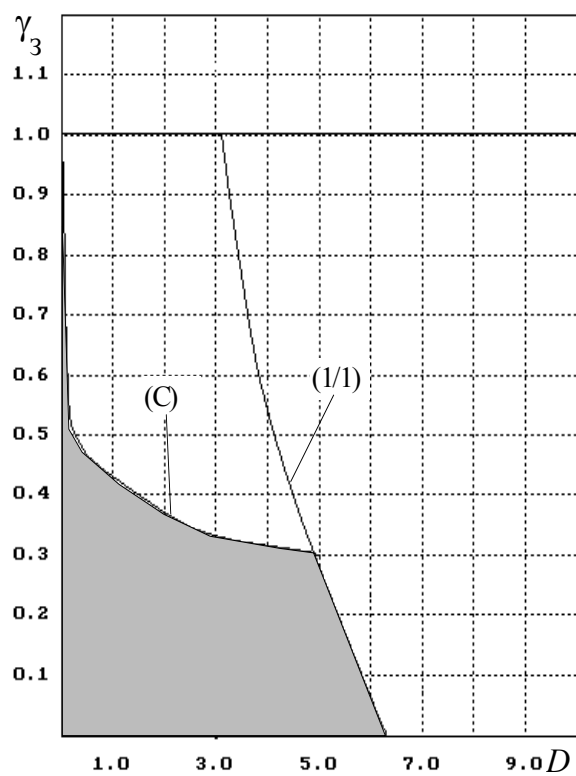
Изучим далее изменение полосы захвата системы в зависимости от изменения ее параметров. При малых значениях  $m$  правая граница полосы захвата определяется кратным захватом (цикл  $(1/1)$ ). Верхняя граница полосы захвата определяется возникновением структуры (С), описанной выше (рис. 3.6а).

С увеличением  $m$  наблюдаются следующие тенденции:

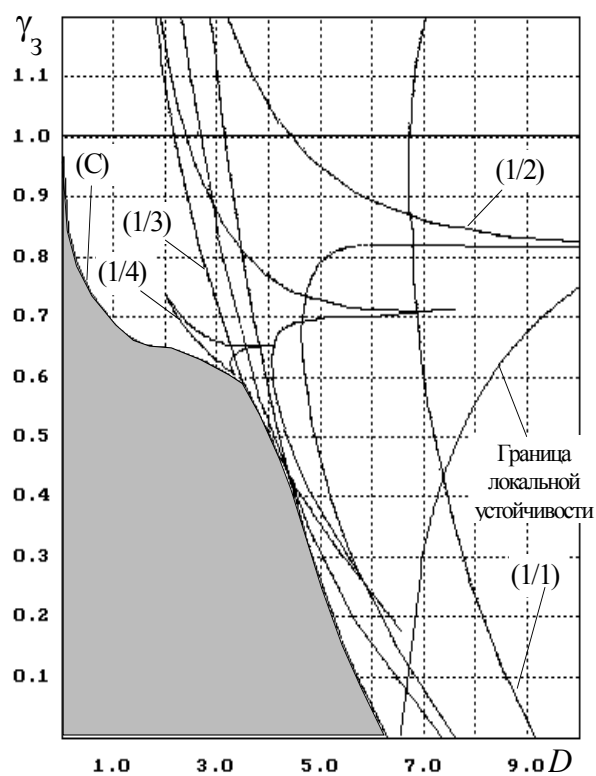
1. Нижняя граница возникновения структуры (С) сдвигается в сторону больших  $\gamma_H$ . При этом правая граница полосы захвата начинает определяться также циклами второго рода  $k > 1$ . Это приводит к расширению полосы захвата в области малых  $D$  (рис. 3.6б, 3.6в).

2. При дальнейшем увеличении  $m$  правая граница полосы захвата начинает определяться границей локальной устойчивости состояния синхронизма (рис. 3.6в, 3.6г). При приближении значений  $m$  к единице граница локальной устойчивости уже полностью определяет правую границу полосы захвата. Это приводит к уменьшению полосы захвата по  $D$  и ограничению снизу диапазона расстроек, в которых обеспечивается захват из любых начальных условий.

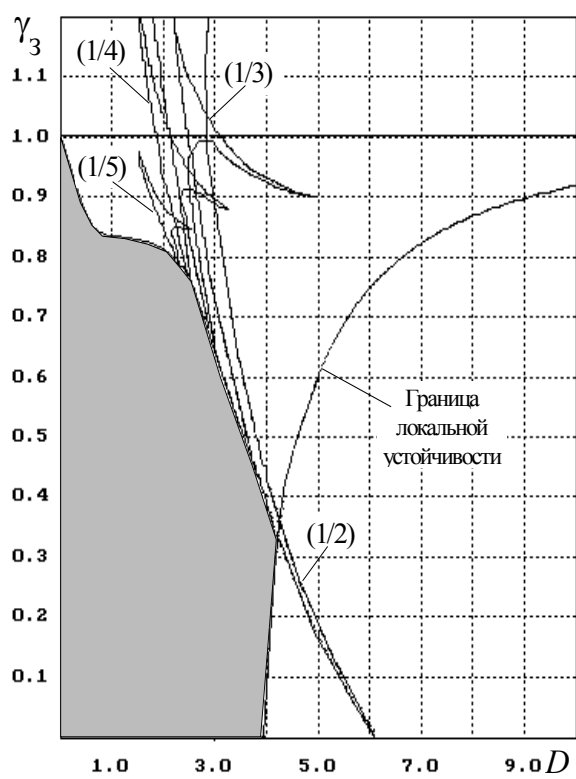
3. При  $m$  близких к единице, наряду с ограничением снизу, наблюдается расслоение полосы захвата циклами второго рода на несколько подобластей (рис. 3.6г). При этом верхняя граница полосы захвата по прежнему определяется структурой (С) и близка к единичному значению.



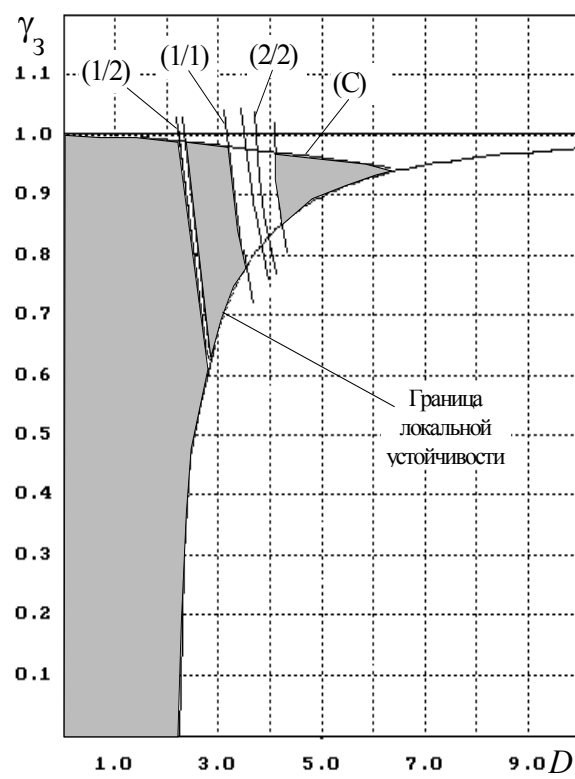
а)



б)



в)



г)

Рис. 3.6. Полоса захвата ИСФС с линейным ПИФ для  $\alpha_p=0.1$ :

а)  $m=0.1$ ; б)  $m=0.3$ ; в)  $m=0.5$ ; г)  $m=0.9$ .

В целом можно сказать, что при увеличении коэффициента  $m$  от нуля до единицы происходит расширение полосы захвата системы в области малых усиления с появлением одновременно ограничения в области больших  $D$ . Аналогичное качественное поведение полосы захвата в зависимости от  $m$  наблюдается при различных значениях  $\alpha_p$ .

Приведенные зависимости полосы захвата можно использовать и для анализа ЦСФС с линейным ПИФ. Для этого достаточно воспользоваться формулами (2.1.2), (2.1.3), связывающими параметры реальных систем с параметрами обобщенной модели.

### 3.1.2. Система с интегратором в цепи управления

Рассмотрим основные свойства обобщенной модели ДСФС с линейным интегратором в цепи управления (3.1.2). Они будут во многом аналогичны свойствам модели (3.1.1).

На рис. 3.7 представлена развертка фазового цилиндра. В отличие от фазового пространства системы с пропорционально интегрирующим фильтром отображение с сохранением координаты  $x$  в данном случае происходит с вертикальных прямых ( $L_{x,m}: \varphi = \pm m\pi; m=0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ) и не зависит от начальной расстройки. Линии отображения с сохранением значения координаты  $\varphi \bmod 2\pi$  проходят так же, как и в системе с ПИФ  $L_{\varphi,m}: x = \alpha \sin(\varphi) \pm 2\pi m; m=0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Точки пересечения кривой  $L_{\varphi,0}$  и прямых  $L_{x,m}$   $O_j$  есть стационарные состояния системы. Они имеют координаты:  $O_j = (0, 2\pi j; j=0, \pm 1, \pm 2 \dots)$ . Несложно видеть, что в данной системе прямые  $L_{x,m}$  пересекаются со всеми линиями  $L_{\varphi,m}$ ,  $m = \pm 1, \pm 2 \dots$ . Таким образом, в рассматриваемой модели существует бесконечное множество кратных захватов (циклов структуры  $(u/1); u = \pm 1, \pm 2 \dots$ ).

Рассмотрим основные свойства данной системы:

Система (3.1.2) инвариантна относительно замены  $((\varphi \bmod 2\pi), x) \rightarrow ((\varphi \bmod 2\pi), x \pm 2m\pi)$ . При этом все движения в системе переходят в подобные им движения, а координата  $\varphi$  на каждом шаге получает дополнительное приращение  $2m\pi$ . Т. е. циклы структуры  $(u/k)$  переходят в циклы  $(u+km)/k$ . В силу этого поведение данной системы можно рассматривать на торе, период которого определяется неравенствами

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi, -\pi \leq x \leq \pi \quad (3.1.16)$$

На рис. 3.8 показана область локальной устойчивости отображения системы (3.1.2) в пространстве параметров  $(\alpha, \beta)$  и области существования устойчивых периодических движений различной структуры. Анализ проведен для одного периода фазового тора. На других периодах существуют аналогичные циклы, но координата  $\varphi$  на каждом шаге получает дополнительное приращение  $2\pi m$ .

Как видно из рисунка, в области больших  $\alpha, \beta$  существуют устойчивые циклы первого рода структуры  $(0/3), (0/4)$ . Эти движения существовали и в системе с ПИФ (при  $d < 1$ ).

В области малых  $\alpha, \beta$  существуют устойчивые циклы второго рода. Это прежде всего циклы периода два, имеющие структуру  $(\pm 1/2)$ . Точки этих движений имеют координаты

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= [0, \pi]^T, \bar{q}_2 = [\pi, \pi]^T \text{ для цикла } (1/2), \\ \bar{q}_1 &= [0, -\pi]^T, \bar{q}_2 = [\pi, -\pi]^T \text{ для цикла } (-1/2). \end{aligned}$$

Данные движения характерны именно для системы с интегратором. Их отличительной особенностью является то, что значение координаты  $x$  при движении по циклу остается неизменным и равным  $\pm\pi$ , а фазовая координата  $\varphi$  постоянно возрастает или убывает. Приращение разности фаз  $\varphi$  за период дискретизации равно  $\pi$ . На практике это означает, что частота ПГ является стабильной и отличается от частоты входного сигнала в 1.5 раза. Устойчивость этого движения определяется собственными значениями матрицы системы (3.1.2), линеаризованной в точках цикла:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 1 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.17)$$

При увеличении  $\alpha$ , подобно тому как это было и в системе с ПИФ, этот цикл теряет устойчивость с удвоением периода. Это ведет к возникновению цикла  $(2/4)$ , который также теряет устойчивость с удвоением периода. Далее этот процесс повторяется. Области существования устойчивых циклов данной структуры сильно уменьшаются с увеличением периода. Также в области малых  $\alpha, \beta$  существуют циклы второго рода больших периодов, например цикл  $(1/3)$ . Штриховкой на рис. 3.8 помечена область параметров системы, в которой существуют только кратные захваты. Как будет показано в дальнейшем, система с пилообразным интегратором (случай линейной со сбросом характеристики) в этой области параметров глобально устойчива.

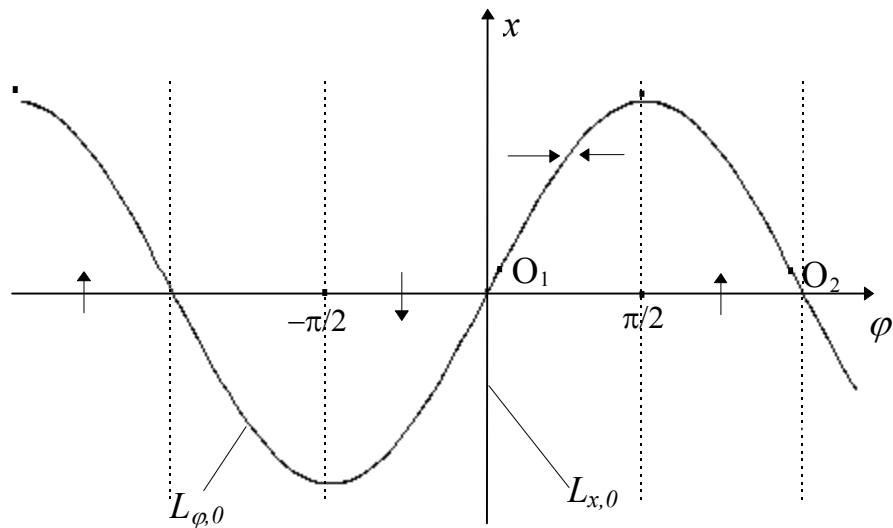


Рис. 3.7. Фазовое пространство СФС с синусоидальной характеристикой ФД и линейным интегратором.

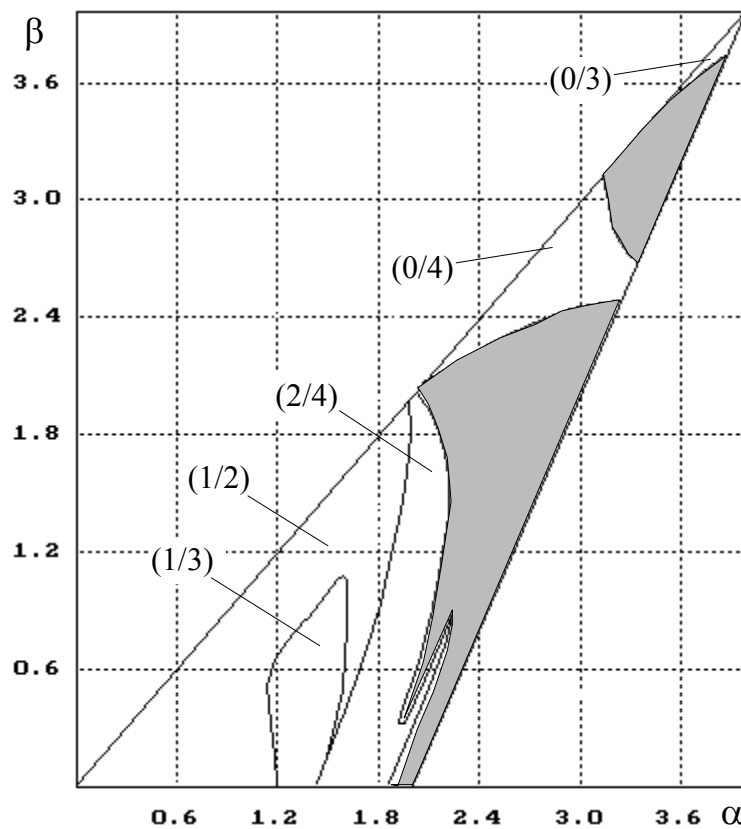


Рис. 3.8. Области существования различных периодических движений системы с линейным интегратором.



### 3.2. Система с ограничивающим фильтром в цепи управления

Проанализируем ДСФС с синусоидальной характеристикой фазового детектора и ограничивающим фильтром в цепи управления. Поведение системы в этом случае описывается уравнением (1.1.1). Рассмотрим вначале общие свойства системы. Далее более детально рассмотрим свойства ДСФС с нелинейным ПИФ и нелинейным интегратором.

Соответствующие математические модели будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = g - \Phi(d(g - x_n) + \beta \sin(\varphi_n)) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

для системы с ограничивающим ПИФ,

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin(\varphi_n) + x_n \\ x_{n+1} = g - \Phi(g - x_n + \beta \sin(\varphi_n)) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

для системы с ограничивающим ИФ.

#### 3.2.1. Общие свойства ДСФС с синусоидальной характеристикой ФД и ограничивающим фильтром

Опишем общие свойства ДСФС с синусоидальной характеристикой ФД и ограничивающим фильтром в цепи управления.

1. Из-за ограниченности характеристики  $\Phi(y)$  фильтра в цепи управления фазовым пространством системы будет ограниченный по координате  $x$  цилиндр (рис. 3.9). Максимальное и минимальное значение координаты  $x$  соответственно равны  $g \pm M$ .

Определим условия существования состояния равновесия в зависимости от параметров  $\Phi(y)$ . Как видно из рис. 3.9, для существования состояния синхронизма необходимо, чтобы его координата  $x$  находилась в интервале  $[-M + g, M + g]$ . Согласно (3.1.4) это будет выполняться при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} M + g > \frac{\alpha g(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta} \\ -M + g < \frac{\alpha g(1-d)}{(1-d)\alpha + \beta} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

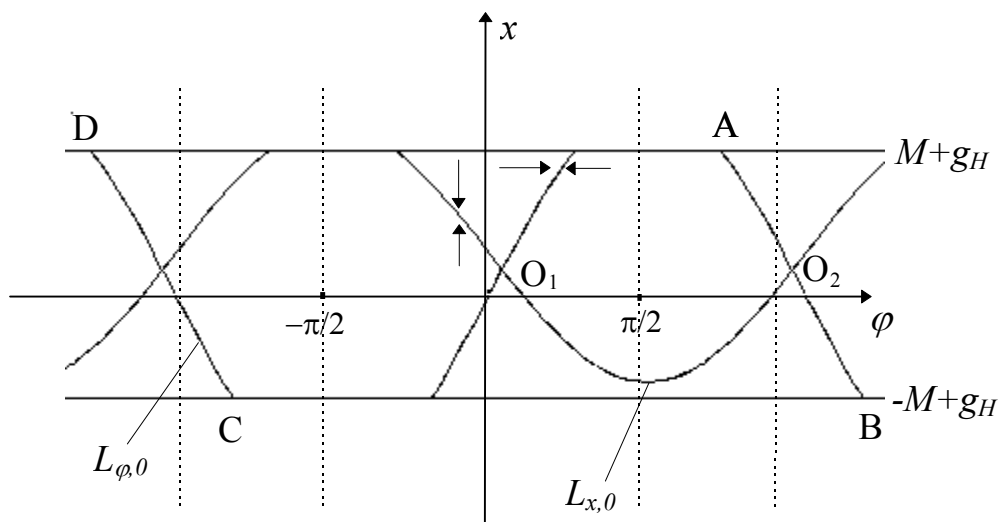


Рис. 3.9. Фазовое пространство СФС с синусоидальной характеристикой ФД и ограничивающим ПИФ.

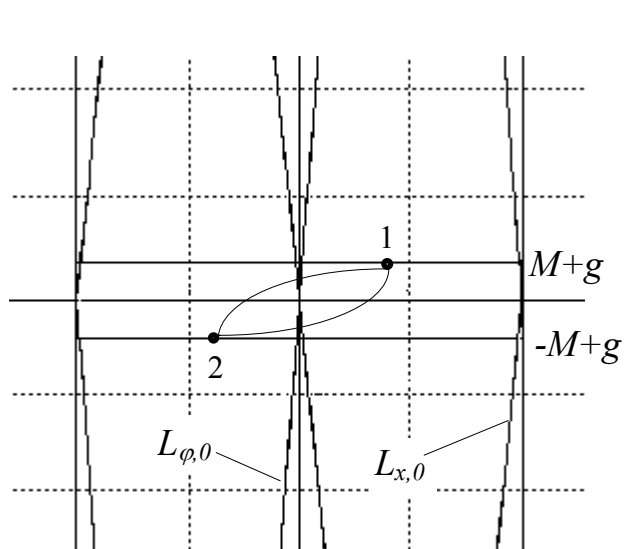


Рис. 3.10. Фазовый портрет цикла структуры  $(0/2)_H$  для СФС с синусоидальной характеристикой ФД и ограничивающим ПИФ.

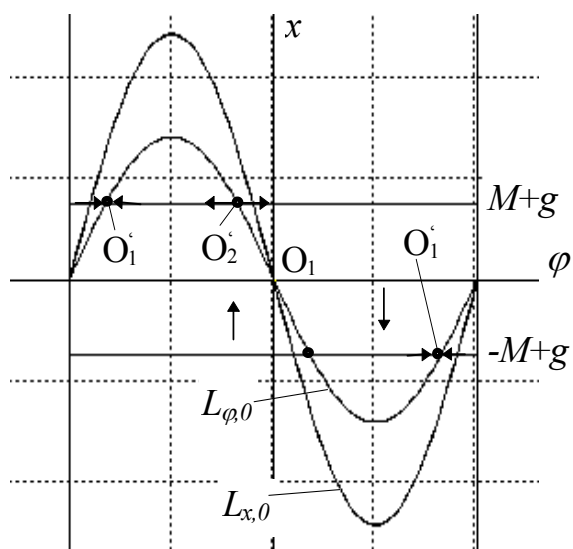


Рис. 3.11. Развертка фазового цилиндра СФС с синусоидальной характеристикой ФД и ограничивающим ПИФ.

При нарушении условий (3.2.3) в системе возможны только движения с постоянным возрастанием или убыванием фазы. На практике это означает, что сигнал (напряжение или код) на выходе нелинейного фильтра не может обеспечить требуемое для синхронизма значение частоты перестраиваемого генератора.

2. При  $d < 1$  система имеет притягивающий слой (3.1.11). Легко показать, что при выполнении условия

$$M > \frac{|\beta|}{1-d} \quad (3.2.4)$$

притягивающий слой лежит внутри области фазового пространства, ограниченной  $\Phi(y)$ . Таким образом, при выполнении (3.2.4) нелинейность фильтра практически не влияет на поведение СФС. Заметим, что (3.2.3), (3.2.4) совпадают с аналогичными условиями, полученными во второй главе для систем с пилообразной характеристикой ФД.

3. Для системы с линейным фильтром была получена оценка на параметры системы, при которых невозможны скольжения по фазе (выражение (3.1.12)). Рассмотрим, каким образом вторая нелинейность влияет на данную оценку, если (3.2.4) не выполняется.

Покажем, что при выполнении условий:

$$\begin{aligned} \alpha > M+g, & \quad \text{для } \alpha < 1 \\ \begin{cases} \alpha > M+g \\ -\arccos(1/\alpha) + \sqrt{\alpha^2 - 1} + M+g < \pi/2 \end{cases} & \quad \text{для } \alpha > 1 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

выходящая и входящая сепаратрисы седла не пересекаются и выходящая лежит ниже входящей. Доказательство можно провести подобно тому, как это было сделано для системы с линейным фильтром (см. п.3.1.1). Различие состоит в том, что верхняя и нижняя границы области  $ABCD$  в данном случае определяются нелинейностью  $\Phi(y)$ . Отображение отрезка  $(AD)$ , принадлежащего верхней границе нелинейности фильтра, имеет вид

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin(\varphi_n) + M + g; \varphi \in (AD)$$

### 3.2.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления

Рассмотрим основные свойства системы (3.2.1) при  $d < 1$ .

1. Анализ начнем со случая нулевых начальных расстроек ( $g=0$ ).

При малых значениях  $M$  в системе наблюдаются два основных типа движений.

Первое движение - цикл периода  $k=2$  структуры  $(0/2)_H$ . Его точки лежат на границах нелинейности  $\Phi(y)$ . Структура фазового пространства, при которой могут существовать циклы данного типа, показана на рис. 3.10. Для существования этого цикла необходимо, чтобы отображение из точки цикла происходило на границу  $\Phi(y)$ . Это эквивалентно выполнению условий:

$$\begin{cases} \beta \sin(\varphi_1) > g(1-d) + (1+d)M \\ \beta \sin(\varphi_2) < g(1-d) - (1+d)M, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  - координаты  $\varphi$  точек цикла на верхней и нижней границе  $\Phi(y)$  соответственно. Так как итерации происходят с границ  $\Phi(y)$ , устойчивость данного движения определяется линеаризованными в точках цикла коэффициентами при координате  $\varphi$  в первом уравнении системы (3.2.1). Они определяются выражением

$$\rho_1 = 1 - \alpha \cos(\varphi_1), \quad \rho_2 = 1 - \alpha \cos(\varphi_2).$$

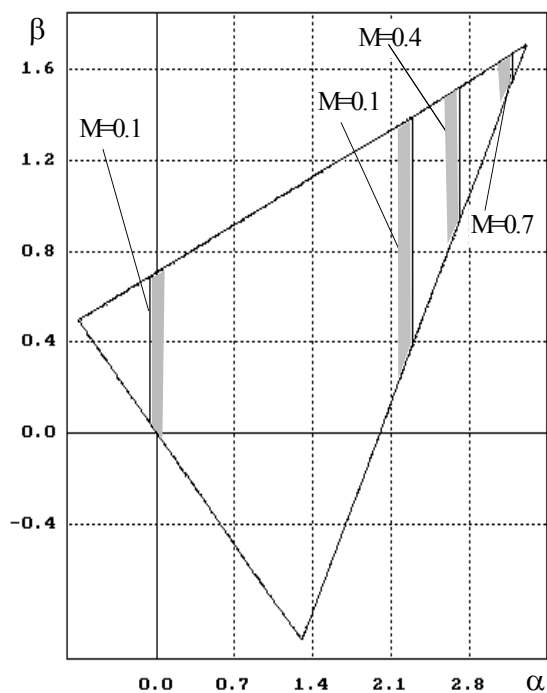
Движение будет устойчиво, когда выполняется условие:

$$\rho_1 \rho_2 < 1 \text{ или } (1 - \alpha \cos(\varphi_1))(1 - \alpha \cos(\varphi_2)) < 1 \quad (3.2.7)$$

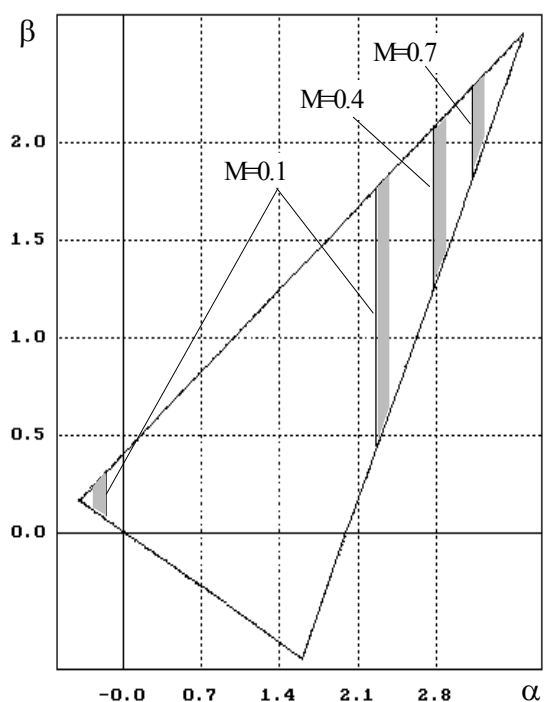
Таким образом,  $\beta$  определяет в пространстве параметров область существования цикла, а параметр  $\alpha$  определяет область устойчивости.

Второе движение - циклы первого рода периода  $k=1$ , возникающие на пересечении границ  $\Phi(y)$  с кривой  $L_{\varphi,0}$  и имеющие структуру  $(0/1)_H$ . Для существования таких движений необходимо, чтобы точки пересечения  $L_{\varphi,0}$  и границ  $\Phi(y)$  были притягивающими по координате  $x$ . Это будет выполняться, когда кривая  $L_{\varphi,0}$  пересекает верхнюю границу  $\Phi(y)$  под кривой  $L_{x,0}$ . Из (3.1.3) следует, что это происходит при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} -\alpha > M + g \\ -\frac{\beta}{\alpha} > \frac{M(1-d)}{M+g} \end{cases} \quad (3.2.8)$$



а)



б)

Рис. 3.12. Границы ОГУ системы с ограничивающим ПИФ для  $g=0$ : а)  $d=0.3$ ; б)  $d=0.6$ .

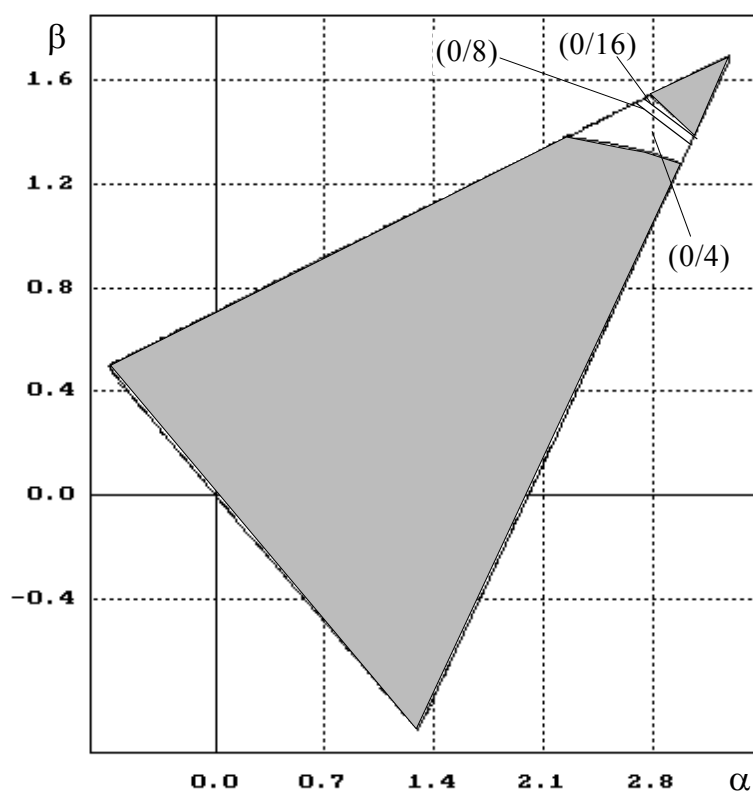


Рис. 3.13. Области существования различных периодических движений в системе с ограничивающим ПИФ для  $d=0.3$ ,  $M=1.5$ ,  $g=0$ .

Соответственно, для существования цикла на нижней границе  $\Phi(y)$  необходимо, чтобы кривая  $L_{\varphi,0}$  пересекала ее над кривой  $L_{x,0}$ , т.е. должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} \alpha < -M + g \\ \frac{\beta}{\alpha} > \frac{M(d-l)}{-M + g} \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Структура фазового пространства, при которой могут существовать циклы этого типа показана на рис. 3.11. Аналогично циклу  $(0/2)_H$ , устойчивость определяется линеаризованными в точках цикла коэффициентами при координате  $\varphi$  в первом уравнении системы (3.2.1) и задается следующими неравенствами:

$$1 \pm \alpha \sqrt{1 - (M + g) / \alpha)^2} < 1 \quad (3.2.10)$$

для циклов на верхней границе,

$$1 \pm \alpha \sqrt{1 - (-M + g) / \alpha)^2} < 1 \quad (3.2.11)$$

для циклов на нижней границе. Соответственно, только одна точка на каждой границе  $\Phi(y)$  будет устойчивой, другая будет неустойчива.

Когда система находится в одном из них, разность фаз  $\varphi$  остается постоянной с течением времени. Отсюда следует вывод, что эти движения следует рассматривать как состояния синхронизма, возникающие в системе при выполнении условий (3.2.8), (3.1.10) или (3.2.9), (3.2.11), соответственно, на верхней и нижней границах  $\Phi(y)$ . Обозначим эти состояния как  $O'_1$ ,  $O''_1$ . В отличие от состояния синхронизма  $O_l$ , в состояниях  $O'_1$ ,  $O''_1$  поведение системы определяется только первым уравнением (3.2.1), где координата  $x$  равна  $M+g$  для  $O'_1$  и  $-M+g$  для  $O''_1$ .

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha \sin(\varphi_n) \pm M + g \quad (3.2.12)$$

Таким образом, в точках  $O'_1$ ,  $O''_1$  система ведет себя как ДСФС первого порядка с ненулевой начальной расстройкой. На практике это означает, что нелинейный фильтр все время находится в насыщении и фактически вносит постоянное смещение по частоте. Рассмотрим поведение системы в окрестности этих точек. Сделаем это на примере  $O'_1$ . Отрезок на верхней границе  $\Phi(y)$  между точками  $O'_2$  и точкой пересечения  $L_{x,0}$  с границей  $\Phi(y)$  является притягивающим по координате  $x$ . Поэтому при выборе начальных

условий на этом отрезке дальнейшее движение вектора состояния будет определяться уравнением (3.2.12) и происходить вдоль верхней границы  $\Phi(y)$ . При выборе начальных условий из области прилегающей к верхней границе  $\Phi(y)$  и выполнении условия

$$(d(g-x_0)+\beta\sin(\varphi_0))<M,$$

за одну итерацию вектор состояния попадает на границу  $\Phi(y)$  и далее движение происходит опять вдоль границы  $\Phi(y)$ . Таким образом, и в окрестности состояний  $O'_l$ ,  $O''_l$  поведение системы практически полностью совпадает с поведением ДСФС первого порядка.

На рис. 3.12 в пространстве параметров  $(\alpha, \beta)$  показаны границы существования вышеперечисленных циклов. Состояния  $O'_l$ ,  $O''_l$  существуют в области отрицательных  $\alpha$ , и с увеличением  $M$ , согласно (3.2.8), (3.2.9) их правая граница сдвигается в сторону меньших  $\alpha$ . Аналогичный процесс происходит при увеличении  $d$ . Цикл  $(0/2)_H$  существует в области больших  $\alpha$ ,  $\beta$ . С увеличением  $M$  его граница сдвигается в сторону больших  $\alpha$ . При увеличении  $d$  граница области существования этого цикла смещается в сторону меньших  $\alpha$ . В остальной области параметров, где выполняются условия локальной устойчивости состояния синхронизма система глобально устойчива. Из приведенных графиков видно, что в пределах области локальной устойчивости граница возникновения данных циклов не зависит от  $\beta$ . Таким образом при малых значениях  $M$  границы ОГУ в данной системе могут быть получены аналитически из выражений (3.2.7), (3.2.10), (3.2.11).

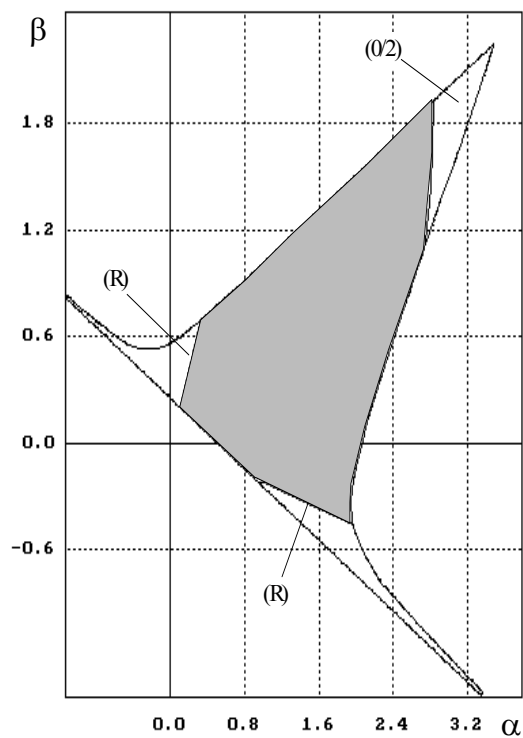
При дальнейшем увеличении  $M$  области существования вышеупомянутых циклов выходят за пределы области локальной устойчивости. При значениях  $M$  порядка единицы ОГУ системы практически совпадает с областью ее локальной устойчивости. С дальнейшим ростом  $M$  в области больших  $\alpha$ ,  $\beta$  возникает цикл первого рода периода структуры  $(0/4)$  (рис. 3.13). Этот цикл является аналогом цикла  $(0/4)$ , существующего в системе с линейным фильтром. Вдоль своей верхней границы он теряет устойчивость с удвоением периода. И далее, с увеличением  $\beta$  происходит серия бифуркаций удвоения, сопровождающихся рождением соответствующих циклов. С увеличением периода цикла область его существования значительно уменьшается. В итоге при дальнейшем увеличении  $\beta$  система становится глобально устойчива.

2. Рассмотрим свойства системы при отличных от нуля расстройках.

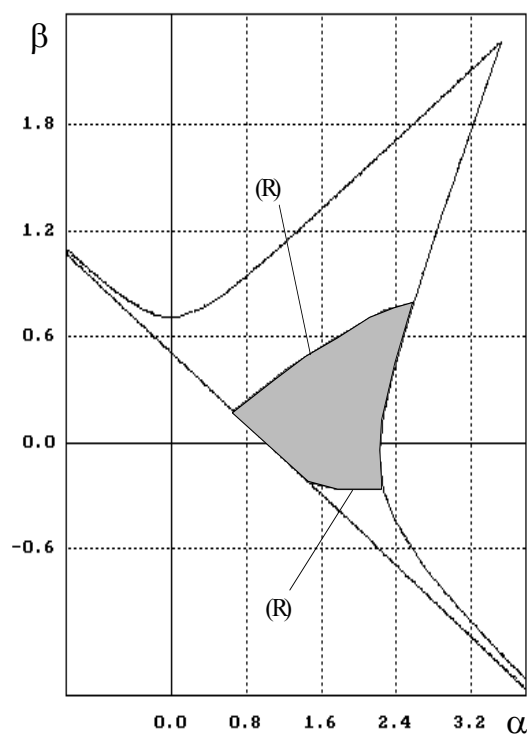
При малых значениях  $M$  определяющим для ОГУ системы становятся условия существования состояния синхронизма (3.2.3). На рис. 3.14 представлено последовательное изменение ОГУ системы с ростом начальной расстройки для  $M=0.4$  и  $d=0.5$ . При малых  $g$  в области больших  $\alpha, \beta$  существует цикл  $(0/2)_H$ , характерный для случая нулевых расстроек. В области отрицательных  $\alpha$  и малых  $\beta$  ОГУ системы ограничивается условиями (3.2.3) (условия существования состояния синхронизма (R)). При увеличении  $g$  происходит дальнейшее ограничение ОГУ за счет ограничения области параметров существования состояния синхронизма (рис. 3.14б). При достаточно больших расстройках возникает цикл второго рода структуры  $(1/2)$  (рис. 3.14в). Этот цикл характерен для систем с линейным фильтром (рис. 3.5б). В данном случае в области существования состояния равновесия точки этого цикла находятся внутри области  $[M+g, -M+g]$  по координате  $x$ . При увеличении или уменьшении  $\beta$  точки этого цикла начинают ограничиваться  $\Phi(y)$ . После ограничения устойчивость цикла практически полностью определяется первым уравнением (3.2.1). Вследствие этого при ограничении область его существования зависит только от  $\alpha$ . Этим явлением вызваны резкие перегибы области существования данного цикла на рис. 3.14в.

При больших  $M$  уже незначительная расстройка приводит к исчезновению цикла  $(0/4)$  в области больших  $\alpha, \beta$ . Это в свою очередь приводит к тому, что ОГУ практически полностью совпадает с областью локальной устойчивости системы (рис. 3.15а). Далее ОГУ, как это было и для малых  $M$ , с ростом  $g$  ограничивается условиями (3.2.3). Но, в отличие от предыдущего случая, при больших расстройках в области существования состояния равновесия возникает большое количество движений первого и второго рода (рис. 3.15б). Это прежде всего циклы второго рода  $(1/2)$ , циклы первого рода  $(0/3)$  и движения, возникающие при потере ими устойчивости с удвоением периода. Это циклы  $(2/4), \dots, (n/2^n)$ , возникающие из  $(1/2)$ , и циклы  $(0/6), \dots, (0/32^n)$ , возникающие из  $(0/3)$ . Перечисленные движения характерны для системы с линейным фильтром. В данном случае из-за значительной величины  $M$  они не ограничиваются  $\Phi(y)$ .

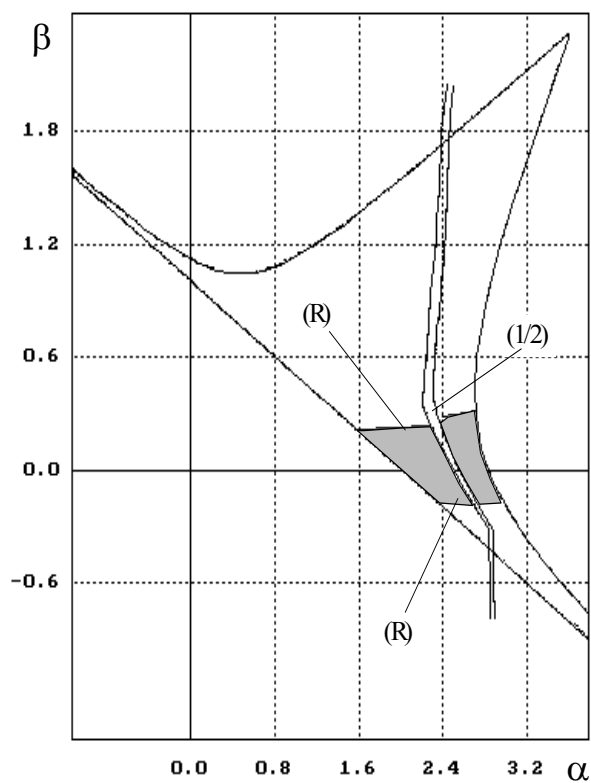




а)



б)

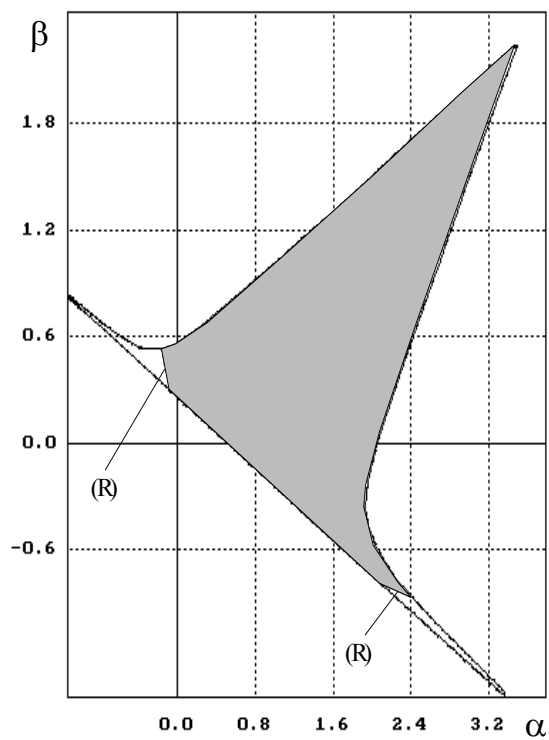


в)

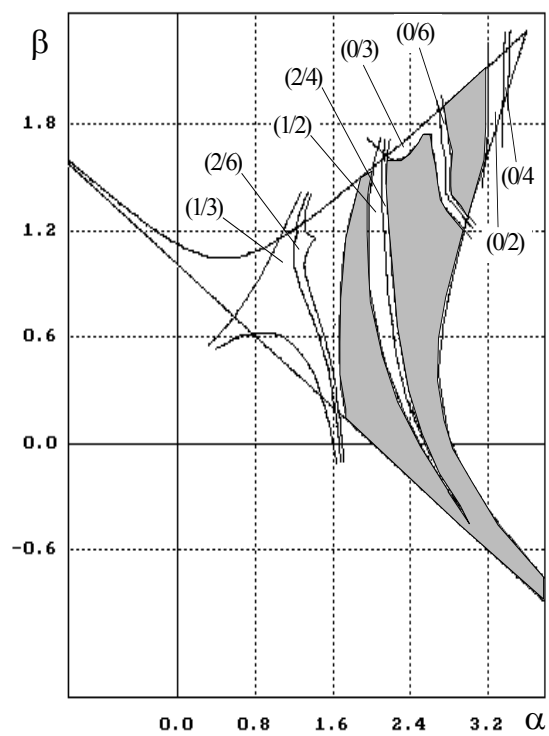
Рис. 3.14. Области существования различных периодических движений в системе с ограничивающим ПИФ

для  $d=0.5$ ,  $M=0.4$ :

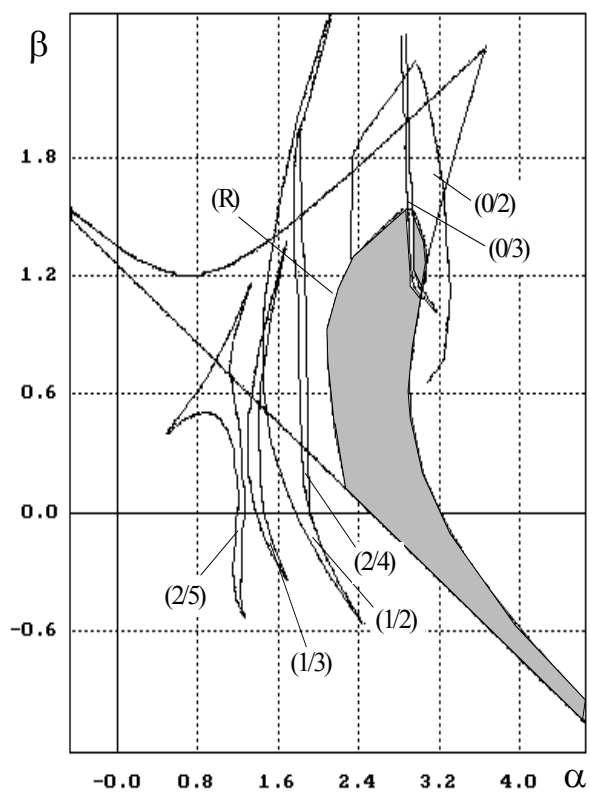
а)  $g=0.5$ ; б)  $g=1$ ; в)  $g=2$ .



а)



б)



в)

Рис. 3.15. Области существования различных периодических движений в системе с ограничивающим ПИФ

для  $d=0.5$ ,  $M=1.3$ :

а)  $g=0.5$ ; б)  $g=2$ ; в)  $g=2.5$ .

Существенным отличием от системы с линейным фильтром является то, что в этом случае не возникают кратные захваты. Вследствие этого наблюдается расширение ОГУ в сторону больших  $\alpha, \beta$ . При больших  $\alpha, \beta$  ОГУ ограничивается циклами первого рода структуры  $(0/2)$ . В отличие от подобных циклов, существующих в системе при малых  $M$ , только одна точка этого цикла лежит на границе  $\Phi(y)$ . При дальнейшем увеличении  $g$  области существования вышеописанных движений смещаются в сторону меньших  $\alpha$ . Вместе с тем происходит дальнейшее ограничение ОГУ условиями (3.2.3) (рис. 3.15в).

Используя полученные ранее результаты исследования области глобальной устойчивости, проанализируем зависимость полосы захвата от параметров для ЦСФС с ограничивающим ПИФ. Такие зависимости приведены на рис. 3.16. Пунктиром отмечена граница существования состояния равновесия. В результате анализа установлено, что при малых значениях  $M$  полоса захвата системы определяется в основном условиями существования состояния равновесия (3.2.3). При увеличении  $M$  и выполнении условий (3.2.3) граница полосы захвата определяется циклами второго рода или возникновением притягивающей инвариантной кривой (структура (C)), которые существовали в системе с линейным фильтром. С дальнейшим ростом  $M$  полоса захвата перестает зависеть от параметров  $\Phi(y)$  ( $M \approx 1$ ) и начинает определяться движениями, которые существовали в системе с линейным фильтром. Из этого можно сделать вывод, что для достижения максимального значения полосы захвата необходимо выбрать такое  $M$ , чтобы при расстройках менее единицы движения в системе не зависели от влияния  $\Phi(y)$ .

### 3.2.3. Система с интегратором в цепи управления

Рассмотрим основные свойства обобщенной модели СФС с ограничивающим интегратором в цепи управления (3.2.2). Существенное отличие от ДСФС с линейным фильтром состоит в отсутствии в данной системе бесконечного множества кратных захватов. Как это следует из (3.2.2), кратный захват структуры  $(k/1)$  существует, если выполняется условие

$$|M+g| > |k\pi|. \quad (3.2.13)$$

Описанное свойство позволяет решить задачу отыскания области глобальной устойчивости состояния синхронизма для СФС с ограничивающим

интегратором. Проанализируем свойства системы в зависимости от параметров  $\Phi(y)$ .

1. При малых расстройках и малых значениях  $M$  поведение системы качественно не отличается от поведения СФС с ограничивающим ПИФ. ОГУ системы ограничивается справа циклами структуры  $(0/2)_H$ . Слева ограничения области глобальной устойчивости не происходит, т.к. в системе с ограничивающим интегратором в области локальной устойчивости состояния синхронизма не существует дополнительных состояний синхронизма, характерных для системы с ограничивающим ПИФ. Это связано с тем, что данные движения существуют при выполнении условий (3.2.8), которые выполняются только в области отрицательных  $\alpha$ . А данная система локально устойчива при положительных  $\alpha$ . Граница возникновения циклов  $(0/2)_H$  может быть вычислена аналитически из условия (3.2.7), полученного в предыдущем разделе. С увеличением  $M$  эта граница сдвигается вправо и при  $M \approx 1.1$  выходит за пределы области локальной устойчивости. При этом система становится глобально устойчива во всей области локальной устойчивости. С дальнейшим ростом  $M$ , возникает цикл первого рода  $(0/4)$ . Аналогичное движение возникало и в системе с ПИФом.

2. С ростом частотных расстроек наблюдаются существенные отличия от ДСФС с ПИФ. В предыдущем случае определяющими для ОГУ были условия существования состояния синхронизма. С увеличением расстройки происходило постепенное уменьшение области параметров  $(\alpha, \beta)$ , в которой оно существовало. В системе с ограничивающим интегратором, как уже отмечалось, значения координат состояния синхронизма не зависят от расстройки. При выполнении условий:

$$\begin{cases} M + g > 0 \\ -M + g < 0 \end{cases}, \quad (3.2.14)$$

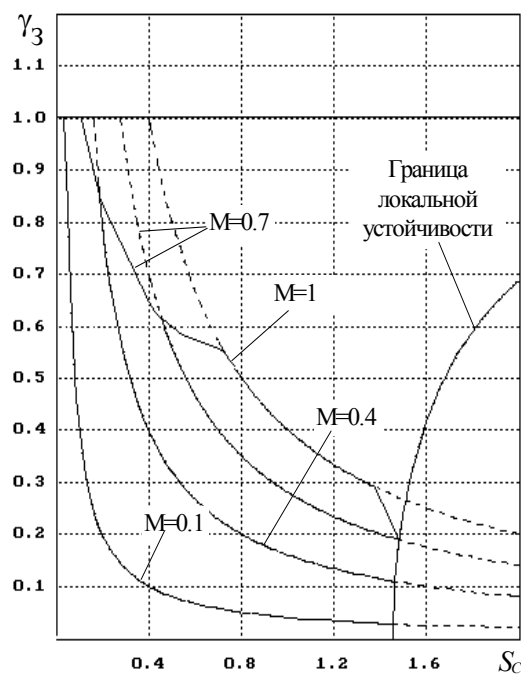
состояние синхронизма существует при любых  $\alpha, \beta$ . При значениях  $(M+g) < 1.15$  ОГУ практически совпадает с областью локальной устойчивости.

При значениях  $M+g$ , сравнимых со значением  $\pi$ , в системе начнут возникать циклы второго рода, которые порождаются соответствующими циклами системы с линейным фильтром (рис. 3.5б). На рис. 3.17 показано изменение ОГУ системы и областей существования различных циклов при приближении значения  $M+g$  к  $\pi$ . С возрастанием расстройки в области малых

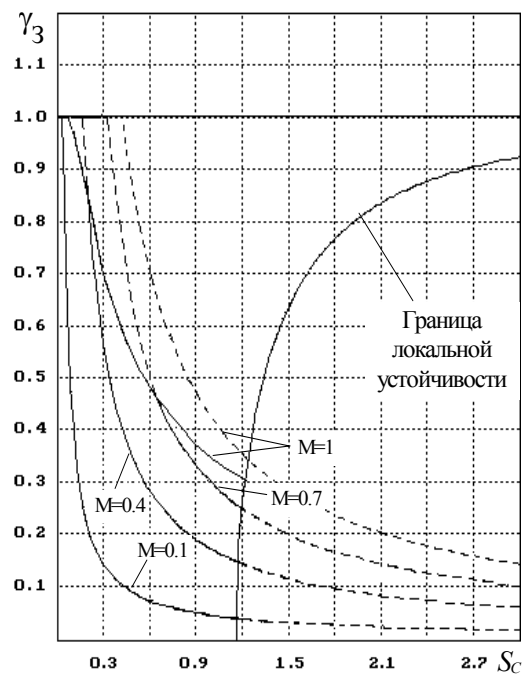
$\alpha, \beta$  первым возникает цикл второго рода  $(1/3)_H$ . Вначале точки его лежат на границе  $\Phi(y)$ , а с увеличением  $g$  отрываются от нее и переходят в цикл  $(1/3)$ , характерный для системы с линейным фильтром. На рис. 3.17а показаны области существования этого цикла, а также циклов удвоенного периода, порожденных от него при потере им устойчивости. Потеря устойчивости цикла  $(1/3)_H$ , может сопровождаться рождением движения, представляющего собой набор равномерно заполняемых траекторий в фазовом пространстве. Пример такого движения показан на рис. 3.18. Оно возникает вследствие ограничения нелинейностью  $\Phi(y)$  свободной окрестности неустойчивого цикла  $(1/3)$ . С увеличением  $M+g$  область его существования уменьшается, т.к. граница  $\Phi(y)$  отодвигается от точки цикла.

С дальнейшим ростом  $g$  возникает цикл второго рода  $(1/2)$  (рис. 3.17б). Точки его лежат на границе  $\Phi(y)$ . Вначале область его существования представляет в пространстве параметров собой узкую полосу. Точки его лежат на границе  $\Phi(y)$ . Чем ближе  $M+g$  к значению  $\pi$ , тем больше область его существования. В конце концов она становится равной области существования данного цикла в системе с линейным фильтром.

Рассмотрим полосу захвата этой СФС. Анализ показал, что при малых  $M$  (0..1.5) верхняя граница полосы захвата определяется условиями существования состояния синхронизма (3.2.14). С увеличением  $M$  полоса верхняя граница полосы захвата начинает определяться циклами второго рода. На рис. 3.19 показано изменение области захвата системы при увеличении  $M$  от 1.5 до 2.5. Она отмечена штриховкой. Также на графиках показаны области существования основных периодических движений, определяющих границы этой области. Пунктиром отмечена граница существования состояния равновесия. При  $M=1.5$  (рис. 3.19а) верхняя граница полосы захвата определяется условиями (3.2.14), а движениями, ограничивающими полосу захвата, являются циклы второго рода  $(1/3)$  и  $(1/2)$ . При больших расстройках точки цикла  $(1/3)$  не ограничиваются  $\Phi(y)$  - поэтому границы областей его существования представляют собой в пространстве параметров  $(S_C, \gamma_H)$  вертикальные прямые. С уменьшением  $g$  цикл ограничивается нелинейностью фильтра. Точки цикла  $(1/2)$  при этом выборе параметров лежат на границах нелинейности  $\Phi(y)$ .



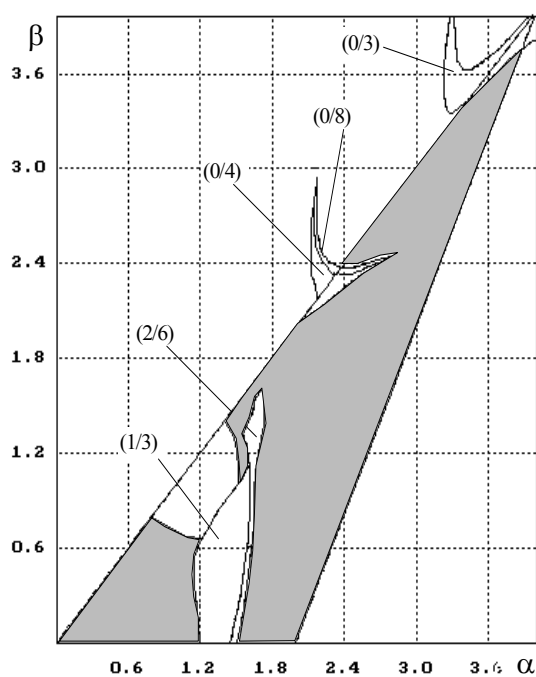
а)



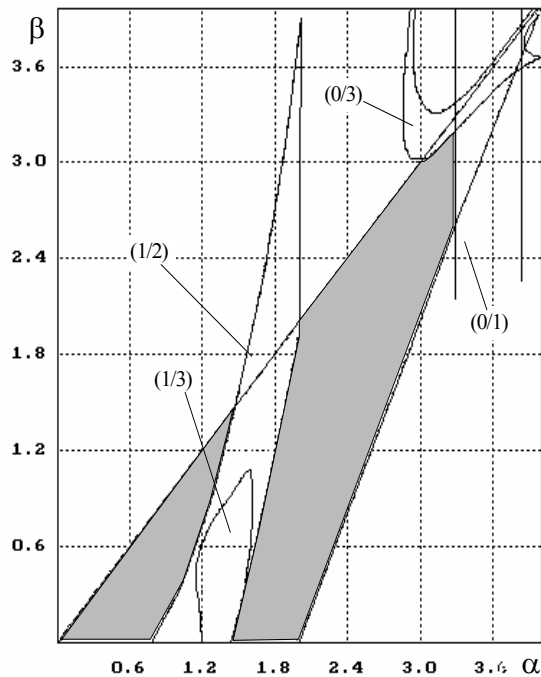
б)

Рис. 3.16. Полоса захвата ЦСФС с ограничивающим ПИФ для  $d=0.6$ :

а)  $m=2$ ; б)  $m=1$ .



а)



б)

Рис. 3.17. Области существования различных периодических движений в системе с ограничивающим интегратором для  $M=2$ : а)  $g=0.5$ ; б)  $g=1$ .

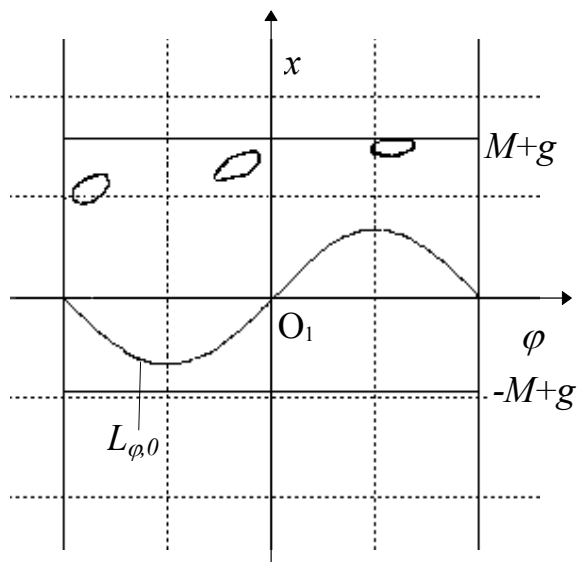
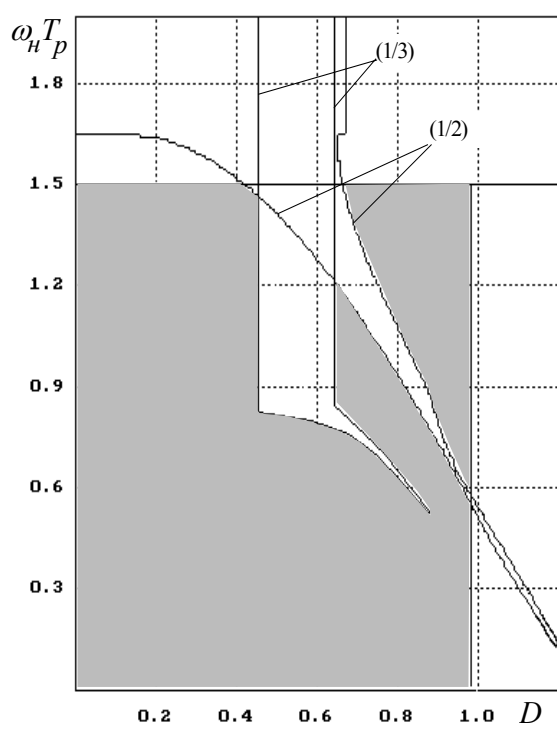
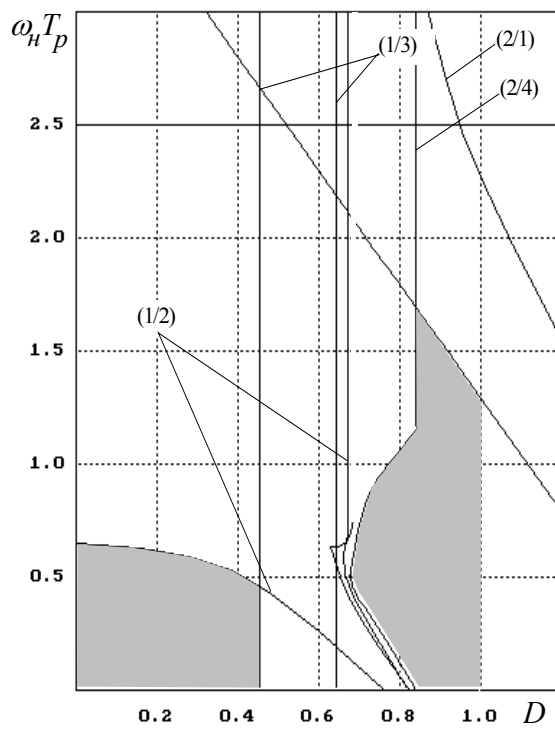


Рис. 3.18. Фазовое пространство СФС с синусоидальной характеристикой ФД и ограничивающим интегратором.



а)



б)

Рис. 3.19. Полоса захвата ИСФС с ограничивающим интегратором для  $\alpha_p=1$ ,  $m=2$ : а)  $M=1.5$ ; б)  $M=2$ .

При дальнейшем увеличении  $M$  области существования этих циклов перемещается в сторону меньших расстроек, что ведет к ограничению области захвата, а при больших значениях усиления верхняя граница полосы захвата определяется первым кратным захватом (рис. 3.19б).

Таким образом, полоса захвата при малых значениях  $M$  определяется условиями существования состояния равновесия. С ростом  $M$  она принимает сложную форму, определяемую циклами второго рода, возникающими в данной системе.

### 3.3. Система с пилообразным фильтром в цепи управления

Проанализируем ДСФС для случая пилообразной характеристики фильтра в цепи управления. Наличие двух периодических нелинейностей позволяет рассматривать данную систему на торе. При анализе СФС с линейным фильтром уже рассматривался частный случай системы на торе - СФС с линейным интегратором в цепи управления. Этому случаю соответствует значение  $M=\pi$ . В этом разделе рассмотрим свойства системы для произвольных  $M$ .

В начале данного раздела изучим общие свойства ДСФС с синусоидальной характеристикой детектора и пилообразным фильтром. Далее более детально рассмотрим свойства ДСФС с нелинейным ПИФ и нелинейным интегратором.

#### 3.3.1. Общие свойства ДСФС синусоидальной характеристикой ФД и пилообразным фильтром

На рис. 3.20 показана развертка фазового тора. Опишем его структуру. Подобно тому, как это было сделано для системы с пилообразной характеристикой ФД и пилообразной характеристикой фильтра, введем линии отображения с сохранением координаты  $x \bmod 2M$

$$L_{x,m} : x = g - (2mM + \beta \sin(\varphi)) / d; \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3.. \quad (3.3.1)$$

Как и для системы с ограничивающим фильтром, в данном случае нелинейность  $\Phi(y)$  ограничивает область существования состояния равновесия. Оно существует, когда точка пересечения прямых  $L_{\varphi,0}$  и  $L_{x,0}$  находится в пределах периода фазового тора, т.е. выполняются условия (3.2.3).



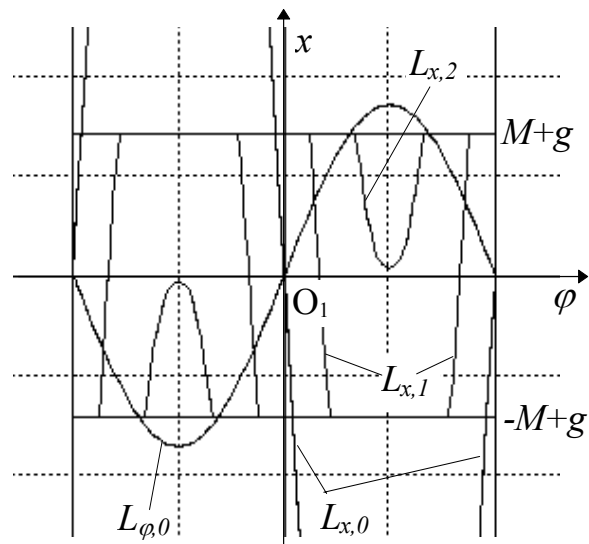


Рис. 3.20. Фазовое пространство СФС с синусоидальной характеристикой ФД и пилообразным ПИФ.

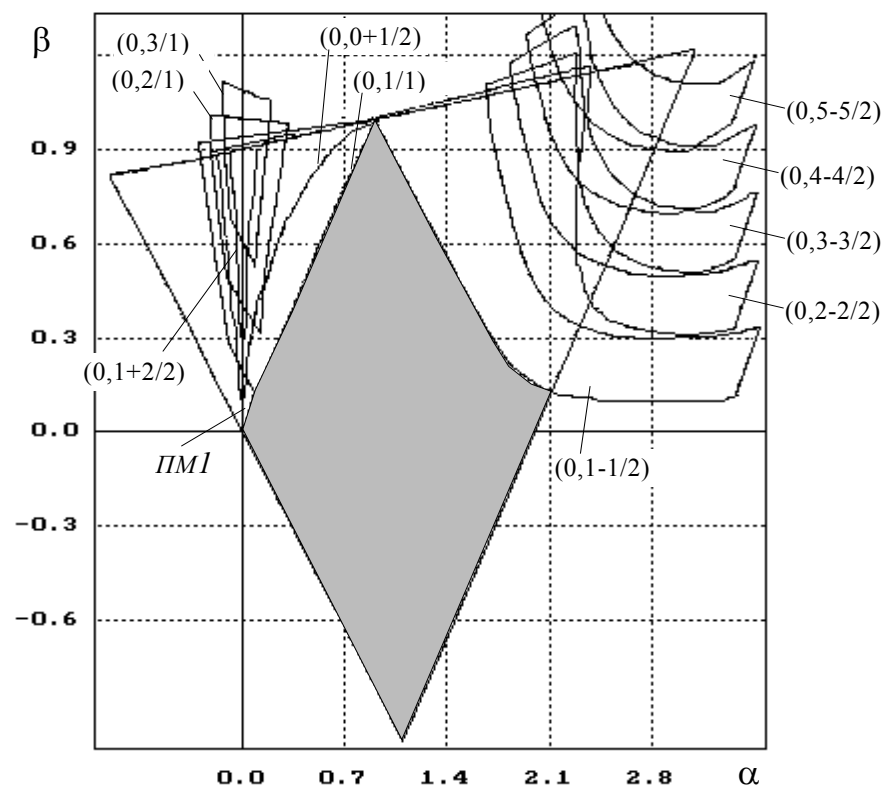


Рис. 3.21. Области существования различных периодических движений в системе с пилообразным ПИФ для  $d=0.1$ ,  $M=0.1$ ,  $g=0$ .

Аналогично системе с ограничивающим фильтром, притягивающий слой по  $x$  будет лежать в пределах  $\Phi(y)$  при выполнении неравенства (3.2.4). В этом случае все движения в системе с течением времени попадают в притягивающий слой, т.е. в установившемся режиме поведение системы совпадает с поведением СФС с линейным фильтром.

Рассмотрим общие свойства периодических движений, возможных в данной системе. По аналогии с классификацией, введенной во второй главе, предельным циклом  $(u, v/k)$  будем называть периодическое движение периода  $k$ , при котором абсолютное приращение координат  $\varphi$  и  $x$  равно  $2\pi u$  и  $2Mv$  соответственно. В случае необходимости вместо абсолютных приращений будем расшифровывать структуру движения, указывая в числителе приращение координат  $\varphi \bmod 2\pi$  и  $x \bmod 2M$  на каждой итерации.

На пересечении линии  $L_{\varphi,0}$  и линий  $L_{x,m}$  возникают кратные захваты по координате  $x$  или циклы структуры  $(0, m/1)$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Отметим, что подобные движения возникали и в системе с пилообразной характеристикой фазового детектора. Так как значение координаты  $\varphi$  при движении в этом цикле остается постоянным, то частота генератора в кольце синхронизации совпадает с частотой внешнего воздействия и система находится в синхронизме. При этом за один системный дискрет нелинейность фильтра успевает сброситься  $m$  раз. Таким образом движения этого типа можно рассматривать в качестве состояний синхронизма. На одном периоде  $F(\varphi)$   $L_{\varphi,0}$  и  $L_{x,m}$  имеют две точки пересечения. Будем обозначать их как  $C_{1,m}$ ,  $C_{2,m}$ . Координаты этих точек определяются из (3.3.1), (3.1.3) и соответственно равны:

$$\vec{c}_{1,m} = \left[ \arcsin\left(\frac{dg - 2mM}{d\alpha + \beta}\right), \alpha\left(\frac{dg - 2mM}{d\alpha + \beta}\right) \right]^T, \quad (3.3.2)$$

$$\vec{c}_{2,m} = \left[ \pi - \arcsin\left(\frac{dg - 2mM}{d\alpha + \beta}\right), \alpha\left(\frac{dg - 2mM}{d\alpha + \beta}\right) \right]^T.$$

Циклы  $C_{1,m}$ ,  $C_{2,m}$  существуют, когда их  $x$  координаты попадают в диапазон, ограниченный функцией  $\Phi(y)$ . Это выполняется при

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{dg - 2mM}{d\alpha + \beta}\right) &> -M + g \\ \alpha\left(\frac{dg - 2mM}{d\alpha + \beta}\right) &< M + g \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

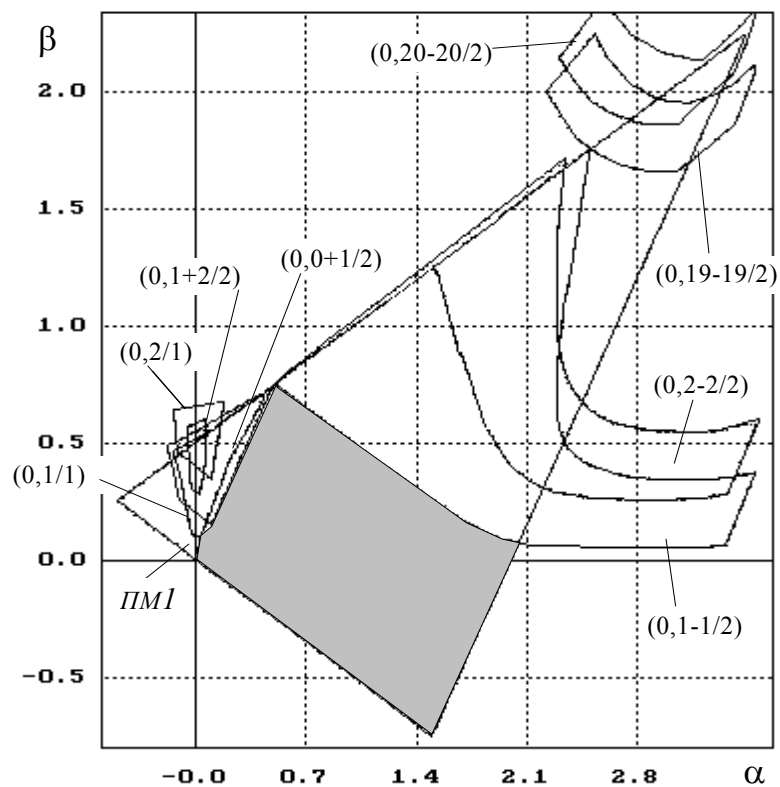


Рис. 3.22. Области существования различных периодических движений в системе с пилообразным ПИФ для  $d=0.5$ ,  $M=0.1$ ,  $g=0$ .

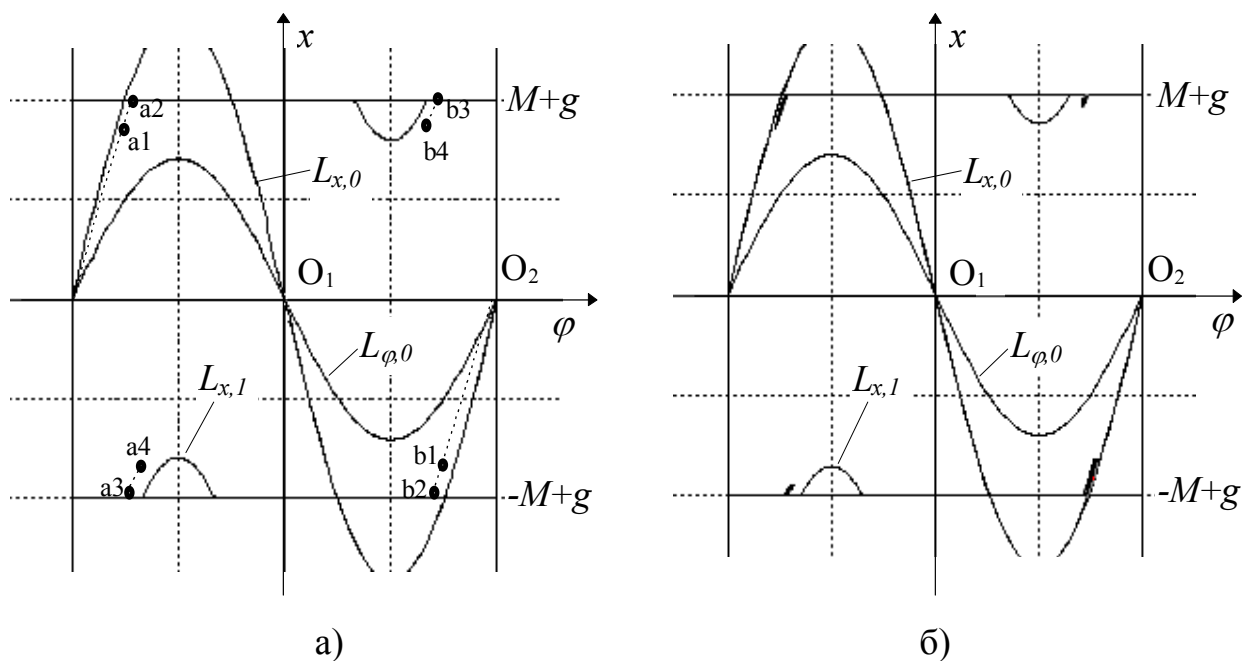


Рис. 3.23. Структура притягивающего множества  $\text{ПМ1}$  в фазовом пространстве СФС с пилообразным ПИФ.

Устойчивость цикла будет определяться собственными значениями матрицы отображения  $A(\vec{c}_{j,m})$  ( $j=1,2; m=\pm 1, \pm 2..$ ). Для расчета устойчивости можно воспользоваться системой неравенств (3.1.8), выразив  $\cos(\varphi_j)$  согласно

$$(3.3.2) - \cos(\varphi_j) = \sqrt{1 - \left( \frac{dg - 2mM}{d\alpha + \beta} \right)^2}.$$

Соответственно, на периоде  $F(\varphi)$  одна точка будет устойчива, а другая неустойчива.

### 3.3.2. Система с пропорционально интегрирующим фильтром в цепи управления

Рассмотрим динамику СФС с нелинейным ПИФ в цепи управления.

1. Анализ начнем со случая нулевых расстроек. При  $g=0$  и малых значениях  $M$  наблюдается следующая картина распределения областей существования различных устойчивых движений в пространстве параметров (рис. 3.21, 3.22). ОГУ системы помечена штриховкой. В данном случае в системе, как это было и СФС с пилообразной характеристикой ФД существуют семейства циклов одного периода и схожей структуры. Вследствие этого качественная картина распределения областей существования различных периодических движений в пространстве параметров повторяется.

При движении из ОГУ в сторону увеличения  $\alpha, \beta$  возникает цикл первого рода  $(0, 1-1/2)$ , принадлежащий семейству циклов  $(0, n-n/2)$ . Циклы данного семейства с большими значениями  $n$  располагаются в области параметров с большим  $\alpha, \beta$ . Точки циклов, принадлежащих данному семейству, располагаются симметрично относительно состояния равновесия  $O_1$ . Из (3.2.1) несложно получить, что они лежат на пересечении кривой  $x = -2\varphi + \alpha \sin(\varphi)$  и прямых  $x = (\beta \sin(\varphi) + 2mM - g(1-d))/(d+1)$  ( $m=1, 2, 3..$ ). Так как координаты точек симметричны относительно состояния равновесия, то устойчивость циклов данного семейства определяется собственными значениями матрицы отображения в одной из точек цикла. Ее можно получить из системы неравенств (3.1.8), где  $\cos(\varphi_j)$  необходимо вычислить в точке цикла.

При движении в сторону меньших  $\alpha, \beta$  возникают дополнительные состояния синхронизма, циклы второго рода  $(0, m/1)$ , описанные в предыдущем разделе. Точки этих циклов располагаются на пересечении линий  $L_{x,m}$   $L_{\varphi,0}$ .

Также при малых  $\alpha$  возникает семейство циклов второго рода структуры  $(0, (m-1)+m/2)$ . Области существования циклов данного типа в пространстве параметров расположены вблизи оси  $\alpha=0$ , причем области существования циклов с меньшим  $m$  содержат в себе области существования циклов с большим  $m$  (рис. 3.21, 3.22).

При малых значениях  $\alpha$  ОГУ системы также ограничивается устойчивым притягивающим множеством (назовем его *ПМ1*). Простейший пример этого множества показан на рис. 3.23. Для существования *ПМ1* характерной является следующая структура фазового пространства. Неустойчивая сепаратрисная инвариантная кривая (на рисунке она показана пунктиром), выходящая из неустойчивого состояния  $O_2$ , пересекает границу нелинейности  $\Phi(y)$  и нелинейно продолжается от другой границы  $\Phi(y)$ . При этом отрезок сепаратрисы  $(a1, a2)$  отображается в отрезок  $(a3, a4)$ . Далее происходит еще одно нелинейное отображение. Отрезок  $(a3, a4)$  нелинейно отображается по  $x$  в область фазового пространства выше сепаратрисной кривой. Таким образом, образуется устойчивое притягивающее множество, состоящее из равномерно заполняемых отрезков. Разрушение *ПМ1* происходит, когда неустойчивая сепаратриса перестает пересекать границы нелинейности  $\Phi(y)$ . Так как при нахождении системы в *ПМ1* не происходит перескоков фазы  $\varphi$ , то среднее ее значение остается постоянным. Т.е. система находится в квазисинхронизме.

При увеличении  $d$  происходит расширение области локальной устойчивости в сторону больших  $\alpha, \beta$ . Это приводит к тому, что в ее пределы попадает больше циклов семейства  $(0, n-n/2)$ , описанного выше, при больших  $\alpha, \beta$ . С другой стороны, при малых  $\alpha, \beta$ , области существования устойчивых циклов уменьшаются (рис. 3.22).

С увеличением  $M$  циклы семейств описанных выше с большим количеством проскальзываний выходят за границы области локальной устойчивости как для больших, так и для малых  $\alpha, \beta$ . Область существования *ПМ1* также уменьшается. Это связано с тем, что при увеличении  $M$  область параметров, где выходящая сепаратриса пересекает границу  $\Phi(y)$ , уменьшается. Все это ведет к расширению ОГУ системы. Данная тенденция сохраняется с дальнейшим ростом  $M$ . Это приводит к тому, что при малых значениях  $d$  (порядка 0.1..0.2) и при значениях  $M$  порядка 1..1.7 система глобально устойчива практически во всей области локальной устойчивости. При больших

значениях  $d$  также наблюдается расширение ОГУ. Иллюстрацией этому может служить рис. 3.24 где показана ОГУ системы для  $d = 0.5$  и различных значений  $M$ . При значениях  $M$  более 1.8..1.9 начинают сказываться эффекты, присущие СФС с линейным фильтром. Так например, в области больших  $\alpha, \beta$  возникает цикл первого рода периода 4.

2. Рассмотрим далее поведение системы при отличных от нуля расстройках.

При малых значениях  $M$  ОГУ системы начинает ограничиваться сверху циклами второго рода по  $x$ . Причем, в отличие от системы с пилообразной характеристикой ФД, в области отрицательных  $\alpha$  возникают движения с постоянным убыванием значения координаты  $x$  (рис. 3.25). При увеличении расстройки области существования циклов этого типа расширяется. Возрастает также область существования движения *ПМ1* в области малых  $\alpha$ . Это связано с тем, что при увеличении  $M$ , область параметров, где выходящая сепаратриса пересекает границу  $\Phi(y)$ , увеличивается. Нижняя граница ОГУ определяется условиями существования состояния равновесия (3.2.3). При дальнейшем увеличении  $M$  циклы периода более двух выходят из области локальной устойчивости и ОГУ системы начинает ограничиваться, в основном, циклами различной структуры периода два (рис. 3.26). При значениях  $g$ , сравнимых с  $M$ , верхняя граница ОГУ системы определяется за счет исчезновения состояния синхронизма. В этом случае система начинает вести себя практически так же, как и система с ограничивающим фильтром.

При больших  $M$  с ростом  $g$  возникает устойчивое притягивающее множество (будем называть его *ПМ2*). Его структура показана на рис. 3.28. Неустойчивая сепаратриса, выходящая из точки  $O_2$  вверх, пересекает нижнюю границу  $\Phi(y)$  и нелинейно продолжается выше себя. При этом некоторый отрезок кривой  $(a1, a2)$  отображается в отрезок  $(a3, a4)$ . На рис. 3.28 показан пример образующегося при этом устойчивого притягивающего множества. *ПМ2* существует вблизи верхней границы области локальной устойчивости и ограничивает ОГУ сверху (рис. 3.27). Это движение в отдельных областях переходит в циклы второго рода по координате  $x$ . В области малых  $M$  возникает инвариантная кривая, характерная для системы с линейным фильтром. Она возникает, когда неустойчивая сепаратриса точки  $O_2$  лежит выше устойчивой и не пересекает ее.

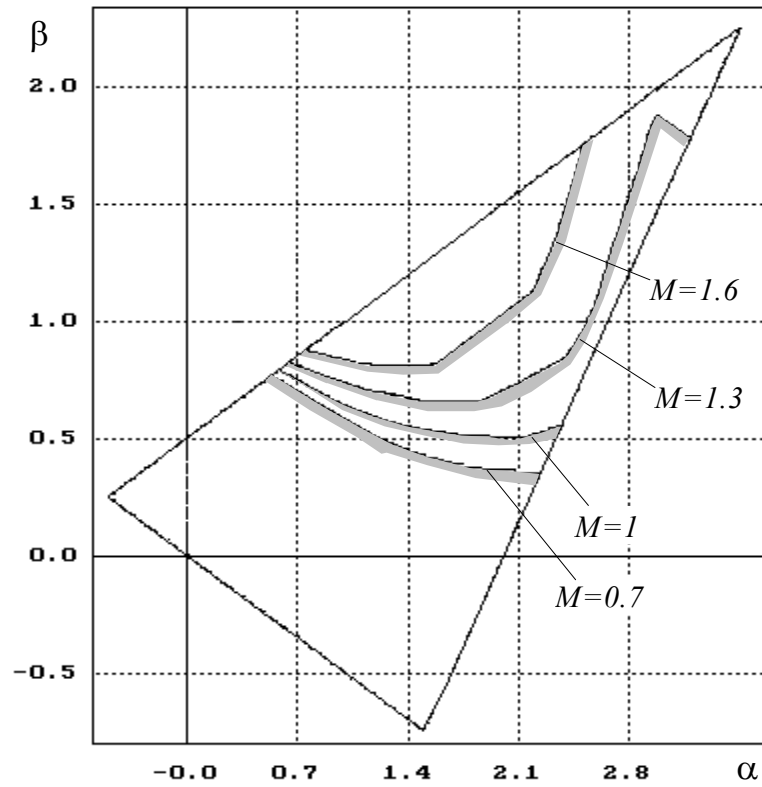


Рис. 3.24. Границы ОГУ системы с пилообразным ПИФ для  $d=0.5$ ,  $g=0$ .

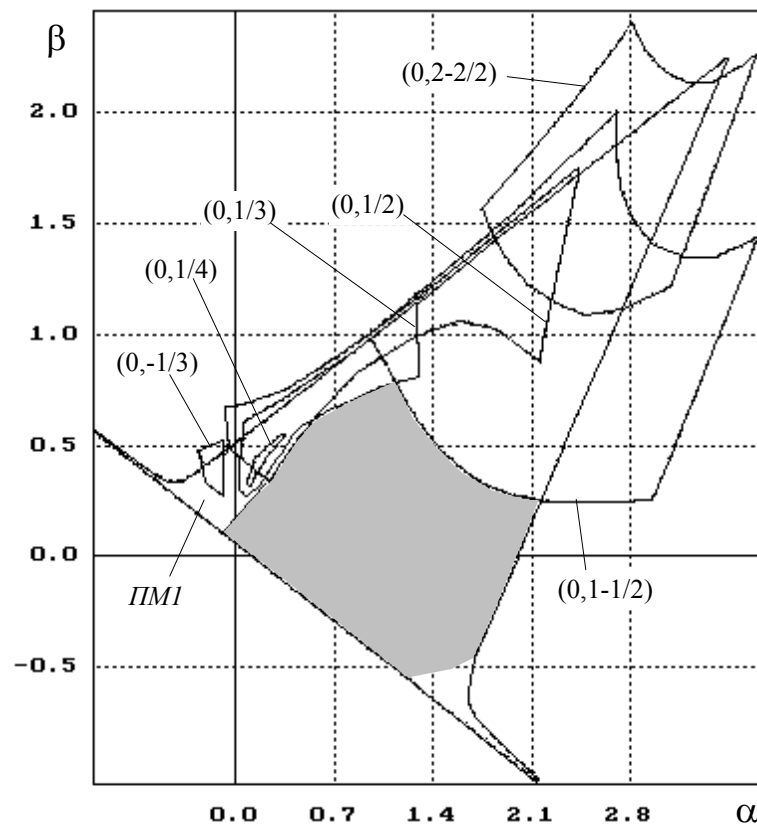


Рис. 3.25. Области существования различных периодических движений в системе с пилообразным ПИФ для  $d=0.5$ ,  $M=0.4$ ,  $g=0.1$ .

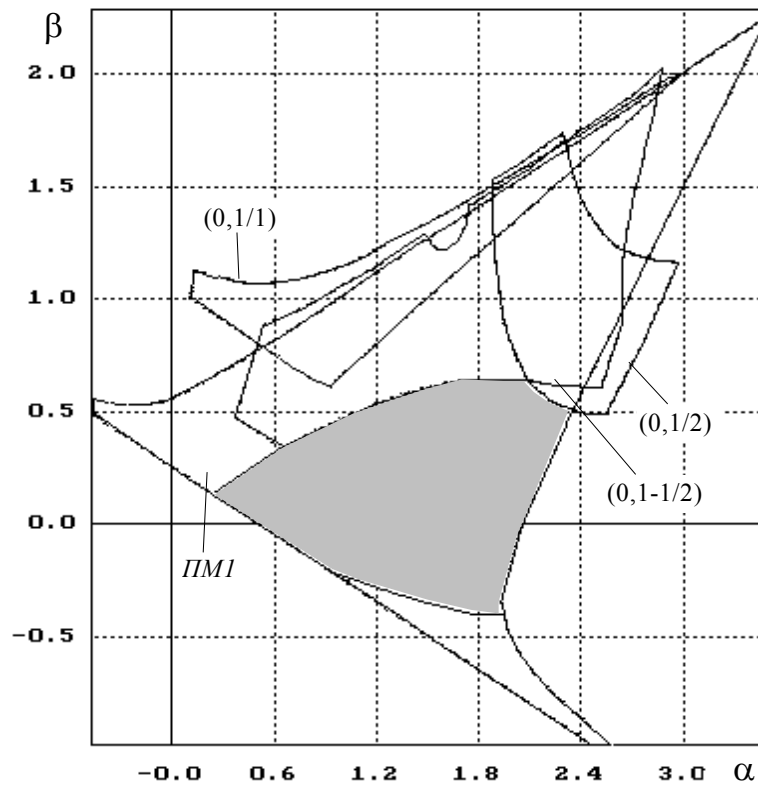


Рис. 3.26. Области существования различных периодических движений в системе с пилообразным ПИФ для  $d=0.5$ ,  $M=0.4$ ,  $g=0.5$ .

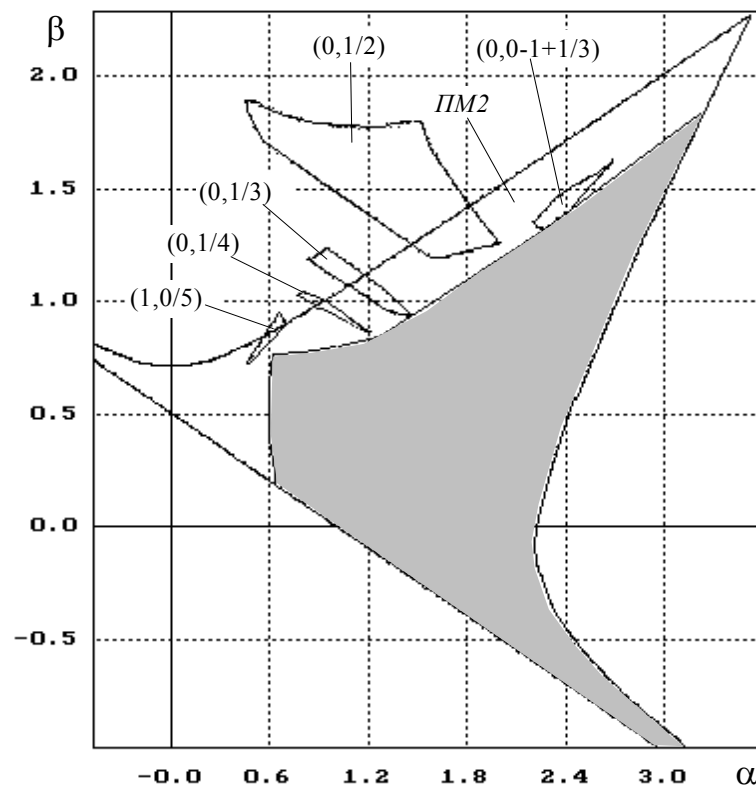


Рис. 3.27. Области существования различных периодических движений в системе с пилообразным ПИФ для  $d=0.5$ ,  $M=1.3$ ,  $g=1$ .



При дальнейшем увеличении расстройки возникают циклы второго рода, характерные для СФС с линейным фильтром.

Рассмотрим полосу захвата системы в зависимости от  $M$ . Анализ проведем для ЦСФС с пилообразным ПИФ на основе графиков, приведенных на рис. 3.29, 3.30. В результате анализа установлено, что при малых значениях  $M$  полоса захвата системы определяется в циклами второго рода по  $x$  структуры  $(1/k)$ . На рис. 3.29 приведена полоса захвата системы (заштрихованная область) и основные периодические движения, ее ограничивающие. Показана область локальной устойчивости системы. Пунктиром показана граница существования состояния равновесия, которая определяет полосу захвата в системе с ограничивающим фильтром. Из графика видно, что по сравнению с системой с ограничивающим фильтром, в данном случае наблюдается существенное уменьшение полосы захвата по  $\gamma_H$ .

На рис. 3.30 показаны границы полосы захвата для различных значений  $M$ . С ростом  $M$  полоса захвата расширяется в сторону больших расстроек. Вместе с тем в области больших усиления полоса захвата начинает ограничиваться снизу движениями второго рода по  $x$  (в данном случае это цикл  $(0, 1-1/2)$ ). При некотором  $M$  верхняя граница полосы захвата, как и для ограничивающего фильтра, начинает совпадать с полосой захвата системы с линейным фильтром ( $M > 1.5$ ). В этом случае она определяется движениями второго рода, существующими в системе с линейным фильтром.

Таким образом, максимальная полоса захвата в системе достигается для значений  $M$ , при которых движения в системе не зависели от влияния  $\Phi(y)$ .

### 3.3.3. Система с интегратором в цепи управления

Изучим основные свойства ДСФС с интегратором, имеющим пилообразную характеристику.

Как и для любой системы с астатическим фильтром, имеющим ограничение на максимальное выходное напряжение, для рассматриваемой является характерным следующее:

1. Координаты состояния синхронизма в фазовом пространстве не зависят от начальной расстройки. Для системы с синусоидальной характеристикой детектора оно существует при любых  $\alpha, \beta$ , пока выполняются условия (3.1.6).

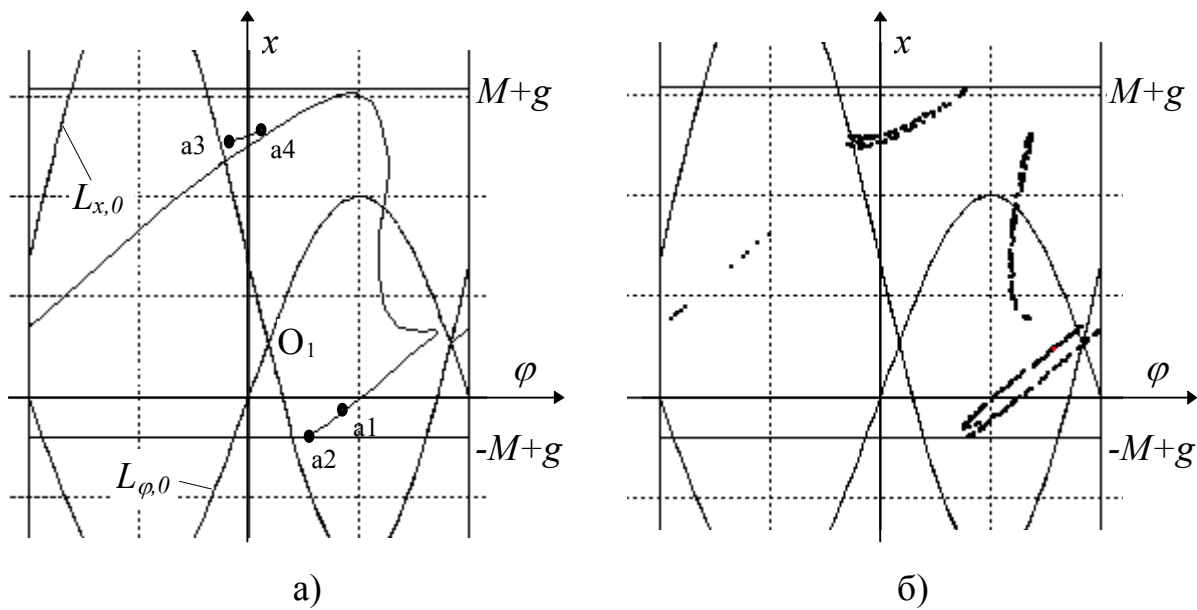


Рис. 3.28. Структура притягивающего множества  $PM2$  в фазовом пространстве СФС с пилообразным ПИФ.

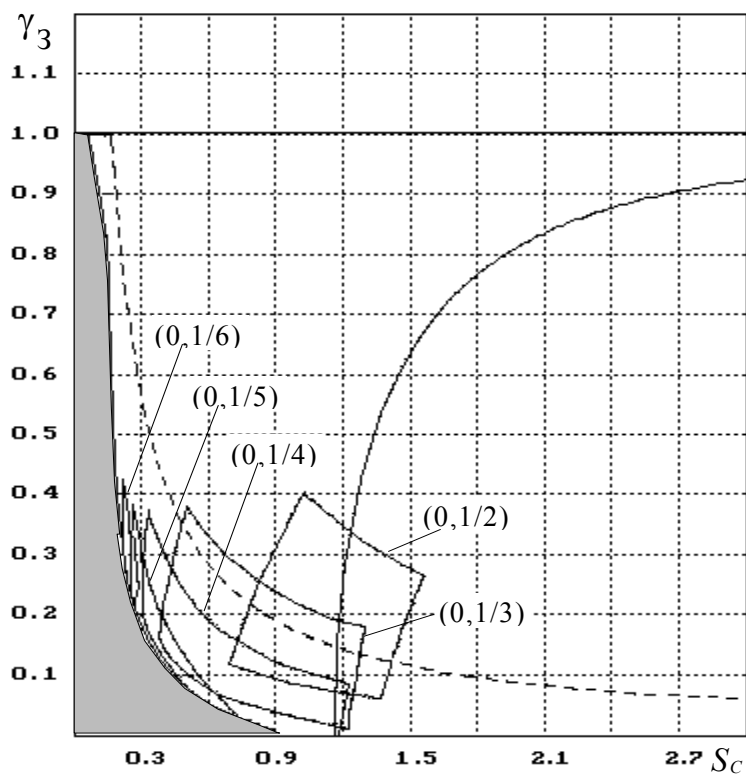


Рис. 3.29. Полоса захвата ЦСФС с пилообразным ПИФ  
для  $d=0.6$ ,  $m=1$ ,  $M=0.4$ .

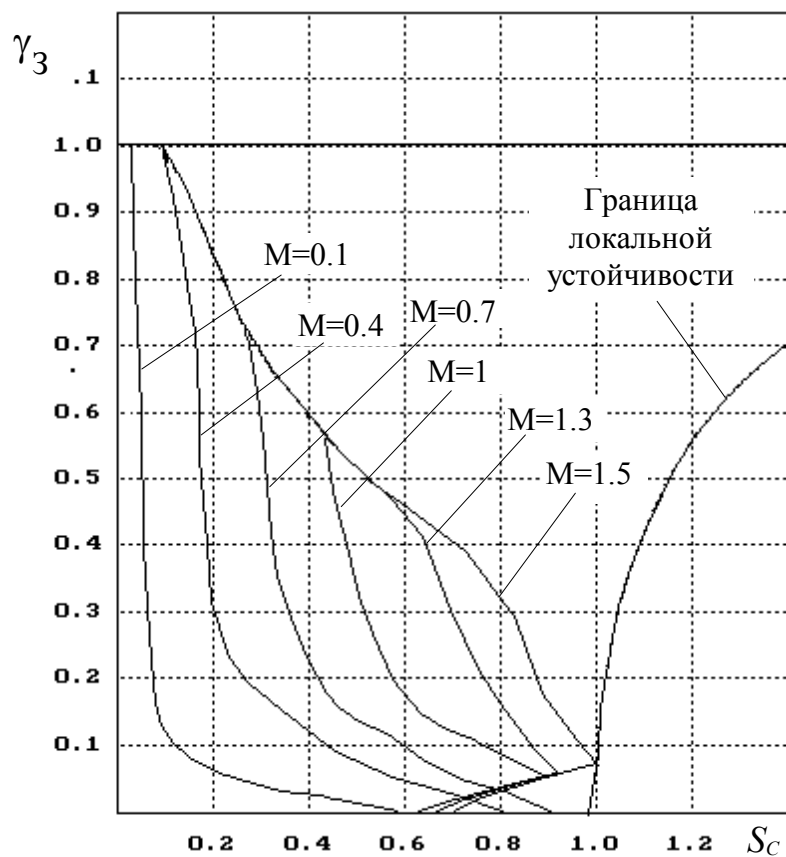


Рис. 3.30. Полоса захвата ЦСФС с пилообразным ПИФ  
для  $d=0.6$ ,  $m=1$ .

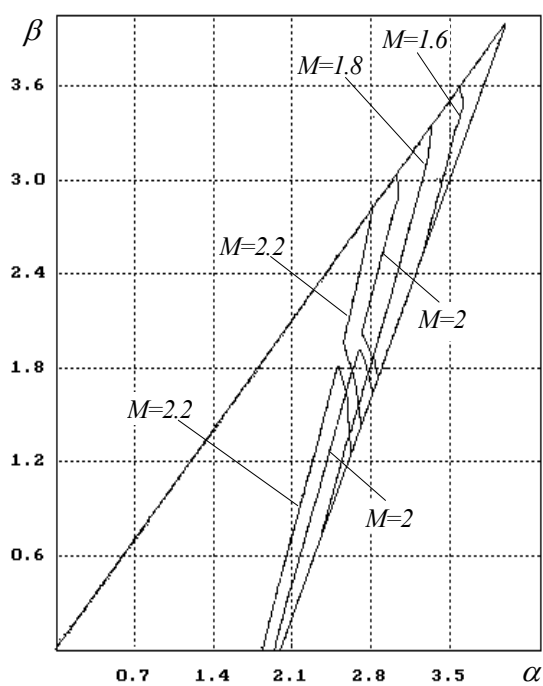


Рис. 3.31. Границы ОГУ  
системы с пилообразным  
интегратором для  $g=0$ .

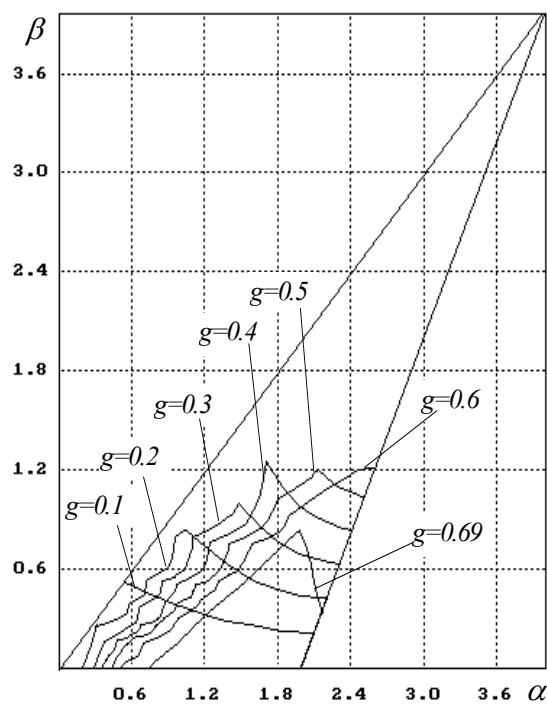


Рис. 3.32. Границы ОГУ  
системы с пилообразным  
интегратором для  $M=0.7$ .

2. В системе существует ограниченное количество кратных захватов. Кратный захват структуры  $(k/l)$  существует, если выполняется условие (3.2.13).

Как показал анализ, основные закономерности разбиения пространства параметров на области существования различных движений для данной системы и ДСФС с ПИФ, имеющей аналогичную нелинейность фильтра, совпадают. Например повторяются все типы движений. Отличие состоит в количественных зависимостях и изменениях. Ниже эти отличия будут проанализированы.

Анализ начнем со случая нулевых расстроек. В системе с пилообразным интегратором нижняя граница области существования цикла структуры  $(0, l-1/2)$  проходит при меньших  $\beta$ , чем граница области локальной устойчивости системы. Вследствие этого при малых  $M$  система глобально неустойчива. При увеличении  $M$  до значений порядка 1.6..2 правая граница области существования этого цикла смещается в сторону меньших  $\alpha$ . Это приводит к возникновению ОГУ вблизи правой границы области локальной устойчивости. На рис. 3.31 показаны границы ОГУ системы для различных значений  $M$ . Система глобально устойчива справа от показанных границ. При  $M > 2$  ОГУ разбивается циклом структуры  $(0, 0-1+0+1/4)$ . С дальнейшим ростом  $M$  происходит рождение устойчивых движений, характерных для СФС с линейным фильтром.

При расстройках, отличных от нуля, анализ дал следующие результаты.

1. При малых  $M$  наблюдается возникновение ОГУ вблизи нижней границы области локальной устойчивости. Данное явление происходит вследствие разрушения цикла  $(0, l-1/2)$ . На рис. 3.32 показаны границы ОГУ для  $M=0.7$  и различных  $g$ .

2. С увеличением  $g$  верхняя граница ОГУ, определяемая циклом  $(0, l-1/2)$ , сдвигается в сторону больших  $\beta$ . Правая граница ОГУ определяется циклами второго рода по  $x$ . С увеличением  $g$  области существования этих циклов возрастают. Это приводит к тому, что левая граница ОГУ с ростом  $M$  сдвигается в сторону больших  $\alpha$ .

3. При приближении  $-M+g$  к нулю ОГУ системы резко убывает, и при  $-M+g$  больших нуля в системе перестают выполняться условия существования состояния равновесия (3.2.14). При больших  $M$  с ростом  $g$  наблюдается схожая

последовательность изменения ОГУ за исключением того, что при значениях  $M+g$  близких к  $\pi$ , возникают циклы второго рода, характерные для системы с линейным фильтром.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что при нулевых расстройках область глобальной устойчивости системы мала. Это связано с предельными циклами, возникновение которых обуславливается симметричной структурой фазового пространства. При ненулевых расстройках симметрия фазового пространства нарушается - это ведет к возрастанию ОГУ, особенно в области малых значений  $\alpha, \beta$ .

### **3.4. Статистическая динамика ДСФС с синусоидальным детектором и нелинейным фильтром**

#### **3.4.1. Постановка задачи**

Данный раздел посвящен исследованию свойств обобщенной модели (1.1.1) при наличии шумового воздействия на входе системы. Как показано выше, наличие второй нелинейности может в значительной степени изменить поведение системы. Особенно это касается режимов захвата. Не меньший интерес вызывает анализ влияния второй нелинейности на стационарные свойства ДСФС, включая характеристики связанные с динамикой. Это связано с тем, что при наличии шума может значительно измениться характер поведения системы вблизи границ областей существования различных движений. В пользу этого говорят следующие качественные рассуждения.

Под влиянием шума возможен выход вектора состояния системы из области притяжения одного движения и переход в окрестность состояния синхронизма или другого движения. Из общих соображений понятно, что чем меньше область притяжения цикла, тем меньше вероятность нахождения вектора состояния системы в его окрестности.

На практике интерес представляет случай, когда стационарная вероятность нахождения в окрестности состояния синхронизма достаточно велика. Это означает, что среднее время до срыва синхронизма (выхода вектора состояния из окрестности состояния синхронизма) много больше, чем среднее время до попадания в окрестность состояния синхронизма из окрестности предельных

циклов. Вместе с тем возможна ситуация, когда при малой вероятности нахождения системы в области притяжения какого-либо цикла в стационарном случае, абсолютное значение времени выхода из этого цикла достаточно велико. С практической точки зрения данная ситуация является нежелательной.

Приведенные рассуждения позволяют ввести понятие статистической области глобальной устойчивости (СОГУ). Данная область определяет параметры системы, в которых среднее время до срыва состояния синхронизма не меньше заданной величины и среднее время попадания в окрестность состояния синхронизма не больше заданной величины. Исследованию СОГУ в зависимости от параметров системы и посвящен этот раздел. Шумовое воздействие представляет собой белый гауссов шум.

### 3.4.2. Стохастическая модель и описание движений в ДСФС с нелинейным фильтром

Математическая модель обобщенной системы (1.1.1) при наличии аддитивного шума на входе будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha (F(\varphi_n) + \xi_n) + x_n \\ x_{n+1} = g - \Phi(M, d(g - x_n) + \beta(F(\varphi_n) + \xi_n)) \end{cases}, \quad (3.4.1)$$

где  $\xi_n$  - значение белого гауссового шума, приведенного к выходу фазового детектора.

Для описания статистических свойств СФС воспользуемся аппаратом марковских последовательностей. Условные плотности вероятности перехода системы из одного состояния в другое в этом случае описываются уравнением Колмогорова-Чепмена [70].

$$\mu(\vec{q}_j | \vec{q}_i) = \int_{\Psi} \mu(\vec{q}_j | \vec{q}_k) \mu(\vec{q}_k | \vec{q}_i) d\vec{q}_k, \quad (3.4.2)$$

где  $\Psi$  - фазовое пространство системы.

При фиксированных начальных условиях  $\vec{q} = \vec{q}_0$  получим

$$p_{k+1}(\vec{q} | \vec{q}_0) = \int_{\Psi} \mu_k(\vec{q} | \vec{z}) p_k(\vec{z} | \vec{q}_0) d\vec{z}, \quad (3.4.3)$$

где  $p_k(\vec{q} | \vec{q}_0) = p(\vec{q}_k | \vec{q}_0)$  - условная плотность вероятности попадания системы в состояние  $\vec{q}_k$  при фиксированном значении  $\vec{q}_0$ ;  $\mu_k(\vec{q} | \vec{z}) = \mu(\vec{q}_k | \vec{q}_{k-1})$  -

плотность вероятности перехода в состояние  $\vec{q}_k$  из состояния произвольного  $\vec{q}_{k-1}$ . Найдем для нее аналитическое выражение.

Из (3.4.1) следует, что случайные процессы  $x_n$ ,  $\varphi_n$  линейно зависимы с коэффициентом корреляции равным единице. Вследствие этого условная плотность вероятности перехода из состояния  $\vec{q}_{k-1}$  в состояние  $\vec{q}_k$  имеет вид:

$$\mu(\varphi_k, x_k | \varphi_{k-1}, x_{k-1}) = \delta\left(\varphi_k - m_{\varphi k} - \frac{\beta}{\alpha}(x_k - m_{xk})\right) p_{\xi}, \quad (3.4.4)$$

где  $p_{\xi}$  плотность вероятности случайного процесса  $\xi_n$ ;  $m_{\varphi k}$ ,  $m_{xk}$  математические ожидания  $\varphi_k$  и  $x_k$  соответственно. Из (3.4.1) следует, что

$$\begin{aligned} m_{\varphi k} &= \varphi_{k-1} - \alpha F(\varphi_{k-1}) + x_{k-1}, \\ m_{xk} &= g_f - \Phi\left(M, d(g_f - x_{k-1}) - \beta F(\varphi_{k-1})\right). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Несложно видеть, что в данной системе марковская последовательность будет однородной, т.е. плотности вероятности перехода  $\mu(\vec{q}_k | \vec{q}_{k-1})$  не зависят от времени  $k$ . Учитывая сделанное ранее допущение, что шум  $\xi_n$  гауссов, из (3.4.4) с учетом (3.4.5) получим:

$$\begin{aligned} \mu(\varphi_k, x_k | \varphi_{k-1}, x_{k-1}) &= \delta\left(\varphi_k - m_{\varphi k} - \frac{\beta}{\alpha}(x_k - m_{xk})\right) \times \\ &\times \frac{1}{\beta \sqrt{2\pi D_{\xi}}} \exp\left(-\frac{(x_k - m_{xk})^2}{2 D_{\xi} \beta^2}\right), \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

где  $D_{\xi}$  - дисперсия входного шума.

Стационарная плотность вероятности, приведенная к интервалу по  $\varphi$   $(-\pi, \pi)$ , определяется из (3.4.3) и с учетом (3.4.5), (3.4.6) удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} p(x_2, \varphi_2) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{g-M}^{g+M} \delta\left(\varphi_1 - m_{\varphi 2} - \frac{\beta}{\alpha}(x_2 - m_{x2})\right) \times \\ &\times \frac{1}{\beta \sqrt{2\pi D_{\xi}}} \exp\left(-\frac{(x_2 - m_{x2})^2}{2 D_{\xi} \beta^2}\right) p(x_1, \varphi_1) dx_1 d\varphi_1, \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Для нахождения среднего времени до выхода вектора состояния за границу определенной области  $\Theta$  из заданных начальных условий  $\vec{q} = \vec{q}_0$  можно воспользоваться следующим выражением [70]

$$M(\vec{q}_0) = I + \int_{\Theta} P(\vec{z} | \vec{q}_0) d\vec{z}, \quad (3.4.8)$$

где функция  $P(\bar{z}|\bar{q}_0)$  является решением интегрального уравнения

$$P(\bar{q}|\bar{q}_0) = \mu(\bar{q}|\bar{q}_0) + \int_{\Theta} \mu(\bar{q}|\bar{z}) P(\bar{z}|\bar{q}_0) d\bar{z} . \quad (3.4.9)$$

Плотность вероятности перехода  $\mu(\bar{q}|\bar{z})$  определяется по формулам (3.4.5), (3.4.6).

### 3.4.3. Исследование статистической области глобальной устойчивости

Рассмотрим вначале основные свойства системы (3.4.1) при наличии шума.

Найти решение (3.4.3), (3.4.7), (3.4.8) аналитически не представляется возможным. Численное решение может быть найдено при помощи любого из известных методов решения интегральных уравнений Фредгольма [71], в этом разделе при расчетах использовался метод последовательных приближений.

Анализ показывает, что при наличии в системе нескольких устойчивых периодических движений СПВ представляет собой двумерную поверхность с локальными максимумами, соответствующими точкам движений в автономной системе. При стремлении дисперсии к нулю СПВ приближается к набору в  $\delta$ -функций, пронормированных на величину отношения областей притяжения к площади всего фазового пространства. Соответственно в предельном случае ( $D_\xi=0$ ) СПВ начинает зависеть от начальных условий.

На рис. 3.33 приведены результаты расчета плотности вероятности ДСФС с синусоидальной характеристикой детектора и пилообразным фильтром. В системе существует цикл структуры (0,1-1/2), в одной из точек которого и были выбраны начальные условия. Графики соответствуют ситуациям, отстоящим во времени через четное число итераций, поэтому плотность вероятности отлична от нуля в одной и той же точке цикла. Из приведенных графиков видно, что с течением времени вероятность нахождения системы в окрестности состояния синхронизма увеличивается. Это сопровождается уменьшением вероятности нахождения системы в цикле. Расчет показывает, что в итоге вероятность нахождения системы в синхронизме равна  $\approx 0.995$ . Вместе с тем, приведенные графики могут служить иллюстрацией достаточно медленного перехода векторов состояния из области притяжения цикла. Согласно численному решению уравнений (3.4.8), (3.4.9), среднее время выхода равно примерно 500 итераций.



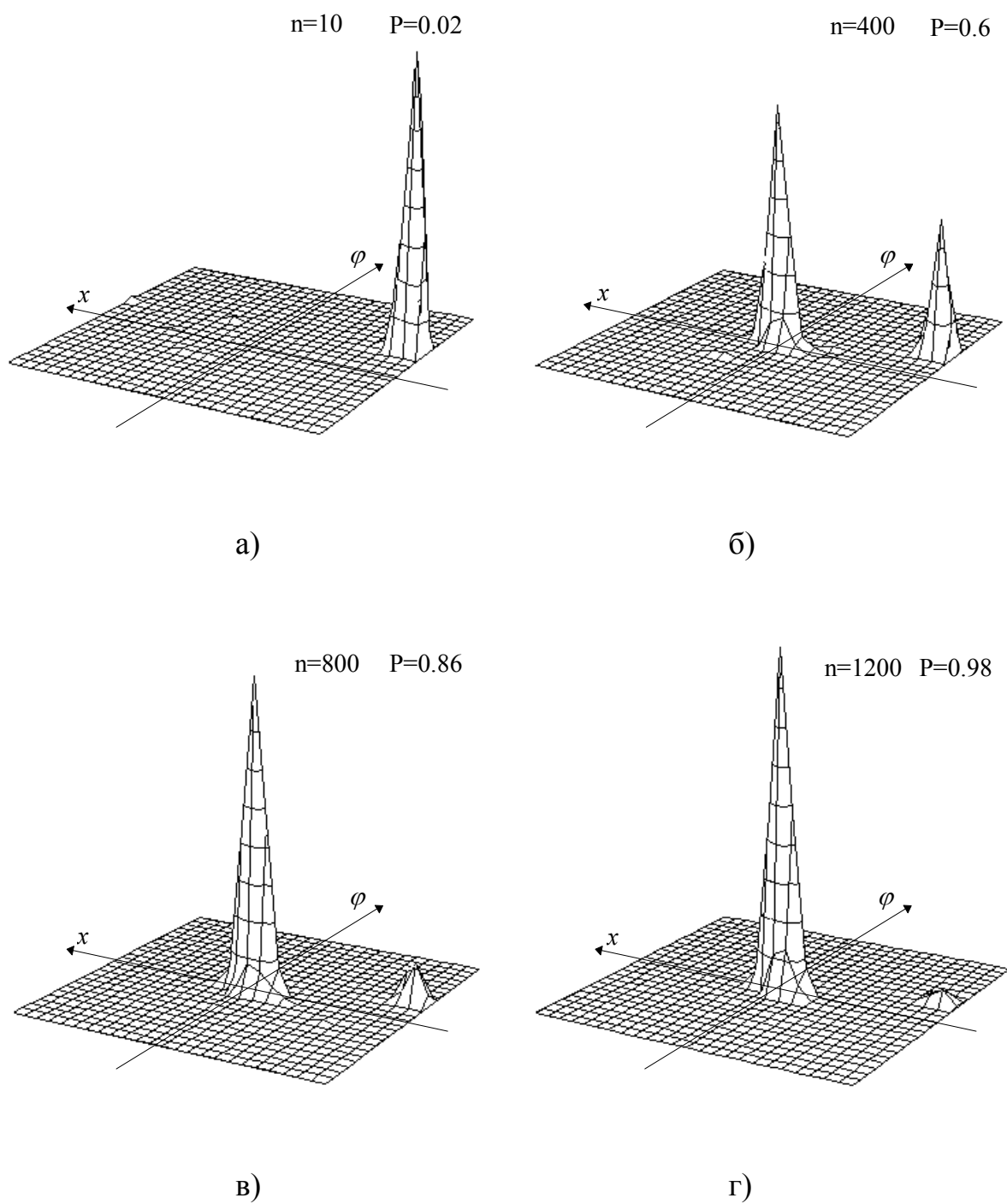


Рис. 3.33. Последовательное преобразование плотности вероятности системы с пилообразным фильтром с начальными условиями, взятыми в точке цикла, для  $M=1$ ,  $\alpha=1.2$ ,  $\beta=0.9$ ,  $g=0$ ,  $d=0.5$

Проанализируем далее СОГУ системы при наличии в ней предельных циклов. Важным вопросом при проведении такого анализа является выбор окрестности состояния синхронизма, попадание в которую является критерием выхода системы из периодического движения. Соответственно срыв синхронизма происходит при выходе из этой области. Возьмем в качестве такой окрестности область притяжения состояния синхронизма автономной системы. Этот выбор оправдан, так как из-за влияния нелинейности фазового детектора и фильтра эта область может состоять из большого количества несвязанных подобластей. Вместе с тем, вследствие дискретности перемещения вектора состояния в фазовом пространстве, попадание в каждую из этих подобластей приводит систему в окрестность состояния синхронизма.

В соответствии с вышесказанным, применим для расчета следующую методику:

1) На основе результатов, полученных ранее, определим существующие в автономной системе устойчивые движения. Найдём их точки.

2) Определим область притяжения состояния синхронизма автономной системы.

3) Используя формулы (3.4.8), (3.4.9), численно найдём среднее время до первого попадания в область притяжения состояния синхронизма из начальных условий в точках цикла для неавтономной системы.

4) Используя формулы (3.4.8), (3.4.9), численно найдём среднее время до срыва синхронизма из начальных условий в состоянии синхронизма системы.

На рис. 3.34-3.40 приведены результаты численного расчета СОГУ для различного среднего времени достижения области притяжения состояния синхронизма. Во всех графиках среднее время до срыва синхронизма (выхода из области притяжения состояния синхронизма) превышает 5000.

Анализ полученных данных подтверждает ранее сделанное предположение о том, что среднее время выхода системы из области притяжения периодического движения сокращается с уменьшением этой области. Когда область притяжения периодических движений невелика и сравнима с величиной  $\alpha D_\xi$  по координате  $\varphi$  и с величиной  $\beta D_\xi$  по координате  $x$ , время перехода из области притяжения этих движений в окрестность состояния синхронизма не велико. И наоборот, когда предельные циклы имеют значительную область притяжения, время велико. Таким образом, наибольшее

расширение СОГУ по сравнению с ОГУ происходит в случаях, когда ОГУ ограничивается предельными циклами с небольшими областями притяжения. Заметим, что с увеличением  $\alpha$ ,  $\beta$  влияние шума растет, так как шумовое воздействие входит в разностные уравнения через эти коэффициенты.

1. На рис. 3.34, 3.35 представлены результаты расчета СОГУ для системы с линейным ПИФ. Из графиков видно, что наибольшее расширение СОГУ по сравнению с ОГУ автономной системы наблюдается для циклов, имеющих небольшие области притяжения движений. На рис. 3.34 это цикл первого рода  $(0/4)$ , на рис. 3.35 это цикл второго рода  $(1/2)$  (см. рис. 3.3, 3.5б). Область притяжения кратных захватов (циклов  $(1/1)$ ) становится достаточно большой даже при выборе параметров вблизи границы существования этого движения. Вследствие этого граница СОГУ практически совпадает с границами областей существования этих циклов.

2. На рис. 3.36, 3.37 представлены результаты расчета СОГУ для случая ограничивающего фильтра.

При малых значениях  $M$ , как это было показано ранее, в системе существуют циклы, точки которых располагаются на границах  $\Phi(y)$ . Это циклы структуры  $(0/2)_H$  и  $(0/1)_H$  (рис. 3.36). За счет влияния нелинейности  $\Phi(y)$  области притяжения этих циклов достаточно велики. Это приводит к тому, что разрушить их может только шумовое воздействие с достаточно большой дисперсией. Вследствие этого СОГУ данной системы не сильно отличается от ОГУ.

Полоса захвата системы при малых  $M$  определяется условиями существования состояния синхронизма, вследствие этого СОГУ практически совпадает с ОГУ.

С увеличением  $M$  возникают движения не все точки которых лежат на границах  $\Phi(y)$ . Области притяжения этих циклов невелики. Это ведет к увеличению за счет них СОГУ. На рис. 3.37 это движения  $(0/3)$ ,  $(0/6)$ ,  $(1/2)$ ,  $(2/4)$  (см. рис. 3.15б). Границы СОГУ определяются движениями с большим временем выхода. На рис. 3.37 это инвариантная кривая в области малых  $\alpha$ ,  $\beta$  и цикл  $(0/2)$  в области больших  $\alpha$ ,  $\beta$ .

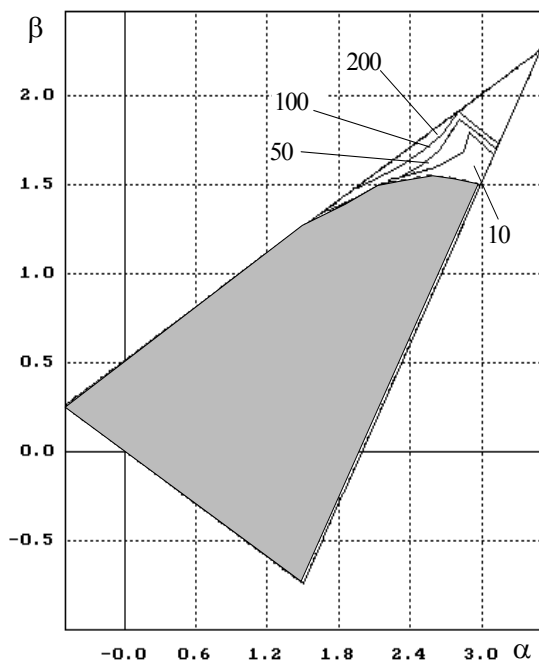


Рис. 3.34. СОГУ ДСФС с  
линейным ПИФ для  $d=0.8$ ,  $g=0$ ,  
 $D_{\xi}=10^{-3}$ .

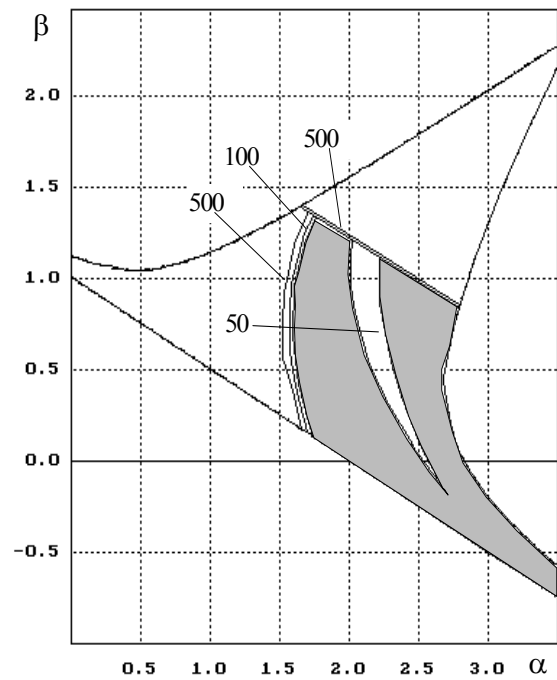


Рис. 3.35. СОГУ ДСФС с  
линейным ПИФ для  $d=0.5$ ,  $g=2$ ,  
 $D_{\xi}=10^{-3}$ .

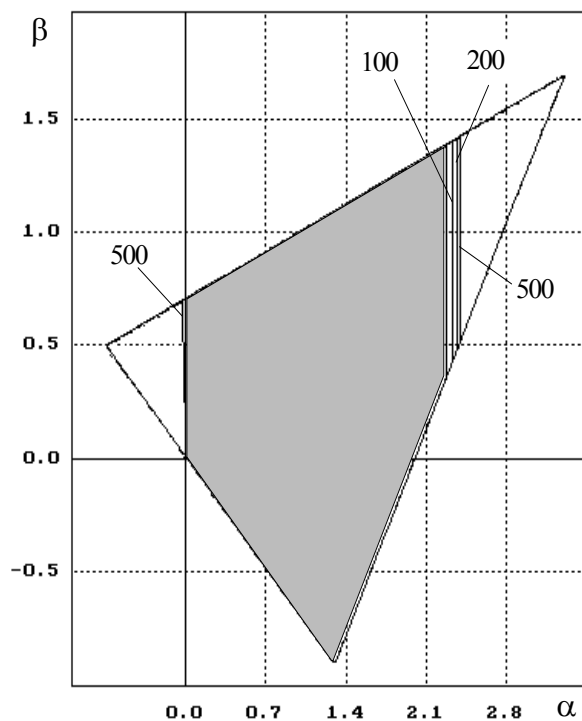


Рис. 3.36. СОГУ системы с  
ограничивающим ПИФ для  $d=0.3$ ,  
 $M=0.1$ ,  $g=0$ ,  $D_{\xi}=10^{-3}$ .

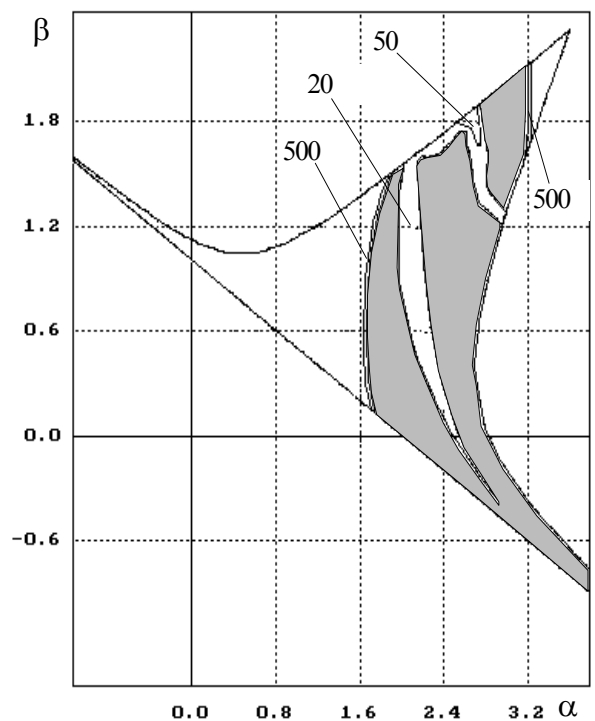
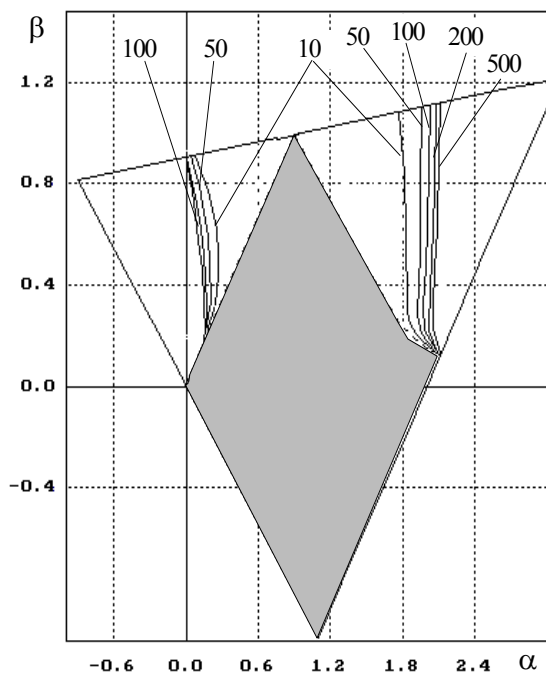
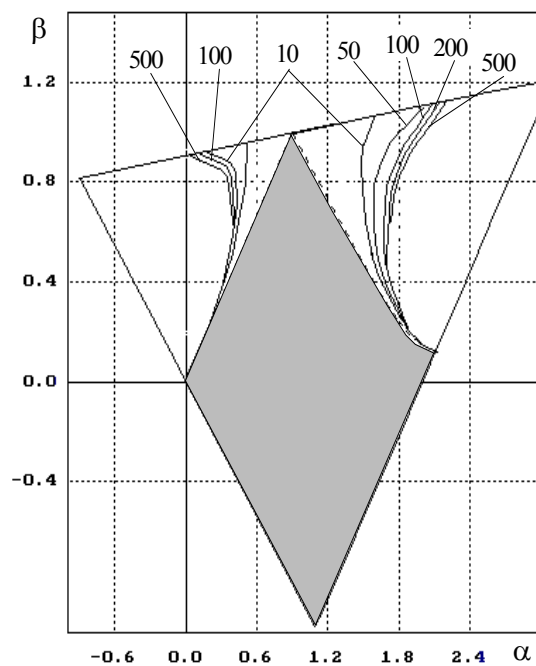


Рис. 3.37. СОГУ ДСФС с  
ограничивающим ПИФ для  $d=0.5$ ,  
 $M=1.3$ ,  $g=2$ ,  $D_{\xi}=10^{-3}$ .



а)



б)

Рис. 3.38. СОГУ ДСФС с пилообразным ПИФ для  $d=0.1$ ,  $M=0.1$ ,  $g=0$ .

а)  $D_\xi=10^{-4}$ , б)  $D_\xi=10^{-3}$

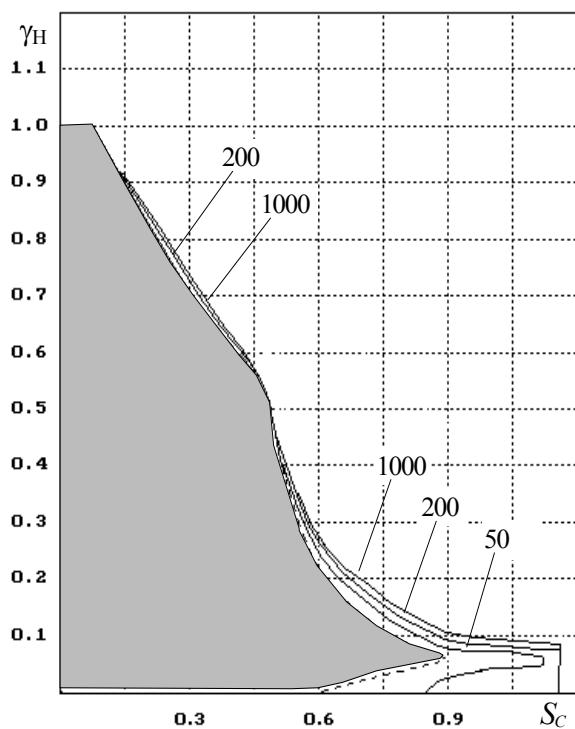


Рис. 3.39. СОГУ ЦСФС с пилообразным ПИФ для  $d=0.6$ ,  $m=1$ ,  $M=1$ ,  $D_\xi=10^{-3}$ .

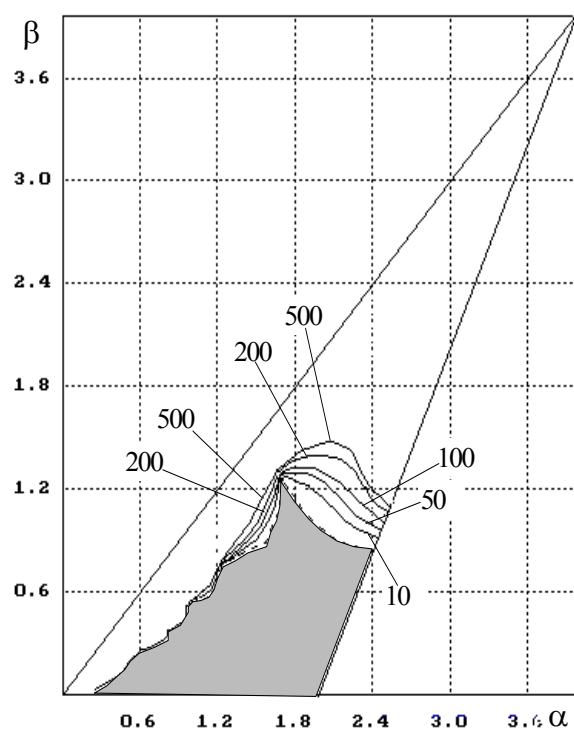


Рис. 3.40. СОГУ системы с пилообразным интегратором для  $M=0.7$ ,  $g=0.4$ ,  $D_\xi=10^{-3}$ .

3. Анализ СОГУ системы с пилообразным фильтром проведем по рис. 3.38-3.40. При малых значениях  $M$  правая граница ОГУ системы определяется семейством циклов  $(0, k-k/0)$ , а левая дополнительными состояниями синхронизма  $(0, k/1)$ . Так как циклы этих семейств имеют небольшие области притяжения, это приводит к тому, что уже при незначительных значениях  $D_\xi$  СОГУ значительно превышает ОГУ. На рис. 3.38 показаны результаты расчета СОГУ для различных дисперсий входного шума. Наибольшее расширение ОГУ происходит с увеличением  $\beta$ . Это связано с одной стороны с увеличением влияния шумового воздействия, с другой стороны - с уменьшением при больших  $\beta$  области притяжения циклов. Также это можно объяснить увеличением числа периодических движений при меньших  $\beta$ . На рис. 3.39 показан результат расчета статистической полосы захвата системы. В отличие от системы с насыщающим фильтром ее границы определяются в основном циклами второго рода по  $x$ . Области притяжения их невелики, вследствие этого они разрушаются при наличии шума. Наиболее значительное расширение ее происходит в области больших  $D$ .

Аналогичная картина наблюдается и в системе с пилообразным интегратором рис. 3.40. Расширение ОГУ происходит в основном за счет разрушения циклов второго рода по координате  $x$ . В автономной системе они определяют левую границу ОГУ.

Таким образом, наиболее существенное влияние шумового воздействия на ОГУ наблюдается в системе с пилообразным фильтром. Это обусловлено тем, что в этой системе ОГУ ограничивается циклами с небольшими областями притяжения.

### 3.5. Выводы

1. В ходе проведенных исследований изучены основные динамические свойства обобщенной модели ДСФС с синусоидальной характеристикой и различными нелинейными фильтрами: пропорционально-интегрирующим ограничивающего и пилообразного типа, астатическим ограничивающего и пилообразного типа. К числу изученных свойств относятся: области существования периодических и квазипериодических устойчивых движений, условия возникновения различных устойчивых движений, их бифуркации в

зависимости от различных параметров, области устойчивости в большом и целом, полоса захвата.

2. Для проведения исследований была предложена методика, основанная на качественно-аналитическом и численно-качественном подходах анализа отображений с синусоидальной нелинейностью на цилиндре и торе. Результатом ее применения явился целый ряд условий и аналитических оценок, определяющих движения системы. Получены значения границ областей существования различных движений в ДСФС с линейным пропорционально-интегрирующим и астатическим фильтрами. Получены точные значения полосы захвата. Сравнивая полученные результаты с данными исследования системы с пилообразной характеристикой детектора, можно сказать, что при малых значениях  $\alpha_p$  в данном случае захват обеспечивается в значительно более широком диапазоне усиления. Это объясняется тем, что кратные захваты в системе с синусоидальной характеристикой детектора существуют в области больших значений  $D$ .

3. С помощью предложенной методики изучена динамика обобщенной модели ДСФС с синусоидальной характеристикой детектора и ограничивающим фильтром. Установлены общие закономерности поведения системы на фазовой плоскости. Найдены области параметров системы, где нелинейные свойства фильтра не влияют на установившиеся движения в системе. Описаны возможные периодические движения, их бифуркации в зависимости от параметров системы. В конечном результате получены области устойчивости в целом и графики полосы захвата для произвольных параметров системы. Показано, что при малых значениях  $M$  полоса захвата определяется условиями существования состояния синхронизма, в отличие от системы с пилообразным детектором, где она определялась циклами-интервалами. С ростом границ нелинейности  $\Phi(y)$  полоса захвата определяется в основном вращательными движениями по  $\varphi$ .

4. Для случая пропорционально-интегрирующего ограничивающего фильтра, характерного для цифровых систем, установлена возможность существования в системе движений, аналогичных состояниям синхронизма. Показано, что в этих режимах ДСФС ведет себя подобно системе первого порядка. При этом нелинейный фильтр находится в насыщении, а процесс подстройки частоты перестраиваемого генератора обеспечивает линейный пропорциональный канал. Показано, что данный режим реализуется только при отрицательных значениях параметра  $\alpha$ .

5. Исследованы динамические свойства ДСФС с синусоидальной характеристикой детектора и пилообразными пропорционально-интегрирующим фильтром и интегратором. Описаны возможные периодические движения, их бифуркации в зависимости от параметров системы. В результате анализа установлено, что в данной системе существуют семейства периодических движений. Циклы одного семейства имеют одинаковый период и разные абсолютные приращения координат  $\varphi$ ,  $x$ . Пространство параметров  $(\alpha, \beta)$  имеет периодичность относительно областей существования циклов одного семейства. Аналогичная картина наблюдается и в системе с пилообразным детектором.

Конечным результатом исследований явилось построение областей устойчивости в целом, зависимость полосы захвата от параметров нелинейности. Показано, что при малых  $M$  полоса захвата этой системы определяется вращательными движениями по координате  $x$ , как и в системе с пилообразным детектором. Это приводит к существенному уменьшению полосы захвата по сравнению с системой, имеющей ограничивающий фильтр.

6. Изучены возможные типы устойчивых предельных движений в системе с пилообразным фильтром. В частности, установлено, что устойчивые предельные множества в данной системе возникают при нелинейном продолжении неустойчивой сепаратрисы седла за границы  $\Phi(y)$ . Рассмотрены возможные типы данных множеств, найдены области их существования в пространстве параметров.

Как и в системе с пилообразной характеристикой детектора, установлена возможность существования в системе нескольких состояний, эквивалентных состоянию синхронизма  $(C_{1,m}, C_{2,m})$ . Данные движения обусловлены вращательными движениями по координате  $x$ . Показано, что  $C_{1,m}, C_{2,m}$  могут существовать даже при отсутствии основного состояния равновесия.

7. Изучено поведение ДСФС с синусоидальным детектором при наличии дополнительного шумового воздействия. Рассмотрено влияние шума на возможные в системе периодические движения. Показано, что предельные циклы могут разрушаться под воздействием шума. Путем численного решения уравнения Колмогорова-Чепмена получены области статистической полосы захвата. Установлено, что наибольшее расширение области глобальной устойчивости достигается в системе с пилообразным фильтром, т.к. она ограничивается в этом случае движениями с малыми областями притяжения.



## 4. Экспериментальные исследования ДСФС с нелинейным фильтром

### 4.1. Постановка задачи

Целью настоящей главы является проверка наиболее принципиальных результатов теоретических исследований обобщенной математической модели ДСФС с нелинейным фильтром в цепи управления, выполненных в предыдущих главах, и дополнительные исследования, вызванные необходимостью учета в некоторых случаях допущений, которые были сделаны при выводе обобщенной модели. Особенно актуальными дополнительные исследования являются для импульсных систем, поскольку сделанные в отношении их допущения: постоянство периода дискретизации, нулевое время стробирования детектора, неидеальность запоминания детектором, фиксированное время срабатывания нелинейности фильтра - могут стать при определенных условиях достаточно весомыми и оказать заметное влияние на динамические процессы. Допущения об отсутствии эффектов квантования, сделанные для цифровых и импульсно - цифровых систем, для динамики системы имеют значительно меньшее значение.

Учитывать все вышеперечисленные факторы в обобщенной модели нецелесообразно, так как, во-первых, теряется общность, во-вторых, модель становится настолько сложной, что исключается возможность какого-либо качественно-аналитического исследования. Необходимо подчеркнуть, что большинство перечисленных допущений являются достаточно традиционными при исследовании как импульсных, так и цифровых систем фазовой синхронизации [3,7,14,58,61].

Дополнительные исследования ниже выполняются с помощью компьютерного моделирования на ПЭВМ. Причем для импульсной системы это выливается в самостоятельное исследование, хотя и тесно связанное с исследованиями обобщенной математической модели. Для цифровой СФС необходимость в самостоятельном исследовании отпадает, так как эту функцию практически в полном объеме берет на себя вычислительный блок, входящий в состав цифровой системы и выполняющий все вычисления.

Другой целью главы является выработка рекомендаций для пользователей и разработчиков по конкретному управлению состоянием ДСФС (начальным

или промежуточным) для обеспечения наиболее благоприятных условий в кольце, отвечающих требуемым характеристикам. Такие рекомендации должны основываться на результатах проведенных качественно-аналитических исследований обобщенной модели, компьютерного моделирования и экспериментальных исследований лабораторных модулей. С другой стороны, они должны учитывать простоту и эффективность управления состоянием колец. С точки зрения решаемых в диссертации задач управление может быть направлено на обеспечение максимальных частотных расстроек, при которых система гарантированно попадает в режим синхронизации. При этом, как будет показано далее, эффект может быть достигнут не только за счет выбора параметров, обеспечивающих максимальную полосу захвата в системах с нелинейным фильтром, но и за счет управления одной или двумя координатами. Это становится возможным благодаря наличию информации о возможных, ограничивающих захват движениях, их областях притяжения, бифуркациях.

В процессе проводимых исследований решаются следующие задачи:

1. Построение компьютерной модели импульсной СФС с ограничивающим интегратором, учитывающей сделанные ранее допущения.
2. Исследование компьютерной модели импульсной СФС в диапазоне физических параметров, соответствующем диапазону параметров обобщенной модели, и в необходимом диапазоне начальных условий системы.
3. Разработка и экспериментальные исследования динамических характеристик лабораторного модуля импульсной СФС с астатическим нелинейным фильтром в контрольных режимах и заданных начальных условиях.
4. Разработка и экспериментальные исследования динамических характеристик лабораторного модуля цифровой СФС на базе вычислительного блока, позволяющего смоделировать произвольные режимы функционирования системы, включая движения из произвольных начальных условий.

## **4.2. Компьютерное моделирование импульсной СФС с интегратором в цепи управления**

При моделировании импульсных и цифровых колец синхронизации будем пользоваться принципами, изложенными в [73,74]. При этом сначала создаются алгоритмические модели отдельных узлов кольца по заданным передаточным функциям и нелинейным характеристикам. Далее, в соответствии со структурой системы составляется общая схема модели, реализуемая в виде программы на алгоритмическом языке.

Процессы (дискретные и непрерывные), протекающие в импульсных СФС, можно с достаточной точностью заменить дискретными во времени  $t=k\Delta t$ , где  $\Delta t$  - выбранный шаг дискретизации времени,  $k=0,1,2,\dots$ . Расчетными моделями узлов системы при этом являются алгоритмы, позволяющие преобразовать на ЭВМ с допустимой погрешностью дискретные реализации входных сигналов в дискретные реализации выходных сигналов. Для цифровых систем моделирование отдельных узлов проводится с учетом конечности их разрядной сетки, с применением методов целочисленных вычислений. Моделирование непрерывных узлов и сигналов ЦСФС осуществляется так же, как и для импульсных систем.

В основу компьютерной модели положена структурная схема, приведенная на рис. 4.1. В дополнение к уже известным на схеме приняты обозначения: ГПН - генератор пилообразного напряжения; РЭ - релейный элементы; ЗУ - запоминающее устройство; ФИ - формирователь импульсов. Моделирование на ЭВМ отдельных импульсных и непрерывных узлов представленных схем приводилось по методике, изложенной в [78].

Все приведенные в главе расчеты выполнены с помощью системы программирования Borland Pascal® ver.7.0, Borland Delphi® 3.0.

### **4.2.1. Блок-схема моделирующего алгоритма**

На рис. 4.2 представлена блок-схема алгоритма, моделирующего протекающие в ИСФС процессы.

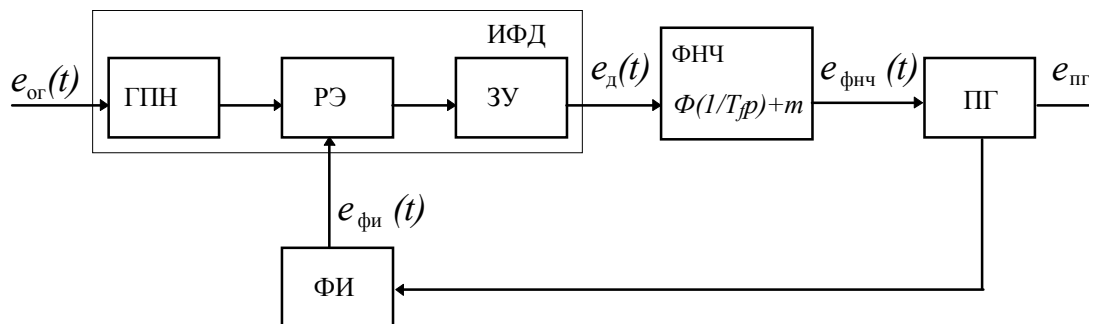


Рис. 4.1. Структурная схема компьютерной модели импульсной СФС с нелинейным фильтром.

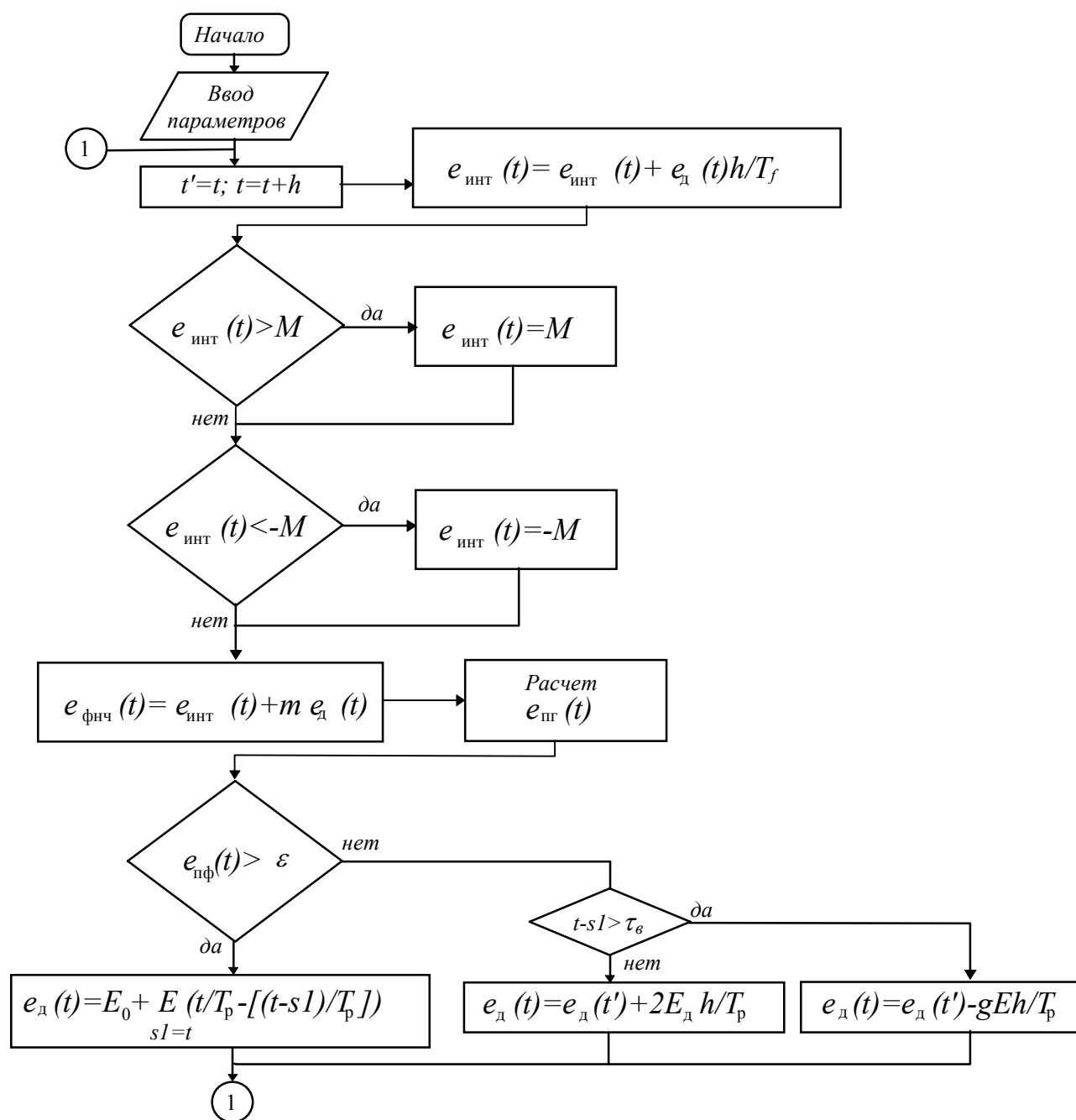


Рис. 4.2. Блок схема моделирующего алгоритма импульсной СФС с ограничивающим интегратором.

Шаг разбиения временной оси для приближенных вычислений выбирается из условия заданной точности численного решения выражений, описывающих процессы в системе. Исходя из этого, в проведенных исследованиях шаг выбирался из выражения  $h = \frac{T_p}{P}$ , где  $T_p$ - период опорного сигнала,  $P$  - целое положительное число, что обеспечивало численное решение моделирующих выражений любого из отдельных узлов схемы с точностью не менее второго порядка малости.

Для начала расчета процессов в исследуемой системе производится ввод физических параметров системы, а также начальных условий. Кроме физических параметров, непосредственно связанных с моделью, определяются дополнительные переменные и устанавливается их стартовое значение.

Для расчета модели ИФД с учетом дискретных помех, возникающих на частоте сравнения, задаются длительности импульсов выборки  $\tau_l$  формирователя импульсов ФИ. Кроме того, вводится коэффициент  $p_l$ , определяющий потери в запоминающем устройстве ЗУ.

Компьютерная модель позволяет учесть следующие особенности системы:

- переменный интервал регулирования;
- произвольное время срабатывания нелинейности фильтра;
- неидеальность запоминания детектора;
- отличие детектора "выбока-запоминание" от экстраполятора нулевого порядка.

С точки зрения возможного влияния на динамические процессы наибольшее значение имеет переменный интервал дискретизации и произвольное время срабатывания нелинейности фильтра. Третья и четвертая особенности больше сказываются на спектральных характеристиках выходного сигнала.

На основе моделей отдельных звеньев и моделирующего алгоритма всей системы разработано специализированное программное обеспечение для ЭВМ, которое позволяет проводить исследование динамических характеристик изучаемого объекта, а также определять полосу захвата системы в широком диапазоне изменения ее параметров.

Воспользуемся для определения полосы захвата следующей методикой. Введем интервал времени  $T_c$ , необходимый для попадания системы в режим

синхронизма. Режимом синхронизма определим состояние системы, при котором значение частоты выходного сигнала находится в малой окрестности расчетного  $f_{n2}=f_{ex}$  сколь угодно длительное время. Величина  $T_C$  определяется из условия максимальной длительности переходных процессов, согласованной с практическим применением. Для расчетов компьютерной модели используем соотношение  $T_C=50T_p$ , где  $T_p$  - период опорного сигнала кольца. Задача сводится к исследованию поведения системы при представлении начальной расстройки

$$\gamma_H=(\omega_{o2}-\omega_{n20})/S_y E$$

в виде ступенчатой функции с интервалом равным  $T_C$ . Величина скачка ступеней функции зависит от желаемой точности измерения. При положительных (отрицательных)  $\gamma_H$  в качестве полосы захвата будем брать минимальное (максимальное) значение начальной расстройки, при которой исчезает режим биений.

С учетом сказанного алгоритм расчета полосы захвата может быть сформулирован следующим образом:

1. Задается начальное значение обобщенного коэффициента усиления кольца  $D$ .
2. Задается значение начальной расстройки  $\gamma_H$ , для которого система находится в режиме биений.
3. Действующее  $\gamma_H$  уменьшается на малую величину, определяемую желаемой точностью измерения, например 0.01. Уменьшение расстройки  $\gamma_H$  производится увеличением  $\omega_{n20}$ .
4. Производится расчет процессов в устройстве на интервале времени  $T_C$  для различных начальных условий в системе. Анализируется режим биений. Если режим биений сохранился, то происходит возврат к пункту 3.
5. Для принятия решения о нахождении системы в полосе захвата необходимо провести перебор возможных начальных условий для расчета процессов в модели с целью проверки существования в ней единственного устойчивого состояния синхронизма. Для выполнения подобной процедуры используется легко реализуемый на ЭВМ метод Монте-Карло [37]. В случае нахождения хотя бы одного набора начальных условий, для которых захвата не

происходит, необходимо вернуться к пункту 3. Если такого не обнаружено, то текущее  $\gamma_H$  соответствует граничному значению полосы захвата.

6. Для продолжения расчета изменяется значение обобщенного коэффициента усиления  $D$  и происходит переход к пункту 2.

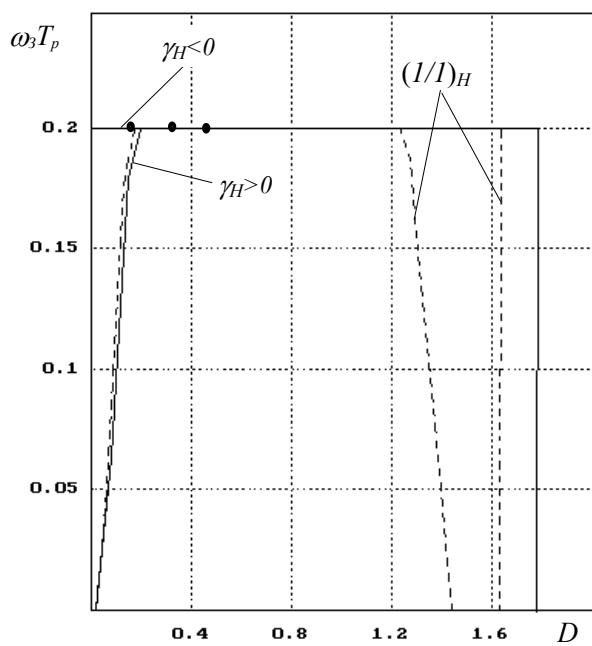
Предложенный алгоритм аналогично выполняется и для отрицательных значений  $\gamma_H$ .

#### 4.2.2. Анализ результатов исследования компьютерной модели

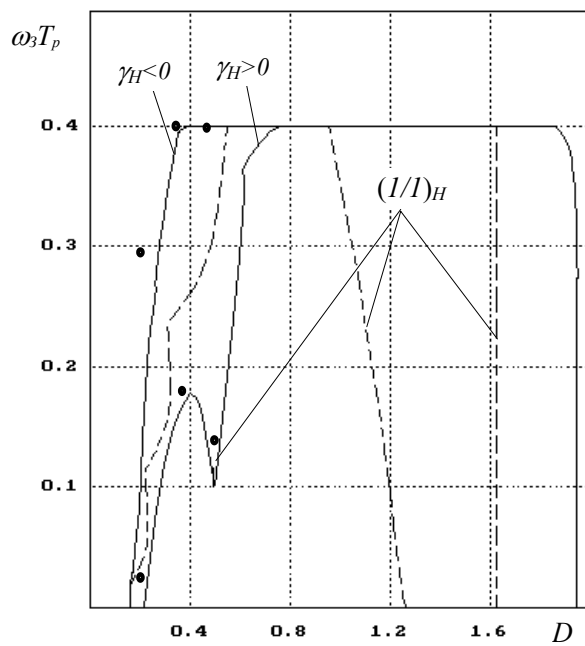
На рис. 4.3-4.4 приведены зависимости полосы захвата импульсной СФС с нелинейным ограничивающим интегратором в цепи управления, полученные в результате компьютерного эксперимента. Графики построены в плоскости параметров  $(D, \omega_H T_p)$ . Сплошной линией показаны результаты, полученные при компьютерном моделировании, пунктиром показана полоса захвата, полученная при исследованиях обобщенной модели качественно-аналитическими методами.

Проведем сравнительный анализ результатов исследования обобщенной модели и компьютерного эксперимента. При малых значениях  $M$  полоса захвата обобщенной модели ограничивается сверху в основном условиями существования состояния равновесия. Левая ее граница определяется циклами второго рода по координате  $\varphi$ , правая - условиями локальной устойчивости стационарного состояния. В центре полоса захвата разделяется областью существования цикла  $(I/I)_H$ , точка которого лежит на границе нелинейности  $\Phi(y)$ . С ростом  $M$  область существования этого цикла расширяется и начинает определять и верхнюю границу полосы захвата (см. рис. 4.3в).

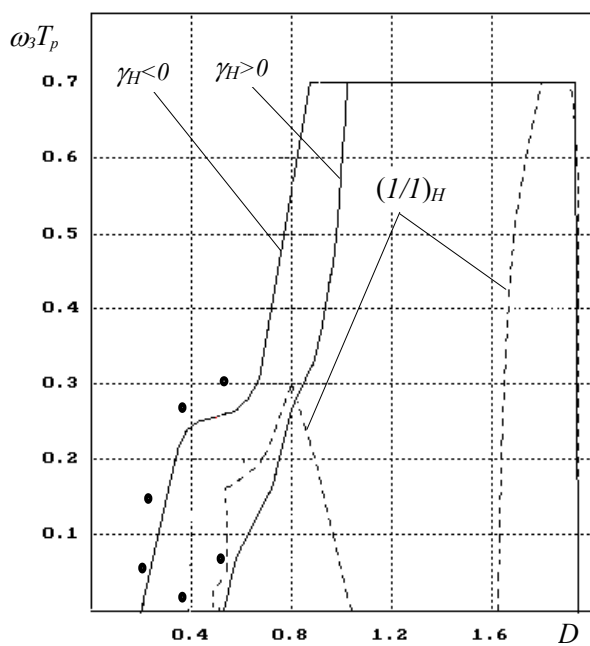
Несколько иная картина наблюдается в компьютерном эксперименте. Прежде всего следует отметить качественное совпадение с результатами анализа полосы захвата ИСФС с линейным фильтром и переменным интервалом дискретизации [14] в области малых значений усиления. При положительных расстройках по частоте наблюдается уменьшение полосы захвата, при отрицательных - увеличение. Этот факт объясняется соответствующим увеличением и уменьшением обобщенных коэффициентов усиления в кольцах за счет переменного интервала дискретизации.



а)



б)



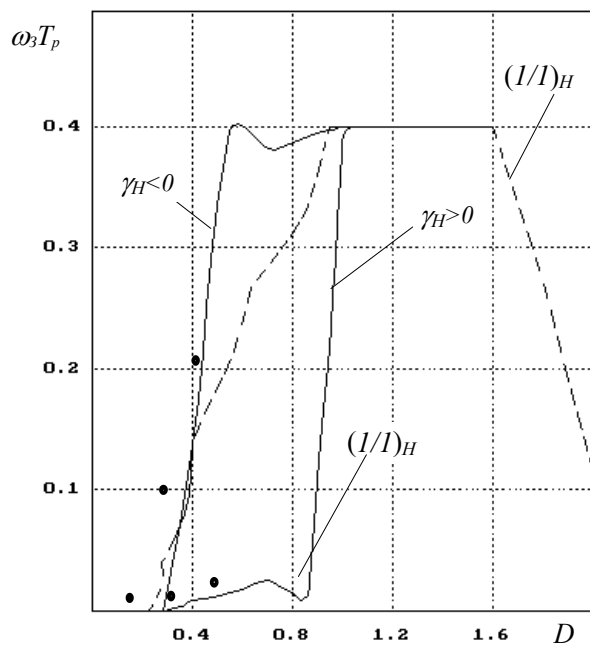
в)

Рис.4.3. Полоса захвата ИСФС  
с ограничивающим интегратором

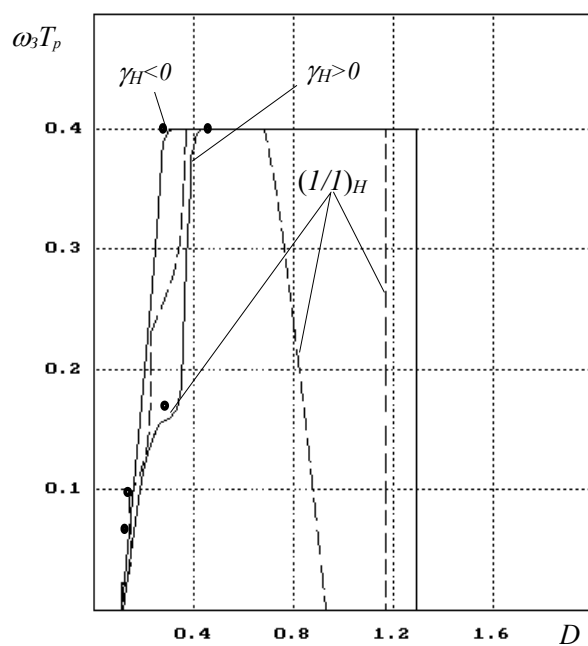
для  $\alpha_p=0.5$ ,  $m=1$ ;

а)  $M=0.2$ , б)  $M=0.4$ , в)  $M=0.7$ .

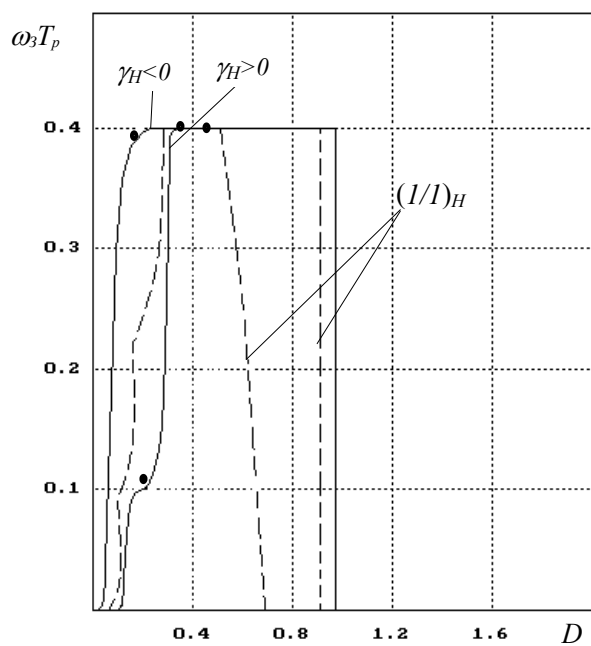




а)



б)



в)

Рис.4.4. Полоса захвата ИСФС с ограничивающим интегратором для

$$\alpha_p=0.5, M=0.4;$$

а)  $m=0.5$ , б)  $m=1.5$ , в)  $m=2$ .

Сравнивая результаты, можно отметить совпадение верхней границы полосы захвата, полученной для компьютерной модели и обобщенной модели. Вместе с тем наблюдаются различия, обусловленные влиянием нелинейности фильтра. В основном это касается цикла структуры  $(I/I)_H$ . Область существования этого цикла для обобщенной модели разбивает полосу захвата на две части. В компьютерной модели область существования этого цикла сдвигается. Для положительных расстроек она переходит в сторону меньших усиления в кольце  $D$ , для отрицательных - в сторону больших усиления и вообще выходит за границу локальной устойчивости. Это можно объяснить тем, что для положительных расстроек текущий коэффициент усиления в кольце, определяемый интервалом дискретизации, возрастает, и циклы возникают при меньших  $D$ . Для отрицательных расстроек текущее усиление, наоборот, уменьшается за счет меньших интервалов дискретизации, и циклы возникают при больших  $D$ . Похожий эффект возникает и в результате учета произвольного времени срабатывания нелинейности фильтра. Допущение в обобщенной модели, сделанное в связи с введением фиксированного времени срабатывания, приводит некоторому эквивалентному увеличению усиления в кольце в режимах, связанных с насыщением фильтра. В компьютерной модели этого завышения нет. Учет произвольного времени срабатывания равносителен уменьшению усиления и в этом смысле эквивалентен действию отрицательных расстроек. Смещение области существования цикла  $(I/I)_H$  влево при положительных расстройках говорит о том, что влияние переменного интервала дискретизации значительно сильнее произвольного времени срабатывания нелинейности фильтра.

При малых значениях  $M$  цикл  $(I/I)_H$  существует в области больших расстроек и не ограничивает полосу захвата (рис. 4.3а). Для положительных расстроек с ростом  $M$  область существования цикла  $(I/I)_H$  смещается в область меньших  $\gamma_H$  и  $D$  (рис. 4.3б) и при некотором значении выходит за границу существования циклов второго рода (рис. 4.3в) в области малых усиления. Несколько иная картина наблюдается при изменении форсирования  $m$ . При малых значениях  $m$  цикл  $(I/I)_H$  определяет левую границу области захвата (рис. 4.3а), а с ростом  $m$  область его существования смещается в сторону больших расстроек и меньших усиления (рис. 4.3б, 4.4б). Далее он опять выходит за границу существования циклов второго рода (рис. 4.3в).

Влияние переменного интервала дискретизации на циклы второго рода значительно слабее. По этой причине левая граница полосы захвата, определяемая этими движениями, практически совпадает с границей, полученной при качественно аналитическом анализе.

В целом анализ приведенных графиков подтверждает результаты аналитических исследований. Отличия в полученных результатах связаны с моделью кольца СФС, использованного для компьютерного эксперимента, в частности с переменным интервалом дискретизации и произвольным временем срабатывания нелинейности фильтра. Наблюдается хорошее совпадение результатов исследования модели с постоянными и переменными интервалами дискретизации в системе.

#### **4.3. Экспериментальные исследования однокольцевого синтезатора частоты КВ-диапазона**

Цель экспериментальных исследований - проверка основных результатов теоретических исследований обобщенной модели ДСФС с ограничивающим интегратором, а также результатов компьютерного моделирования импульсной СФС.

Для решения данной задачи был разработан лабораторный модуль однокольцевого синтезатора. Принципиальная схема модуля приведена в приложении 2. В основе схемы лежит типовое импульсное кольцо фазовой синхронизации с делителем в цепи обратной связи, имеющее астатизм второго порядка. Повышение степени астатизма достигается постановкой в цепь управления интегратора и обуславливается требованием минимизации фазовых ошибок в стационарном состоянии. Подобные требования могут быть связаны, например, с решением задач по синтезу сигналов с угловой модуляцией, в том числе сигналов со специальной формой изменения частоты и фазы, с формированием когерентных пачек радиоимпульсов на заданной частоте и т.д.

Использование для проведения экспериментальных исследований лабораторного модуля синтезатора частоты позволило решить ряд проблем. Во-первых на его базе создаются реальные устройства, а значит, эксперимент максимально приближен к конкретным разработкам. Во-вторых, в синтезаторном варианте имеется возможность управления с высокой точностью

начальной расстройкой по частоте в кольце ДСФС и начальной разностью фаз. Первое достигается автоматически, второе- применением режима предустановки делителя частоты в цепи обратной связи.

Синтезатор функционирует в коротковолновом диапазоне. Основные его параметры и характеристики имеют следующие значения:

- диапазон синтезируемых частот, МГц	7.0...9.0
- шаг частотной сетки, кГц	25.0
- уровень паразитных составляющих в спектре синтезируемых сигналов, дБ	-50дБ
- диапазон значений коэффициентов деления, $N$	280...360
- диапазон значений усиления в кольце, $D$	0.1...0.5

В состав синтезатора входит перестраиваемый генератор на основе м/с 531ГГ1, импульсно-фазовый детектор, выполненный по схеме «выборка-запоминание», трехдекадный делитель частоты, реализованный на м/с 555ИЕ7, фильтр нижних частот, выполненный на основе нелинейного интегратора с дополнительным пропорциональным каналом. Интегратор выполнен по классической схеме на операционном усилителе м/с 544УД2 с конденсатором в цепи обратной связи, зашунтированным встречно включенными стабилитронами. Тип диодов определяет абсолютное значение максимального напряжения интегратора  $M_f = U_{MAX}$ . Пропорциональный канал выполнен на м/с 544УД2.

Для проведения эксперимента в кольце предусмотрено изменение коэффициента усиления путем переключения зарядных конденсаторов генератора пилообразного напряжения, входящего в состав детектора, изменение постоянной времени интегратора и изменение коэффициента усиления пропорционального канала. Начальные условия задаются выбором коэффициента деления  $N$  (начальная расстройка по частоте) и предустановкой делителя (начальная разность фаз).

На рис. 4.3,4.4 точками отмечены значения предельных начальных расстроек по частоте, полученных в результате проведенного эксперимента. Следует отметить высокое совпадение полученных результатов с данными компьютерного моделирования. Расхождение составляет не более 5%. Несколько завышенная оценка объясняется в первую очередь ограниченной точностью задания в эксперименте начальных условий по частоте и фазе.

Используя полученные результаты, можно сформулировать рекомендации пользователям и разработчикам класса таких систем в виде алгоритмов и рекомендаций по управлению начальным состоянием в кольцах.

Как показал анализ, полоса захвата ограничивается движениями второго рода по  $\varphi$ . Области притяжения этих циклов располагаются в фазовом пространстве системы вблизи верхней границы  $\Phi(y)$  для отрицательных начальных расстройек, вблизи нижней границы  $\Phi(y)$  для положительных расстройек и малы по сравнению с областью притяжения состояния синхронизма. Предустановкой нелинейного интегратора в насыщение соответствующего знака (отрицательное для  $\gamma_H < 0$  и положительное для  $\gamma_H > 0$ ) можно задать в системе начальные условия, которые заведомо приведут к возникновению синхронизма. Таким образом можно существенно расширить область захвата системы.

По результатам экспериментальных исследований можно говорить, во-первых, о высоком качественном совпадении с результатами компьютерного моделирования и результатами исследования обобщенной модели. Во-вторых, о высоком количественном совпадении результатов с результатами компьютерного моделирования.

#### **4.4. Экспериментальные исследования цифровой СФС с квадратурным аналого-цифровым преобразователем на входе**

##### **4.4.1. Описание программно-аппаратного комплекса «Цифровые системы»**

Экспериментальные исследования цифровой системы фазовой синхронизации проводилось на базе аппаратно-программного комплекса «Цифровые системы», разработанного на кафедре Ярославского государственного университета «Динамика электронных систем».

Комплекс состоит из двух частей: аппаратной и программной.

1. Аппаратная часть комплекса представляет собой лабораторный модуль, состоящий из аналого-цифрового квадратурного преобразователя и блока ввода-вывода информации в компьютер. Его структурная схема показана на рис. 4.5. Квадратурный преобразователь состоит из генератора опорного

сигнала фиксированной частоты, двух идентичных смесителей (м/с 526ПС1) соответственно в синфазном и квадратурном каналах, двух фильтров нижних частот, сигналы с которых поступают на два АЦП (м/с 1113ПВ1) блока ввода-вывода информации. Из блока ввода-вывода кодовые последовательности через плату ввода-вывода поступают в компьютер. Тактовая частота системы равна 32 кГц (время преобразования АЦП 30 мкс, количество разрядов  $n=10$ ), частота ГС 8 МГц, диапазон входных частот  $8 \text{ МГц} \pm 10 \text{ кГц}$ .

2. Программная часть комплекса представляет собой систему моделирования и анализа цифровых систем произвольной структуры. Узлы моделируемых устройств выбираются из библиотеки элементов. При этом имеется возможность создавать цифровые системы произвольной степени сложности. Модель каждого узла учитывает реальные особенности цифровых устройств, прежде всего это конечность разрядной сетки. Имеется возможность установки параметров узлов и их состояния в начальный момент времени.

В качестве входного сигнала системы могут использоваться либо модельный сигнал с генераторов различных типов, взятых из библиотеки элементов «Цифровых систем», либо реальный сигнал, поступающий с аппаратной части комплекса. Наблюдение процессов на выходах отдельных узлов исследуемой системы производится при помощи компьютерных аналогов цифровых измерительных приборов: осциллографа, анализатора спектра, вольтметра и т.д. При этом при исследовании системы с реальным сигналом они могут функционировать в режиме реального времени.

Структурная схема синхронно-фазового демодулятора на основе цифровой системы фазовой синхронизации в рабочем окне «Цифровых систем» показана на рис. 4.6. При построении системы полагалось, что все блоки имеют пятнадцать информационных и один знаковый разряд. Блок схема алгоритма работы системы представлена на рис. 4.7.

Исследование проводилось в два этапа. На первом этапе синфазная и квадратурная составляющая формировались программным способом, и комплекс функционировал в режиме компьютерного моделирования. На втором этапе сигнал с генератора сигналов поступал на вход квадратурного преобразователя, и комплекс функционировал в режиме реального времени.

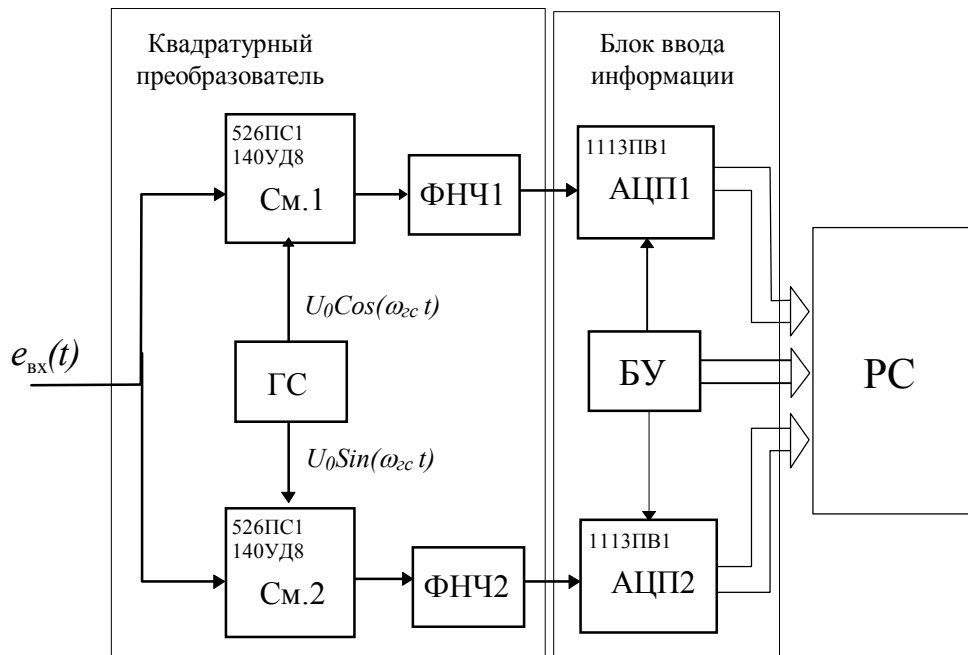


Рис. 4.5. Структурная схема лабораторного модуля ЦСФС с квадратурным преобразователем на входе.

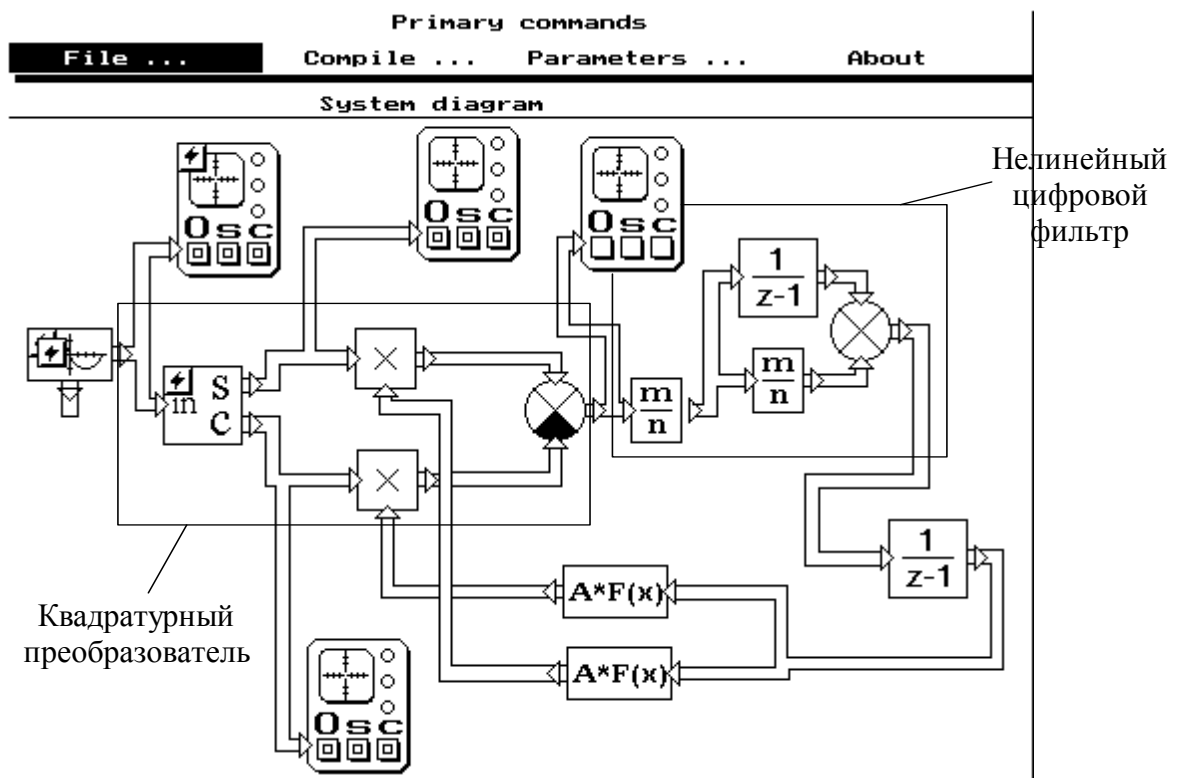


Рис. 4.6. Рабочее окно программно-аппаратного комплекса «Цифровые системы» с моделью цифровой системы фазовой синхронизации.

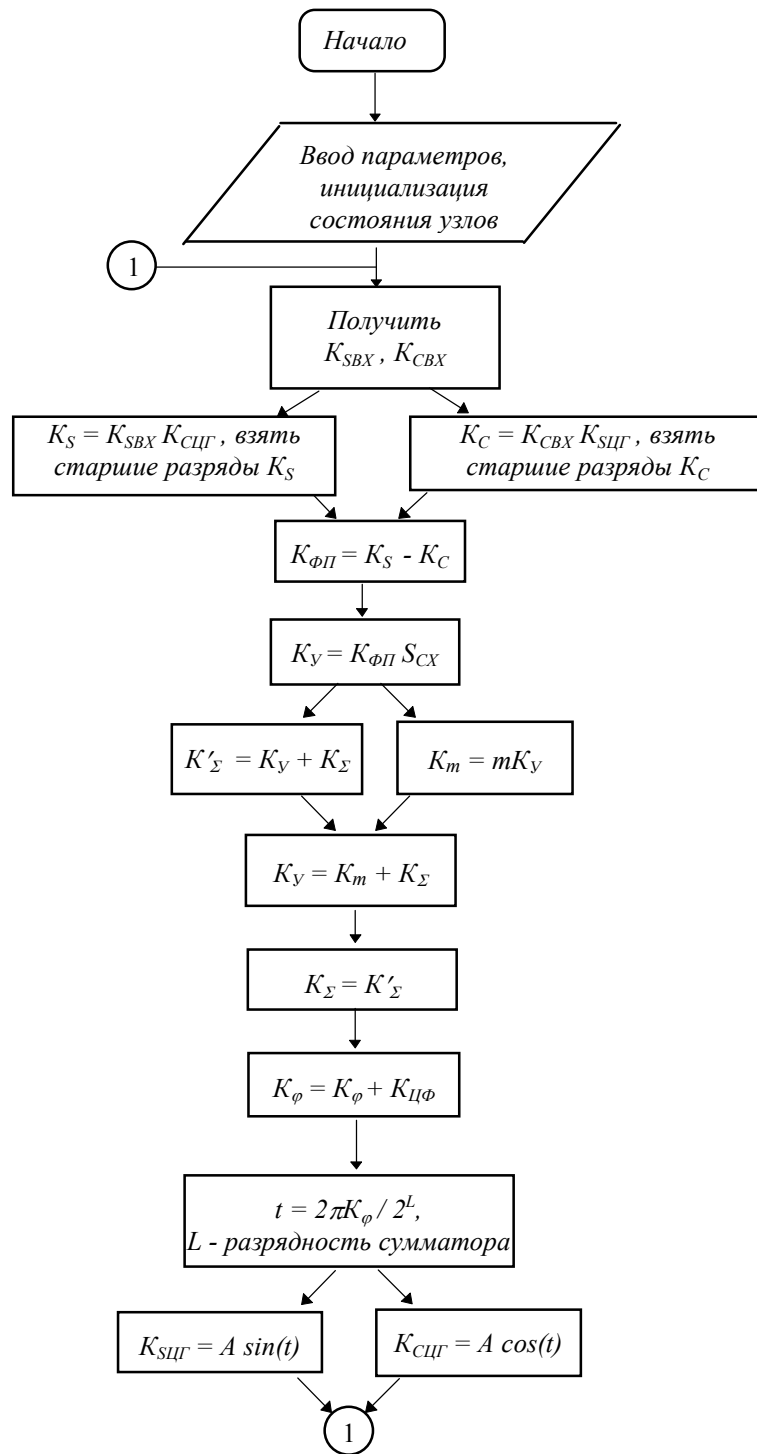


Рис. 4.7. Блок схема моделирующего алгоритма ЦСФС с интегратором в цепи управления.



Очевидно, что возможное отличие результатов, полученных на двух этапах исследований, может быть объяснено реальными свойствами квадратурного преобразователя и блока ввода-вывода информации. К числу их в первую очередь относится различие амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик, каналов квадратурного преобразователя и блока ввода информации.

#### 4.4.2. Блок-схема алгоритма экспериментальных исследований

Для расчета полосы захвата системы использовалась процедура, подобная методике для импульсной СФС с пилообразной характеристикой фазового детектора и линейным фильтром, описанной в [75]. Введен интервал времени, равный  $N_C$  - количеству дискретов необходимых для попадания системы в режим синхронизма. В качестве режима синхронизма определим состояние системы, при котором значение частоты выходного сигнала находится в малой окрестности расчетного  $f_{вых} = f_{вх}$  сколь угодно длительное время. Начальная расстройка представлялась в виде ступенчатой функции с интервалом равным  $N_C$ . Величина скачка ступеней функции зависит от желаемой точности измерения. В качестве полосы захвата будем брать минимальное значение начальной расстройки, при которой исчезает режим биений.

С учетом сказанного алгоритм расчета полосы захвата может быть сформулирован следующим образом:

1. Выбирается стартовое значение коэффициента усиления кольца  $S_C$ , в соответствии с выбранным значением задаются параметры узлов системы.
2. Задается значение начальной расстройки  $\gamma_H$ , для которого система находится в режиме биений.
3. Действующее  $\gamma_H$  уменьшается на малую величину, определяемую желаемой точностью измерения, например 0.01. Уменьшение расстройки  $\gamma_H$  производится уменьшением входной частоты.
4. Производится расчет процессов в устройстве на интервале времени  $N_C$  для различных начальных условий в системе. Анализируется режим биений. Если режим биений сохранился, то происходит возврат к пункту 3.

5. Решение о нахождении системы в полосе захвата принимается при равенстве частот входного сигнала и сигнала цифрового генератора  $f_{вых} = f_{вх}$  на протяжении  $N_C$ .

6. Для продолжения расчета изменяется значение обобщенного коэффициента усиления  $S_C$ , и происходит переход к пункту 2.

Предложенный алгоритм работает также и для отрицательных значений  $\gamma_H$ .

Комплекс «Цифровые системы» позволяет задавать состояния всех узлов системы в момент времени  $n=0$ . Это делает возможным при исследованиях компьютерной модели однозначно задать начальные условия в системе и построить области существования различных периодических движений в пространстве параметров.

Алгоритм данного расчета может быть сформулирован следующим образом:

1. Выбираются параметры обобщенной системы и начальные условия  $\varphi_n$ ,  $x_n$ , соответствующие выбранному периодическому движению «Д».
2. Производится перерасчет параметров обобщенной модели в параметры узлов ЦСФС. Также производится перерасчет значений  $\varphi_n$ ,  $x_n$  в начальные значения кодов узлов ЦСФС.
3. Действующий параметр какого-либо узла «R» уменьшается или увеличивается последовательно, с необходимой точностью.
4. Производится расчет процессов в устройстве на интервале времени  $N_C$  из состояния системы, полученного при предыдущем значении параметра «R».
5. Если система приходит в желаемое движение «Д», то необходимо вернуться к пункту 3 и продолжить изменение параметра «R».
6. Если система не приходит в желаемое движение «Д», то необходимо произвести обратный перерасчет параметров ЦСФС в параметры обобщенной модели.
7. Для продолжения построения области существования движения «Д» изменяется значение других параметров ЦСФС и происходит переход к пункту 3.

#### 4.4.3. Анализ результатов эксперимента

На рис. 4.8, 4.9 приведены зависимости полосы захвата цифровой СФС с нелинейным ПИФом в цепи управления, полученные в результате экспериментальных исследований. На рис. 4.8 показаны результаты для ограничивающего фильтра, на рис. 4.9 для фильтра с пилообразной характеристикой. Сплошной линией показаны зависимости, полученные в результате компьютерного эксперимента, точками показаны результаты исследований с реальным входным сигналом, пунктирной линией показаны соответствующие зависимости, полученные при исследованиях обобщенной модели.

Сравнение результатов, приведенных на рис. 4.8, 4.9, позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых с высокой степенью точности совпали результаты исследований обобщенной и компьютерной (входной сигнал формируется программным способом) моделей для всех параметров ЦСФС, использованных в эксперименте. Это подтверждается зависимостями для ограничивающего (рис. 4.8) и пилообразного (рис. 4.9) пропорционально-интегрирующего фильтров. Это подтверждается и результатами исследования областей глобальной устойчивости для ЦСФС с пилообразным интегратором, приведенные на рис 4. 10.

Во-вторых можно говорить и о достаточно хорошем совпадении (единицы процентов) результатов экспериментальных исследований ЦСФС с реальным входным сигналом. Результаты приведены на рис. 4.8-4.10 в виде точек, поставленных рядом с соответствующими кривыми. Некоторое несовпадение объясняется различием амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик каналов квадратурного преобразователя.

Используя результаты проведенных аналитических и экспериментальных исследований, сформулируем рекомендации по управлению состоянием системы с целью расширения области захвата.

Для ЦСФС с ограничивающим фильтром они будут такими же как и для импульсных систем. Предусмотренная начальное состояние нелинейного интегратора в насыщение соответствующего знака (отрицательное для  $\gamma_H < 0$  и положительное для  $\gamma_H > 0$ ) гарантированно приводит систему в состояние

синхронизма, так как при этом исключается возможность возникновения движений второго рода по  $\varphi$ , ограничивающих полосу захвата.

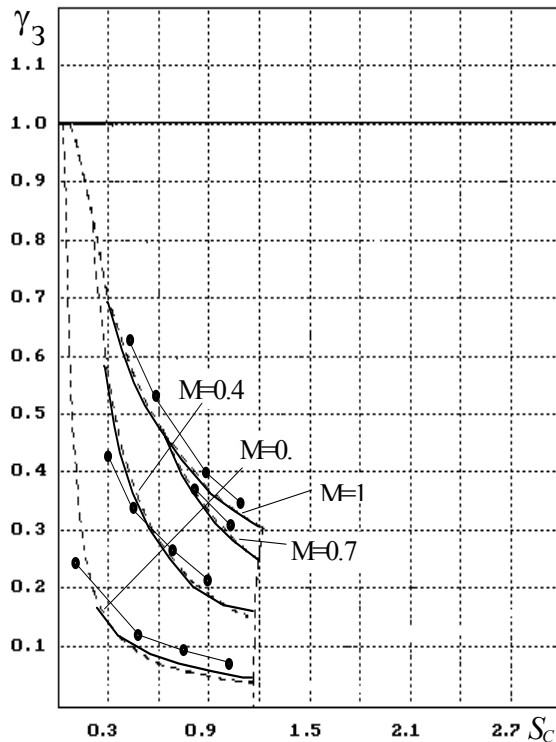


Рис. 4.8. Полоса захвата  
ЦСФС с ограничивающим ПИФ  
для  $d=0.6$ ,  $m=1$ .

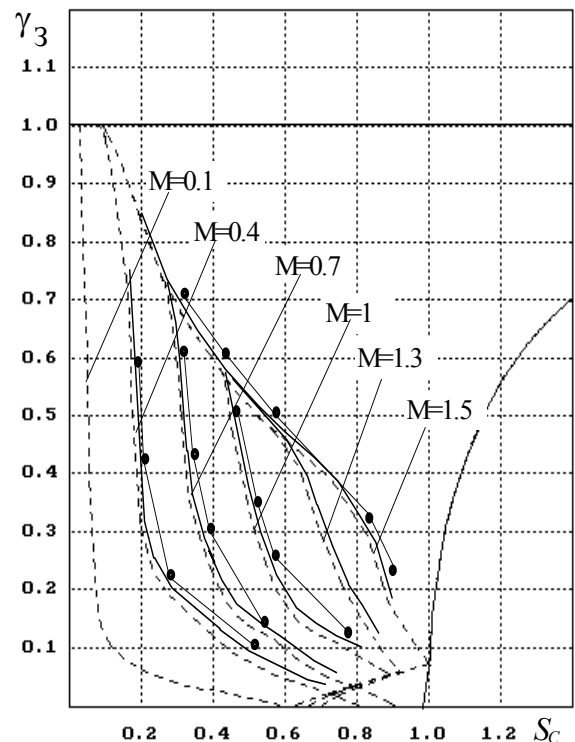


Рис. 4.9. Полоса захвата  
ЦСФС с пилообразным ПИФ  
для  $d=0.6$ ,  $m=1$ .

Анализ движений в системе с пилообразным фильтром показал, что полоса захвата ограничивается циклами второго рода по координате  $x$ . В этом режиме происходит постоянное переполнение и сброс нелинейного фильтра. Разность фаз при этом принимает значения определенного знака (положительные для положительных расстроек и отрицательные для отрицательных). Таким образом, для приведения системы в область притяжения состояния синхронизма необходимо предусматривать знак начальной разности фаз в зависимости от знака частотной расстройки.

## 4.5. Выводы

1. Для проверки результатов анализа обобщенной модели и проведения дополнительных исследований, учитывающих допущения, сделанные при выводе обобщенной модели, разработана компьютерная модель импульсной и цифровой систем фазовой синхронизации. Модель реализована в виде программного комплекса для ЭВМ и позволяет проводить исследования динамических характеристик системы, включая определение полосы захвата для широкого диапазона изменения параметров системы.

2. С помощью компьютерной модели исследована ИСФС с ограничивающим интегратором в цепи управления. Исследования показали качественное совпадение результатов компьютерного эксперимента и исследований обобщенной модели. Количественные отличия связаны с учетом в компьютерной модели переменного интервала дискретизации и произвольного времени срабатывания нелинейности фильтра. В частности установлено, что за счет переменного интервала дискретизации для положительных расстройк области существования движений, ограничивающих полосу захвата, перемещаются в область меньших усиления. И наоборот, для отрицательных расстройк - в область больших усиления. При этом для положительных расстройк полоса захвата компьютерной модели проходит ниже значений, полученных при исследовании обобщенной модели, для отрицательных расстройк - выше.

3. С целью проверки результатов исследования обобщенной модели ИСФС с нелинейным интегратором разработан лабораторный модуль однокольцевого синтезатора частоты КВ-диапазона. Исследования синтезатора показали высокую степень совпадения экспериментальных результатов и результатов компьютерного моделирования для различных значений физически реализуемых параметров. Подтверждены качественно и количественно все тенденции изменения динамических свойств ИСФС.

4. С целью проверки результатов исследования обобщенной модели цифровых СФС был разработан программно-аппаратный комплекс, позволяющий выполнять компьютерные исследования ЦСФС с нелинейным фильтром и исследовать компьютерную модель. Исследования системы с различными типами нелинейных фильтров в цепи управления:

ограничивающим и пилообразным ПИФ, пилообразным интегратором показали высокое совпадение с результатами исследования обобщенной модели.

5. Применение программно-аппаратного комплекса в режиме работы с реальным сигналом также подтвердило совпадение с результатами исследований обобщенной модели. Некоторая разница объясняется не функционированием программной части системы (собственно ЦСФС), а неидентичностью квадратурных каналов входного цифро-аналогового преобразователя.

6. Выработаны рекомендации по управлению состоянием системы с целью расширения полосы захвата. Для импульсных и цифровых систем с ограничивающим фильтром они заключаются в предустановке начального состояния интегратора в насыщение, знак которого зависит от знака начальной расстройки. Для цифровых систем с пилообразным фильтром - в предустановке знака начальной разности фаз в зависимости от знака частотной расстройки.

## Заключение

1. В диссертационной работе исследована нелинейная динамика нескольких типов дискретных систем фазовой синхронизации с нелинейным фильтром в цепи управления, объединенных одной математической моделью. Рассмотрены фильтры с двумя вариантами наиболее часто встречающихся на практике нелинейностей: ограничивающей и пилообразной. Ограничивающая нелинейность характерна для импульсных, цифровых и импульсно-цифровых систем синхронизации, пилообразная - для цифровых и импульсно-цифровых.

2. Предложена обобщенная математическая модель дискретных СФС с нелинейным фильтром. Ее нелинейная динамика явилась объектом исследований, включая области существования периодических и квазипериодических движений, их устойчивость, бифуркации в зависимости от различных параметров, области устойчивости в большом и целом состояний синхронизма. Обоснован выбор параметров обобщенной модели для представления результатов исследований, обеспечивающий наилучшую физическую интерпретацию результатов исследования.

3. Для исследования обобщенной модели предложена методика, основанная на качественно-аналитическом анализе процессов в дискретных системах. Отличительной ее особенностью является анализ структуры фазового пространства на основе выделения в нем областей линейного и нелинейного отображения, линий отображения с заданным изменением координат, и, в конечном итоге, нахождение условий изменения качественного поведения системы. На первом этапе исследуется обобщенная модель с линейным фильтром. На втором этапе на основе полученных данных исследуются свойства системы с нелинейным фильтром.

4. Предложенная методика позволила подробно исследовать процессы в обобщенной модели дискретной СФС с пилообразной и синусоидальной характеристиками детектора без учета нелинейных свойств фильтра. На основе анализа областей существования различных движений получены точные значения полосы захвата ДСФС с линейным ПИФ.

В частности, для системы с пилообразной характеристикой детектора разработан простой алгоритм точного определения полосы захвата для

широкого диапазона параметров системы. Его основу составляет доказательство того факта, что полоса захвата ограничивается циклами второго рода с одним проскальзыванием.

Для системы с синусоидальной характеристикой детектора показано, что кратные захваты возникают при гораздо больших значениях усиления, чем в системе с пилообразным детектором. Это приводит к расширению полосы захвата в сторону больших усилений для случая узкой полосы фильтра.

5. Для анализа ДСФС с линейным интегратором и пилообразной характеристикой детектора предложен метод качественно-аналитического исследования, основанный на переходе от цилиндрического фазового пространства к торроидальному с границами, исключающими нелинейное отображение по одной из координат. Метод позволил свести всевозможные нелинейные движения по двум координатам к движениям по одной и значительно упростил процесс анализа. Его применение позволило разбить пространство параметров на области существования движений качественно различной структуры. В частности, найдена область параметров, где в системе существуют только кратные захваты. При ограничении начальных частотных расстройках данная область может выступать в качестве области, обеспечивающей устойчивость в целом состояния синхронизма.

6. Выполнен анализ дискретных СФС с ограничивающим фильтром. Исследованы общие свойства систем данного типа. Найдены условия на параметры системы, при которых устойчивость в целом определяется условиями существования состояния равновесия и может быть вычислена аналитически. Описаны возможные периодические движения, их бифуркации в зависимости от параметров системы.

Построены графики полосы захвата в зависимости от значений параметров системы. Показано, что область захвата может носить разрывный характер в области больших усилений. Это объясняется возникновением при этих параметрах кратных захватов на границах нелинейности фильтра.

7. Для ДСФС с ограничивающим пропорционально-интегрирующим фильтром и синусоидальной характеристикой детектора установлен факт существования движений, аналогичных состоянию синхронизма. Показано, что в этих режимах нелинейный фильтр находится в насыщении и ДСФС ведет себя



подобно системе первого порядка. Установлено, что эти циклы возникают только при отрицательных значениях  $\alpha$ .

Для ДСФС с ограничивающим ПИФ и пилообразной характеристикой детектора установлено существование кроме периодических движений притягивающих множеств двух типов, точки которых располагаются на границах  $\Phi(y)$  (циклов-интервалов). В пространстве обобщенных параметров  $(\alpha, \beta)$  цикл-интервал первого типа существует при достаточно больших  $\alpha$  и ограничивает область устойчивости в целом справа. Цикл-интервал второго типа существует при малых и отрицательных  $\alpha$ . Он определяет левую границу области устойчивости в целом.

Для ДСФС с ограничивающим интегратором и пилообразной характеристикой детектора установлено существование периодических движений второго рода по координате  $\varphi$  при малых усилениях практически для любых параметров фильтра.

8. Выполнен анализ дискретных СФС с пилообразным фильтром. Исследованы общие свойства систем данного типа. Рассмотрены возможные периодические движения и их бифуркации. Установлено существование в системе семейств периодических движений. Циклы одного семейства имеют одинаковый период и разные абсолютные приращения координат  $\varphi, x$ .

Установлена возможность существования в системе нескольких состояний, эквивалентных состоянию синхронизма. Показано, что эти движения могут существовать даже при отсутствии основного состояния равновесия. Для СФС с пилообразной характеристикой детектора показано, что поведение системы в их окрестности совпадает с поведением системы в окрестности основного состояния синхронизма.

Построены графики полосы захвата в зависимости от усиления в системе. Показано, что при малых  $M$  полоса захвата этой системы определяется вращательными движениями по координате  $x$ . А при увеличении  $M$  начинает определяться движениями второго рода по  $\varphi$ , характерными для систем с линейным фильтром.

9. Установлено, что в ДСФС с пилообразным ПИФ и синусоидальной характеристикой детектора могут существовать устойчивые предельные множества. Они возникают при нелинейном продолжении неустойчивой

сепаратрисы седла за границы  $\Phi(y)$ . Рассмотрены возможные типы данных множеств, найдены области их существования в пространстве параметров.

Для системы с пилообразным интегратором и синусоидальной характеристикой детектора показано, что область устойчивости в большом для малых  $M$  ограничивается движениями второго рода по  $x$  и расширяется в сторону увеличения  $\beta$  при отличных от нуля расстройках.

10. Исследовано поведение системы с синусоидальной характеристикой детектора при наличии дополнительного шумового воздействия. Показано, что предельные циклы могут разрушаться под воздействием шума, и вследствие этого увеличивается область захвата системы. Путем численного решения уравнения Колмогорова-Чепмена получены области статистической полосы захвата. Установлено, что наибольшее расширение области захвата достигается в системе с пилообразным фильтром, для которого является характерным наличие движений с малыми областями притяжения.

11. Для проверки результатов анализа обобщенной модели и проведения дополнительных исследований, учитывающих допущения, сделанные при выводе обобщенной модели, разработаны компьютерные модели импульсной и цифровой систем фазовой синхронизации. Модель импульсной СФС реализована в виде программного комплекса и позволяет проводить исследования динамических характеристик системы, включая определение полосы захвата для широкого диапазона изменения параметров системы. Моделирование цифровой СФС проведено с помощью программно-аппаратного комплекса, позволяющего исследовать работу ЦСФС в режиме компьютерной модели и в режиме реального времени при работе с физическим сигналом.

12. Исследования компьютерной модели ИСФС показали качественное совпадение результатов компьютерного эксперимента и исследований обобщенной модели. Количественные отличия связаны с учетом в компьютерной модели переменного интервала дискретизации и произвольного времени срабатывания нелинейности фильтра. Показано расширение полосы захвата для случая отрицательных расстроек и уменьшение ее для положительных расстроек.

Исследования компьютерной модели ЦСФС системы с различными типами нелинейных фильтров в цепи управления: ограничивающим и пилообразным ПИФ, пилообразным интегратором показали высокое совпадение с результатами исследования обобщенной модели.

13. Для проверки результатов исследования обобщенной модели ИСФС с нелинейным фильтром разработан лабораторный модуль однокольцевого синтезатора частоты КВ-диапазона. Исследования синтезатора показали высокую степень совпадения экспериментальных результатов и результатов компьютерного моделирования для различных значений физически реализуемых параметров. Подтверждены качественно и количественно все тенденции изменения динамических свойств ИСФС.

14. В результате проведенных экспериментальных исследований выработаны практические рекомендации для пользователей и разработчиков по конкретному управлению состоянием ДСФС для достижения наиболее оптимальных режимов работы. В частности, показано, что для увеличения области захвата ДСФС с ограничивающим фильтром необходимо предусматривать начальное состояние фильтра в насыщение, знак которого зависит от знака частотной расстройки. Это позволит гарантированно привести систему в состояние синхронизма. Аналогично, для ДСФС с пилообразным фильтром, необходимо устанавливать знак начальной разности фаз в зависимости от знака частотной расстройки.

## Литература

1. Радиопередающие устройства / Под ред. В.В. Шахгильдяна. - М.: Радио и связь, 1990. - 432 с.
2. Стиффлер Дж. Теория синхронной связи. - М.: Связь, 1975. - 488 с.
3. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.С. Системы фазовой автоподстройки частоты. - М.: Связь. - 1972. - 447 с.
4. Спилкер Дж. Цифровая спутниковая связь: Пер с англ./Под ред. В.В. Маркова.- М.: Связь, 1979. - 592 с.
5. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: 1985. - С.384.
6. Журавлев В.И. Поиск и синхронизация в широкополосных системах. М.: Радио и связь, 1986.- 240с.
7. Цифровые системы фазовой синхронизации /М.И. Жодзишский, С.Ю. Сила-Новицкий, В.А. Прасолов и др. Под ред. М.И. Жодзишского - М.: Сов. Радио, 1980. - 208 с.
8. Цифровые радиоприемные системы: Справочник. / М.И. Жодзишский, Р.Б. Мазепа, Е.П. Овсянников и др./ Под ред. М.И. Жодзишского - М.: Радио и связь, 1990. - 208с.
9. Жодзишский М.И. Проектирование цифровых устройств обработки широкополосных сигналов. - М.: МАИ, 1986. - 52с.
10. Тузов Г.И., Сивов В.А., Прытков В.И. и др. Помехо-защищенность радиосистем со сложными сигналами /Под ред.Тузова Г.И. - М.: Связь, 1985. - 279 с.
11. Тузов Г.И., Прытков В.И. Система синхронизации, использующая сложные фазоманипулированные сигналы // Системы фазовой синхронизации: Сб. науч. ст. М.: 1985. - 126 с.
12. Манасевич В. Синтезаторы частот. Теория и проектирование: Пер. с англ. / Под.ред. А.С. Галина. - М.: Связь, 1979. - 384 с.
13. Шапиро Д.Н., Паин А.А. Основы теории синтеза частот. - М.: Радио и связь, 1981. - 264 с.
14. Системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна. - М.: Связь, 1989. - 320 с.

15. Губернаторов О.И., Соколов Ю.Н. Цифровые синтезаторы частот радиотехнических систем. - М.: Энергия, 1973. - 176 с.
16. Клепацкая И.И. Цифровые синтезаторы частоты для СВЧ возбудителей дискретной сетки частот // Техника средств связи. Сер. Техника радиосвязи. - 1981. - вып. 8. - С. 96 - 105.
17. Клепацкая И.И., Киселев Е.В. Цифровые синтезаторы частот ВЧ - , СВЧ - диапазонов // Техника средств связи. - 1983. - вып. 6. - С. 90 - 95.
18. Левин В.А., Малиновский В.Н., Романов С.К. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. - М.: Радио и связь, 1989.- 232 с.
19. Рожков А.В., Попов В.Н. Синтезаторы частот в технике радиосвязи. - М.: Радио и связь, 1991.- 364 с.
20. Баланов О.А., Кабанов А.И. Принципы построения синтезаторов частоты СВЧ диапазона // Электросвязь. - 1987. - №2. - С. 53-56.
21. Шахгильдян В.В., Пестряков А.В., Кабанов А.И. Общие принципы построения быстродействующих синтезаторов частот на основе ФАПЧ // Электросвязь. - 1983. - №10. - С. 36-42.
22. "Разработка и исследование возбудителей передающих и демодуляторов приемных трактов ЧМ колебаний СВЧ диапаона": Отчет о НИР (заключительный) / Ярославский гос. ун-т. Руководитель Брюханов Ю.А. - Ярославль, 1989. - 164 с.
23. Казаков Л.Н. "Разработка и исследование быстродействующих широкополосных синтезаторов частоты" Дис. ... канд. тех. наук./ Моск. инст-т радиотехн. электрон. и автомат. - М.: 1988. - 172 с.
24. Шахгильдян В.В., Пестряков А.В. Перспективные направления развития динамической теории дискретных систем фазовой синхронизации для устройств синтеза и стабилизации частот // Электросвязь. - 1993. - №11. - С. 38-42.
25. Шахгильдян В. В., Пестряков А. В. Исследование динамики системы ФАПЧ с цифровым интегратором // Системы и средства передачи информации по каналам связи: Сб. научн. ст. - Л.,- 1980.
26. Пестряков А. В. Использование метода усреднения для анализа импульсных систем фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. - 1990. - Т.35. - Вып. 11. - С. 2334-2340.

27. Пестряков А. В. Применение асимптотических методов для анализа дискретной системы фазовой синхронизации // Теоретическая электротехника. Республ. межвед. научн. техн. сб. - Львовский гос. ун-т. - 1989. - Вып. 47. - С. 135-139.

28. Корякин Ю.А., Леонов Г.А. Определение полосы захвата в системах импульсно - фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника. - 1977. - Т. 32. №6. - С. 65-72.

29. Карничев А. М., Корякин Ю. А., Леонов Г.А. Аппроксимация полосы захвата многосвязных дискретных систем фазовой синхронизации // Радиоэлектроника. 1982. №1. С. 81-84. (Изв. вузов СССР).

30. Белых В. Н., Максаков В. П. Динамика цифровых систем фазовой синхронизации первого и второго порядка // Динамика систем. 1976. Вып. 11.

31. Белых В. Н., Максаков В. П. Качественное исследование разрывного отображения цилиндра из теории фазовой синхронизации // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Сб. научн. ст. М., 1982.

32. Максаков В. П., Панченко И. О. Оценка области захвата цифровой системы фазовой синхронизации второго порядка // Теоретическая электроника. Львов, 1986. Вып. 41.

33. Белых В. Н., Лебедева Л. В. Исследование одного отображения окружности. Прикладная математика и механика. Том 46, Вып.5, 1982, с.771-776.

34. Лебедева Л.В. Качественное поведение траекторий и бифуркации дискретных фазовых систем. Дис. ... канд. физ. мат. наук., Н. Новгород - 1993.

35. Шахтарин Б.И. Квазигармонический метод и его применение к анализу нелинейных фазовых систем.. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 192с.

36. Шахтарин Б.И., Курочка Б.Я., Морозова В.Д. О полосе захвата дискретной ФАП с пилообразной характеристикой // Радиотехника и электроника. - 1986. - № 4. - С. 745-751.

37. Шахтарин Б.И., Курочка Б.Я., Морозова В.Д. Исследование нелинейной ИФАПЧ третьего порядка // Теоретическая электроника: Республ. межвед. научн. технич. сб. - Львовский гос. ун-т. - 1989. - Вып. 47. - С. 83-94.

38. Шахтарин Б.И. Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. - М.: Машиностроение, 1991. - 192с.

39. Казаков Л.Н., Палей Д.Э. Анализ полосы захвата импульсной системы фазовой синхронизации второго порядка // Радиотехника и электроника. 1995. Т.40. № 5. С.823-829.

40. Казаков Л.Н., Палей Д.Э. Анализ полосы захвата импульсной системы фазовой синхронизации третьего порядка с пилообразной характеристикой детектора. // Радиотехника. - 1998. - № 1. - С.29-35.

41. Паушкина Т.К. Динамические свойства синтезатора частот на основе двух взаимосвязанных колец ФАПЧ // Теоретическая электротехника. Республ. межвед. научн. техн. сб. Львов.: Львовский гос. ун-т. - 1989. - Вып. 47. - С. 122-128.

42. Федосова Т.С. Особенности расчета устойчивости систем с двумя нелинейными периодическими функциями // Теоретическая электроника. - Львов - ЛГУ - 1989. - Вып. 4. С. 58-63.

43. Федосова Т.С. Устойчивость синтезаторов частоты на взаимосвязанных системах ФАП // "Стабилизация частоты". М.: ВИМИ. 1986. С.162-166.

44. Широков Ю.В., Казаков Л.Н. Дискретные связанные системы фазовой синхронизации. Радиотехника. № 4. 1995. С.17-26. (Известия ВУЗов).

45. Широков Ю.В., Казаков Л.Н. Комбинированная система частотно-фазовой автоподстройки с различными периодами дискретизации в кольцах. Электросвязь. 1994. № 8. С.4-7.

46. Палей Д.Э., Казаков Л.Н. Динамика дискретной системы второго порядка с несколькими нелинейностями // Радиоэлектроника. 1995. № 3. С.61-68. (Известия ВУЗов).

47. Казаков Л.Н., Палей Д.Э. Анализ двумерного отображения системы фазовой синхронизации с двумя нелинейностями. // Тез. докладов III конференции "Нелинейные колебания механических систем" - Н.Новгород, - 1993. - С.88.

48. Палей Д.Э., Казаков Л.Н. Динамика дискретной системы фазовой синхронизации с двумя нелинейностями. // Тез. докладов IV конференции "Нелинейные колебания механических систем". - Н. Новгород, - 1996. - С.117.

49. Палей Д.Э. Нелинейная динамика дискретной системы фазовой синхронизации с двумя нелинейностями.. Тез. докладов LI Научной сессии, посвященной дню радио. Москва, - 1997. - С. 137.

50. Кабанов А.Н. Динамические характеристики импульсной системы ФАПЧ с двумя каналами управления // Радиотехника. - 1983. - №10. - С. 32-34.
51. Кабанов А.Н., Пестряков А.В. Сравнительный анализ некоторых синтезаторов частот на основе систем ИФАПЧ. // Электросвязь. - 1984. - №2. - С. 59-61.
52. Шахгильдян В.В., Пестряков А.В. Перспективные направления развития динамической теории дискретных систем фазовой синхронизации для устройств синтеза и стабилизации частот // Электросвязь. - 1993. - №11. - С. 38-42.
53. Карякин В.Л., Другов М.И. Система частотно-фазовой автоподстройки // Электросвязь. - 1981. - №9. - С. 48-51.
54. Шахтарин Б.И., Курочка Б.Я. Исследование динамики дискретной фазовой автоматической системы второго порядка // Радиотехника и электроника. - 1984. - № 7. - С. 1385-1392.
55. Палей Д.Э. Устойчивость дискретной СФС с нелинейным фильтром при наличии шума. // Науч. техн. конф. "Направления развития систем и средств радиосвязи" Труды науч. техн. конф. Т.3. - Воронеж. - 1997. с. 1269-1274.
56. Федосова Т.С. Анализ систем фазовой синхронизации с двумя периодическими нелинейностями // Радиотехника. 1986. № 6. - С.46-48. (Деп. рук. № 772, ЦНТИ Информсвязь).
57. Федосова Т.С. Исследование динамических свойств тороидальных систем фазовой синхронизации // Сб. "Алгоритмы и программы". - М.: ВНИИЦ, ГосФАП СССР ЦИФ. - 1990. № 3.
58. Широков Ю.В., Казаков Л.Н. Нелинейная динамика дискретных связанных систем фазовой синхронизации. Радиофизика. № 3-4. 1995. С.217-224. (Известия ВУЗов).
59. Широков Ю.В. Двухкольцевая система фазовой синхронизации // Тез. юбилейной конференции "Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук". Физика. Ярославль. - 1995. - С.92.
60. Kazakov L.N., Ponomarev N.Yu. The stability of a pulse phase-lock loop system with a triangular detector characteristic // Telecommunications and radio engineering. 1995. № 12. p.36-42.



61. Казаков Л.Н., Пономарев Н.Ю. Устойчивость импульсной системы фазовой синхронизации с треугольной характеристикой детектора // Электросвязь, № 8, 1994г., С.13-16.
62. Казаков Л.Н., Пономарев Н.Ю. Периодические движения, возникающие при кусочно-линейном отображении // Тез. докладов III конференции "Нелинейные колебания механических систем" - Н.Новгород, - 1993. - С.88.
63. Казаков Л.Н., Палей Д.Э. Анализ дискретной СФС третьего порядка. Тез. докладов XLVIII Научной сессии, посвященной дню радио. Москва, - 1993. - С. 152.
64. Палей Д.Э., Казаков Л.Н. Исследование цифровой СФС с нелинейным интегратором в цепи обратной связи. Там же. С.94.
65. Paley D.E. Nonlinear Dynamics Of The Discrete Phase Locked-Loop System With Two Nonlinearities // 5-th International Specialist Workshop. Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. Moskva, June 26-27, 1997. P.63-68.
66. Бессекерский В.А. Цифровые автоматические системы. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
67. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифф.уравнения.-1973.-Т.9.№3.-с.403-415.
68. Shachkgildyan V.V., Pestryakov A.V., Itkin G.M. Dynamic Properties of Nonlinear Discrete Phase Locked Loops. Dynamic and Stochastic Wave Phenomena. Abstracts of the Second International Scientific School-Seminar. Nizny Novgorod, 21-28, June 1994, p.109.
69. Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации при наличии помех. - М: ИПРЖР, 1996, 252С.
70. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Радио и связь, 1982, 624С.
71. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. - М.: Наука, 1965, 383С.
72. Демидович Б.Л., Марон И.А. Основы вычислительной математики.- М.: Наука, 1970. - 664 с.
73. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. - М.: Сов. радио, 1971. - 328 с.

74. Малиновский В.Н., Романов С.К. Моделирование на ЭВМ синтезаторов частоты с кольцом импульсно-фазовой автоподстройки // Электросвязь, 1983. - №4 - с.52-58.

75. Радиотехнические цепи и сигналы // Под ред. Самойло К.А. - М.: Радио и связь, 1982. - 432 с.

78. Широков Ю.В. "Моделирование и исследование дискретных связанных систем фазовой синхронизации" Дис. ... канд. тех. наук./ Моск. энергетический инст-т (технический университет). - М.: 1996. - 204 с.

79. Иванов В.А., Ющенко А.С. Теория дискретных систем автоматического управления. М.: - Наука, 1983 г. 336 с.

80. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний.-М., Наука, 1976.-384с.

81. Казаков Л.Н., Пономарев Н.Ю. Устойчивость в целом импульсной системы фазовой синхронизации второго порядка с трапецевидной характеристикой детектора. // Радиотехника и электроника. 1997. № 12. С.1459-1464.

82. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1972. - С. 471.

83. Shirokov Yu.V., Kazakov L.N., Paley D.E. Nonlinear Dynamics of Interaction Phase Locked-Loop Systems. Bifurcations and Chaos. The School-Conferense was supported by Ukrinian Academy of Sciences, Kotsiveli, Crimea, Ukraine, May 3-14, 1994. P.48.

84. Shirokov Yu.V., Kazakov L.N., Paley D.E. Nonlinear Dynamics of Interaction Phase Locked-Loops. Dynamic and Stochastic Wave Phenomena. Abstracts of the Second International Scientific School-Seminar. Nizny Novgorod, 21-28, June 1994. P.76.

85. Максаков В.П., Панченко И.О. Область захвата в системе фазовой синхронизации второго порядка с реверсивным счетчиком // Теоретическая электротехника. Республ. межвед. научн. техн. сб. - Львовский гос. ун-т. - 1989. - Вып. 47. - С. 68-72.

86. Казаков Л.Н., Палей Д.Э. Применение многомерных точечных отображений для исследования дискретных систем фазовой синхронизации. Тез. докладов научно-технической конференции "Повышение качества и

эффективности устройств синхронизации в системах связи" - Ярославль, - 1993. - С.1.

87. Казаков Л.Н., Палей Д.Э. Анализ динамики дискретной СФС второго порядка. Там же. С.42.

88. Фазовая синхронизация / Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Связь. 1975. 287 с.

89. Казаков Л.Н., Палей Д.Э., Пономарев Н.Ю. Синтезатор частоты с улучшенными спектральными характеристиками // Науч. техн. конф. "Направления развития систем и средств радиосвязи" Т.3. - Воронеж. - 1996. С. 1181-1186.

90. Малиновский В.Н. Полоса захвата синтезатора частоты с кольцом ИФАПЧ первого порядка // Радиотехника. - 1982. - Т.37. - № 9. - С. 42-44.

91. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. - М.: Физматгиз, 1958. - 724 с.

92. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. - М.: Наука, 1977. - 560 с.

93. Бессекерский В.А. Динамический синтез систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1970. - 578 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

### П1.1. Описание структуры предельного цикла-интервала первого типа.

Рассмотрим структуру возникновения ЦИ1.

На рис. 2.18 приведен типичный пример притягивающего множества этого типа. Отрезок  $(b1, b2)$  на верхней границе  $\Phi(y)$  является притягивающим по координате  $x$ . Из каждой точки этого отрезка происходит нелинейное отображение по  $\varphi$ , т.к. он принадлежит области  $Q_1$ . Так как устойчивых точек на  $(b1, b2)$  нет, то через одну или несколько итерация вектор состояния покидает его и отображается в отрезок  $(b2, b3)$ , который находится в области линейных отображений  $Q_0$ . Каждая точка  $(b2, b3)$  за один шаг отображается в отрезок  $(b4, b6)$  причем точка  $b2$  отображается в точку  $b6$ , а точка  $b3$  - в точку  $b4$ . Аналогичным образом происходит отображение отрезка  $(c1, c3)$  на нижней границе  $\Phi(y)$ . Так как отрезок  $(b4, b6)$  является отталкивающим по координате  $x$ , то на следующей итерации вектор состояния покинет его. Отрезок  $(b4, b6)$  делится границей области  $Q_{-1}$  на две части - отрезки  $(b4, b5)$  и  $(b5, b6)$ . Точка  $b5$  отрезка  $(b4, b5)$  отображается на прямую  $\varphi = -1$ . Точка  $b5$  отрезка  $(b5, b6)$  отображается на прямую  $\varphi = 1$ . Если все точки отрезка  $(b4, b6)$  при последовательных итерациях попадают в отрезки  $(c4, c6)$  или  $(c3, c1)$ , то цикл-интервал будет устойчив.

Рассмотрим наиболее характерный для небольших  $M$  случай, при котором отображение всех точек отрезка  $(b4, b6)$  происходит на нижнюю границу  $\Phi(y)$  за один шаг. Для этого достаточно выполнение условий:

$$b6_x^* < -M + g ; b4_x^* < -M + g$$

где  $b6_x^*$  координата  $x$  точки, в которую отображается вектор  $[b6, M+g]^T$ ,  $b4_x^*$  - координата  $x$  точки, в которую отображается вектор  $[b4, M+g]^T$ .

В этом случае вектор состояния никогда не покинет множества, состоящего из отрезков  $(b1, b3)$ ,  $(c1, c3)$ ,  $(b4, b6)$ ,  $(c4, c6)$  если выполняются условия:

$$b6_\varphi^* > c3_\varphi ; b4_\varphi^* > c4_\varphi ,$$

В рассмотренном варианте движения отрезки имеют следующие координаты по  $\varphi$ :

$$b3_{\varphi} = \alpha + M + g - 3$$

$$b4_{\varphi} = (3 - \alpha)(\alpha - 1) + (2 - \alpha)(M + g)$$

$$b4_{\varphi}^* = (3 - \alpha)(\alpha - 1)^2 + (M + g)(1 + (1 - \alpha)(2 - \alpha))$$

$$b6_{\varphi}^* = 1 - \alpha + M + g + 2$$

С учетом сказанного, условия существования цикла-интервала сводятся к неравенству:

$$(\alpha - 3)(\alpha - 2)(\alpha - 1) + (M + g)(1 + (2 - \alpha)^2) < 0,$$

Можно показать, что оно выполняется при  $2 < \alpha < 3$ .

Рассмотренный вариант притягивающего множества является простейшим. В случае, когда не все точки отрезка  $(b4, b6)$  или  $(b1, b3)$  отображаются за один шаг непосредственно на нижнюю границу нелинейности  $\Phi(y)$ , возникает более сложное движение. Этот цикл-интервал также состоит из конечного числа равномерно заполняемых отрезков, но не все они лежат на границах нелинейности  $\Phi(y)$ . Данное явление происходит в частности при увеличении  $\alpha$ . Координата  $\varphi$  точки  $b3$  сдвигается вправо (рис. 2.18). Когда она становится больше координаты  $\varphi$  пересечения прямой  $L_{x,0}$  и верхней границы  $\Phi(y)$  часть отрезка  $(b1, b3)$  отображается не на границу нелинейности.

Разрушение рассмотренного предельного множества происходит, при попадании его в область притяжения состояния равновесия. Как показал анализ, практически границу исчезновения можно оценить по попаданию точки  $b3$  в пределы отрезка  $(b7, b8)$ . Из этого отрезка изображающая точка переходит в состояние синхронизма. После этого система становится глобально устойчива. (Правая граница области существования ЦИ1 на рис. 2.13).

## П1.2. Описание структуры предельного цикла-интервала второго типа.

Рассмотрим структуру возникновения ЦИ2.

Отрезок  $(b1, b9)$  является притягивающим по координате  $x$ . Попадая на этот отрезок вектор состояния отображается на верхнюю границу  $\Phi(y)$  с уменьшением координаты  $\varphi$  и попадает в отрезок  $(b1, b2)$ , из которого происходит нелинейное отображение в отрезок  $(b4, b6)$ . Отрезок  $(b4, b6)$  делится

границей области  $Q_I$  на два отрезка  $(b4, b5)$  и  $(b5, b6)$ . Отображение отрезка  $(b4, b5)$  происходит линейно, при этом точка  $b5$  отображается на прямую  $\varphi = -1$ . Отображение отрезка  $(b5, b6)$  происходит нелинейно, при этом точка  $b5$  отображается в прямую  $\varphi = 1$ . Отображения отрезков  $(c1, c9)$  и  $(c4, c6)$  происходят аналогично.

Предположим, что все точки отрезка  $(b4, b6)$  полностью отображаются на нижнюю границу  $\Phi(y)$  за одну итерацию. В этом случае вектор состояния никогда не покинет границ нелинейности  $\Phi(y)$ , если выполняются условия:  $b6_{\varphi}^* < c4_{\varphi}$ ;  $b4_{\varphi}^* > c9_{\varphi}$ , где  $b6_{\varphi}^*$  координата  $\varphi$  точки в которую отображается  $b6$ ,  $b4_{\varphi}^*$  - координата  $\varphi$  точки в которую отображается  $b4$ . Разрушение притягивающего множества происходит при нарушении этих условий, что эквивалентно попаданию в область притяжения состояния равновесия. В случае, когда не все точки отрезка  $(b4, b6)$  отображаются на нижнюю границу нелинейности  $\Phi(y)$  за один шаг возникает более сложное движение. Это предельное множество также состоит из конечного числа равномерно заполняемых отрезков, но не все они лежат на границах нелинейности  $\Phi(y)$ . Разрушение этого движения также происходит при попадании хотя бы части одного из отрезков в область притяжения состояния равновесия.

## П2.1. Моделирование на ЭВМ импульсных узлов

К числу импульсных элементов схем рассматриваемых моделей относятся импульсно-фазовые детекторы.

Структурная схема фазового детектора "выборка-запоминание" представлена на рис.П2.1. Наряду с генератором пилообразного напряжения (ГПН) в нее введены электронные ключи Кл1, Кл2, конденсатор С1, на котором формируется пилообразное напряжение  $e_{c1}(t)$ , конденсатор С2, запоминающий напряжение (заряд) на время между соседними импульсами выборки, сопротивление R открытого ключа Кл2, буферный каскад БК с коэффициентом передачи по напряжению, близким к единице  $e_d(t) \approx e_{c2}(t)$ . Генератор пилообразного напряжения может запускаться либо опорными импульсами  $e_0(t)$ , либо импульсами, формируемыми ФИ  $e_c(t)$ . Соответственно, импульсы выборки  $e_c(t)$  формируются либо из сигнала  $e_c(t)$ , либо  $e_0(t)$ . Импульсы выборки определяют период регулирования в кольце СФС. При использовании в качестве последних импульсов опорного генератора  $e_0(t)$  интервал дискретизации в кольце будет постоянным, при использовании  $e_c(t)$  - переменным. Недостатком первого варианта является то, что он не способен реализовать пилообразную рабочую характеристику в области отрицательной разности фаз входных сигналов (случай, когда частота импульсов  $e_0(t)$  больше  $e_c(t)$ ). В дальнейшем в качестве импульсов выборки будут использоваться импульсы  $e_c(t)$ .

Согласно [74] для безинерционного детектора математическая модель запишется в виде:

$$e_d(t) = (E_d / T_0) \sum_{k=0}^{\infty} \tau_n (I(t - t_n) - I(t - t_{n+1})).$$

Основными помехами реальных детекторов типа "выборка-запоминание" являются помехи с частотой сравнения и ее гармоник в составе выходного сигнала ИФД. Среди причин их образования можно выделить следующие группы.

1. Проникновение сигнала пилообразной формы на выход ИФД во время действия импульса выборки при отсутствии ключа Кл1.
2. Разряд запоминающего конденсатора С2 "паразитным" током утечки в промежутки времени между импульсами выборки.
3. Проникновение периодического сигнала  $e_{C1}(t)$ , образуемого на конденсаторе С1, через закрытый ключ Кл2 на выход ИФД.
4. Проникновение импульсов выборки через "паразитные" емкости и резисторы ключа Кл2 на выход ИФД.

При построении модели реального ИФД ниже учитываются только две из вышеперечисленных причин, при этом сигнал с выхода детектора в режиме синхронизма имеет вид, приведенный на рис. П2.2. Разряд запоминающего конденсатора моделируется линейным участком и определяется постоянным коэффициентом, характеризующим линейные потери за период в процентном соотношении от максимального значения в момент окончания импульса выборки  $\tau_{\phi}$ .

Появление очередного импульса с выхода ПГ соответствует изменению полной фазы его сигнала на  $2\pi$ , поэтому этот узел моделируется в виде последовательного соединения детектора пересечения синусоидальным сигналом перестраиваемого генератора ПГ нулевого порогового напряжения и формирователя импульсов (ФИ)..

## **П2.2. Моделирование на ЭВМ аналоговых узлов**

Для модели ИСФС изображенной на рис. 4.1 к аналоговым узлам относятся фильтр нижних частот ФНЧ и перестраиваемый генератор ПГ.

Существует ряд методов моделирования таких элементов [73]. Основными требованиями здесь является минимальный объем вычислений на ЭВМ, простота алгоритмических выражений и приемлемая точность в дискретной реализации сигналов.

Рассмотрим построение численной модели прохождения сигнала через фильтр нижних частот, выполненный в виде пропорционально-интегрирующего фильтра (ПИФ). Операторный коэффициент передачи фильтра:



$K(p) = \frac{1 + m T_f p}{1 + T_f p}$ , где  $m$ ,  $T_f$  - коэффициент форсирования и постоянная времени.

Импульсная характеристика этого звена имеет вид:

$$g(t) = m \cdot \delta(t) + \frac{1}{T_f} \cdot (1 - m) \cdot e^{-\frac{t}{T_f}}, \quad (\text{П0.1})$$

где  $\delta(t)$  - дельта-функция.

Пользуясь методом интеграла наложения [75], определим сигнал на выходе ФНЧ:

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_0^t g(t-x)s(x)dx + s_0(t), \quad (\text{П0.2})$$

где  $S(x)$  - сигнал на входе в момент времени  $t=x$ ,  $S_0(t)$  - решение однородного дифференциального уравнения учитывающее начальное состояние фильтра. В связи с выполняемым на практике условием  $S(x)=0$  при  $t<0$  нижний предел интегрирования в выражении (П0.2) взят равным нулю. Для выбранного типа ФНЧ первого порядка имеем:

$$s_0(t) = s(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_f}}.$$

Подставляя в (П0.2) выражение для импульсной характеристики ПИФ (П0.2), получим:

$$s_{\text{вых}}(t) = m s(t) + \frac{1-m}{T_f} e^{-\frac{t}{T_f}} \int_0^t e^{\frac{x}{T_f}} s(x)dx + s(0) e^{-\frac{t}{T_f}}, \quad (\text{П0.3})$$

Для построения рекуррентного соотношения вычислим значение (П0.3) в дискретные моменты времени  $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ , где  $\Delta t$  - выбранный шаг дискретизации времени,  $k=0, 1, 2, \dots$ , получим:

$$\begin{aligned} s_{\text{вых}}(t_k) &= m s(t_{k-1} + \Delta t) + \frac{1-m}{T_f} e^{-\frac{t_{k-1} + \Delta t}{T_f}} \int_0^{t_{k-1} + \Delta t} e^{\frac{x}{T_f}} s(x)dx + \\ &+ s(0) e^{-\frac{t_{k-1} + \Delta t}{T_f}} = m s(t_k) + I(t_k) + s(0) e^{-\frac{t_k}{T_f}}, \end{aligned} \quad (\text{П0.4})$$

где

$$\begin{aligned}
I(t_k) &= \frac{1-m}{T_f} e^{-\frac{t_{k-1}+\Delta t}{T_f}} \int_0^{t_{k-1}+\Delta t} e^{\frac{x}{T_f}} s(x) dx = \\
&= \frac{1-m}{T_f} e^{-\frac{t_{k-1}+\Delta t}{T_f}} \left( \int_0^{t_{k-1}} e^{\frac{x}{T_f}} s(x) dx + \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\Delta t} e^{\frac{x}{T_f}} s(x) dx \right) = \\
&= e^{-\frac{\Delta t}{T_f}} I(t_{k-1}) + \frac{1-m}{T_\phi} e^{-\frac{t_{k-1}+\Delta t}{T_f}} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\Delta t} e^{\frac{x}{T_f}} s(x) dx.
\end{aligned}$$

Учитывая малость шага дискретизации  $\Delta t$ , входящий в (П0.4) интеграл можно вычислить приближенно [72]:

$$e^{-\frac{t_{k-1}+\Delta t}{T_f}} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\Delta t} e^{\frac{x}{T_f}} s(x) dx \approx \frac{s(t_{k-1} + \Delta t) + e^{-\frac{\Delta t}{T_f}} \cdot s(t_{k-1})}{2} \cdot \Delta t.$$

Отсюда получим:

$$I(t_k) = e^{-\frac{\Delta t}{T_f}} I(t_{k-1}) + \frac{1-m}{T_\phi} \frac{s(t_k) + e^{-\frac{\Delta t}{T_f}} s(t_{k-1})}{2} \Delta t. \quad (\text{П0.5})$$

Выражения (П0.4), (П0.5) определяют рекуррентное соотношение для вычисления сигнала на выходе ПИФ. Точность рассчитанного отклика фильтра нижних частот определяется точностью вычисления интеграла для выражения (П0.4), что при использовании численного решения методом Эйлера [72] определяется малостью шага разбиения  $\Delta t$ . Учитывая постоянную времени фильтра выражение для выбора  $\Delta t$  для вычисления отклика ПИФ с точностью не менее второго порядка примет вид  $\Delta t/T_f < 0.01$ .

Перестраиваемый генератор моделируется следующим образом. В общем виде ПГ формирует сигнал:

$$e_{\text{ПГ}}(t) = U_{\text{ПГ}} \cos(\varphi_{\text{ПГ}}(t) + \theta_0). \quad (\text{П0.6})$$

(амплитуду сигнала  $U_{\text{ПГ}}$  считаем постоянной).

Пренебрегая инерционностью цепей управления, значение фазы сигнала перестраиваемого генератора в дискретные моменты времени находится численным решением интеграла

$$\varphi_{\text{ПГ}}(t_k) = \int_0^{t_k} \omega(t) dt = \varphi_{\text{ПГ}}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} S_{\text{ПГ}}(e(t)) e(t) dt. \quad (\text{П0.7})$$

Характеристику управления генератора представим в виде аппроксимирующего полинома:  $S_{\text{ПГ}}(e) = a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots$ . При временной

нестабильности ПГ коэффициенты  $a_0, a_1, a_2 \dots$ , входящие в этот являются функциями времени. Обычно для решения технических задач добиваются линейности рабочей характеристики перестраиваемого генератора, что соответствует линейной аппроксимации характеристики  $S_{ПГ}(e) = a_0 + a_1 e$  с постоянными коэффициентами. Пользуясь численными методами [72], для интеграла, входящего в (П0.7), получим:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} S_{ПГ}(e(t)) e(t) dt \approx \frac{S_{ПГ}(e(t_k)) e(t_k) + S_{ПГ}(e(t_{k-1})) e(t_{k-1})}{2} \Delta t.$$

Окончательное расчетное выражение (П0.6) примет вид:

$$e_{ПГ}(t) = U_{ПГ} \cos(\varphi_{ПГ}(t_k) + \frac{S_{ПГ}(e(t_k)) e(t_k) + S_{ПГ}(e(t_{k-1})) e(t_{k-1})}{2}), \quad (\text{П0.8})$$

где  $U_{ПГ}$  - постоянная амплитуда,  $\theta_0$  - начальная фаза сигнала генератора.

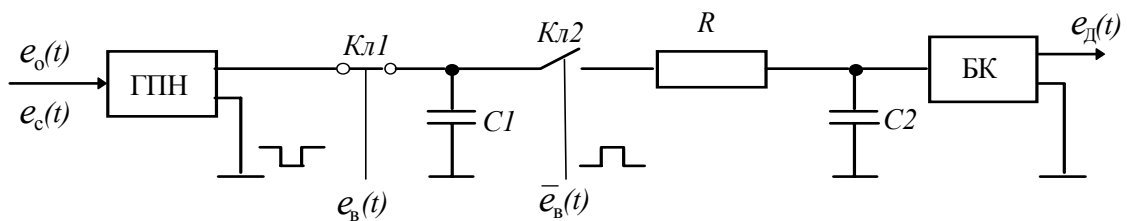


Рис. П2.1. Структурная схема модели импульсно-фазового детектора "выборка-запоминание"

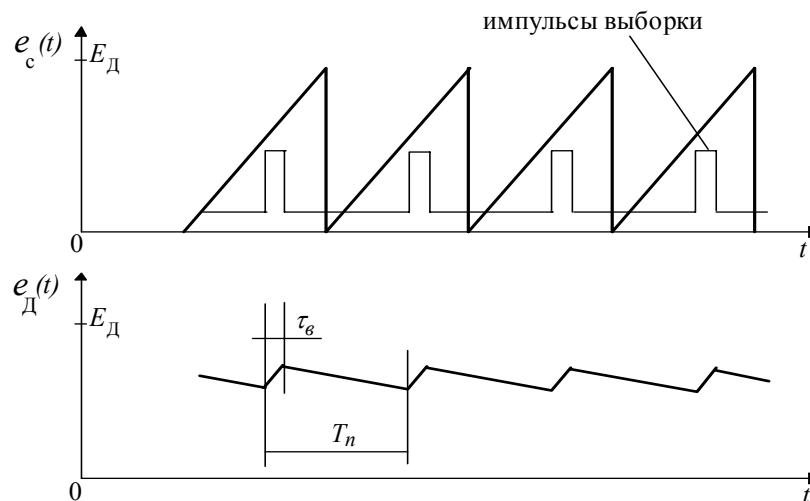


Рис. П2.2. Выходной сигнал ИФД "выборка-запоминание" в состоянии синхронизма

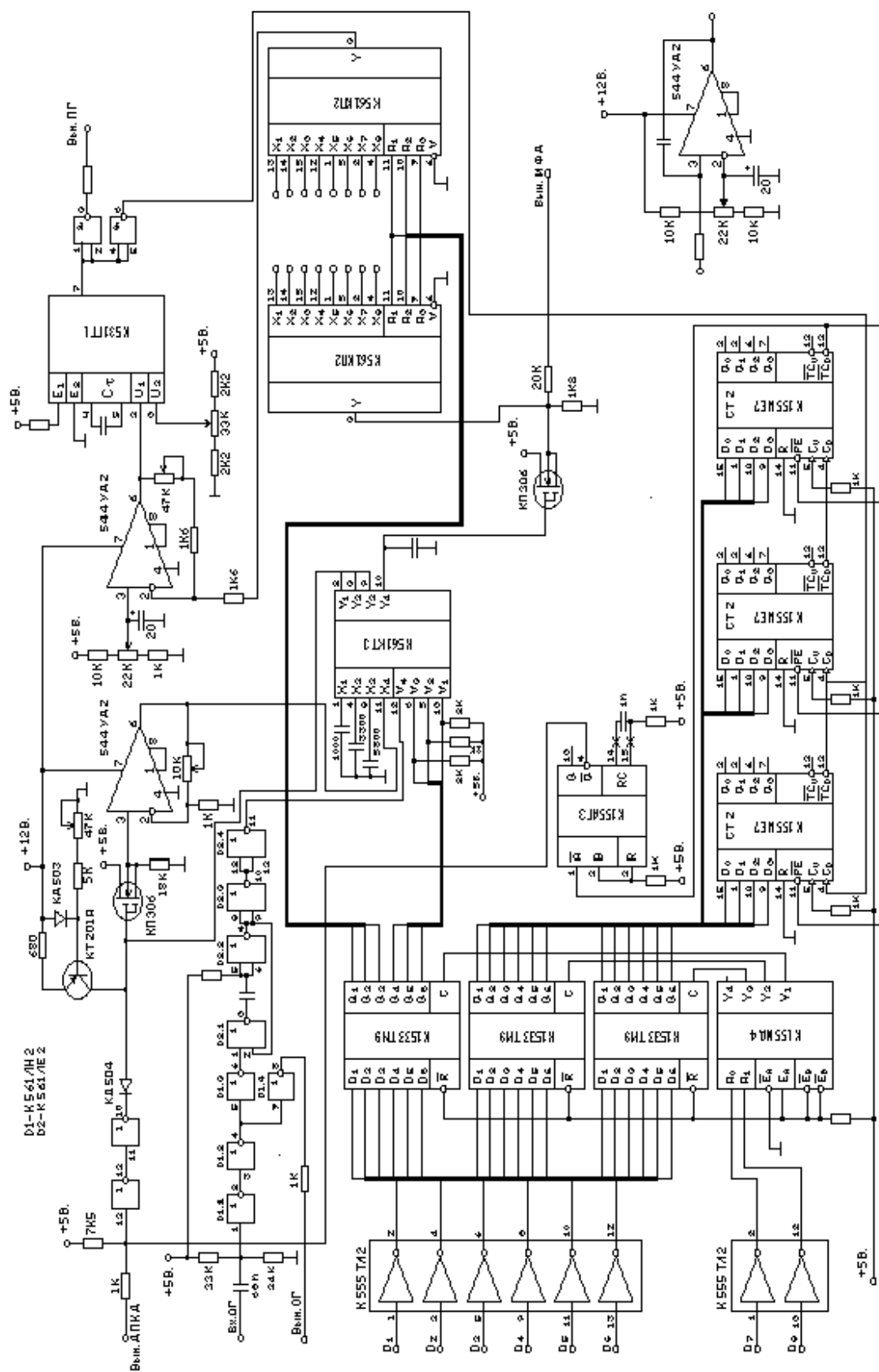


Рис. П2.3. Принципиальная схема однокольцевого синтезатора частоты КВ-диапазона.